DIE GRUNDLEHREN DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE
HAMBURG

M. BORN
GÖTTINGEN

C. RUNGE
GÖTTINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. COURANT
GÖTTINGEN

BAND XII

METHODEN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK I

VON

R. COURANT UND D. HILBERT

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1924

METHODEN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

VON

R. COURANT UND D. HILBERT

ORD. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

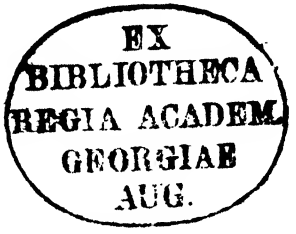
GEH. REG.-RAT · ORD. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

ERSTER BAND

MIT 29 ABBILDUNGEN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1924

ALLE RECHTE, INSBESONDERE
DAS DER ÜBERSETZUNG IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.
COPYRIGHT 1924 BY JULIUS SPRINGER IN BERLIN.



7 1924.3212
Phys. I, S. 293

Vorwort.

Von jeher hat die Mathematik mächtige Antriebe aus den engen Beziehungen gewonnen, welche zwischen den Problemen und Methoden der Analysis und den anschaulichen Vorstellungen der Physik bestehen. Erst die letzten Jahrzehnte brachten eine Lockerung dieses Zusammenhanges, indem sich die mathematische Forschung vielfach von ihren anschaulichen Ausgangspunkten ablöste und insbesondere in der Analysis manchmal allzu ausschließlich um Verfeinerung ihrer Methoden und Zuspitzung ihrer Begriffe bemühte. So kommt es, daß viele Vertreter der Analysis das Bewußtsein der Zusammengehörigkeit ihrer Wissenschaft mit der Physik und anderen Gebieten verloren haben, während auf der anderen Seite oft den Physikern das Verständnis für die Probleme und Methoden der Mathematiker, ja sogar für deren ganze Interessensphäre und Sprache abhanden gekommen ist. Ohne Zweifel liegt in dieser Tendenz eine Bedrohung für die Wissenschaft überhaupt; der Strom der wissenschaftlichen Entwicklung ist in Gefahr, sich weiter und weiter zu verästeln, zu versickern und auszutrocknen. Soll er diesem Geschick entgehen, so müssen wir einen guten Teil unserer Kräfte darauf richten, Getrenntes wieder zu vereinigen, indem wir unter zusammenfassenden Gesichtspunkten die inneren Zusammenhänge der mannigfaltigen Tatsachen klarlegen. Nur so wird dem Lernenden eine wirkliche Beherrschung des Stoffes ermöglicht und dem Forscher der Boden für eine organische Weiterentwicklung bereitet.

Diesem Ziele soll für das Gebiet der mathematischen Physik das vorliegende Buch dienen. Es entwickelt mathematische Methoden, die im Anschluß an klassische physikalische Fragestellungen des 18. und 19. Jahrhunderts ausgebildet worden sind, und sucht die gewonnenen Ergebnisse zu einheitlichen mathematischen Theorien auszugestalten. Vollständigkeit erstreben wir nicht, hoffen aber doch, durch unsere Darstellung den Zugang zu einem wichtigen und an den schönsten Zusammenhängen reichen Gebiete zu erleichtern, dessen weiterer Ausbau eine überaus lohnende und für Mathematik wie Physik gleich ersprießliche Aufgabe ist. Unserer Einstellung entsprechend haben wir uns überall bemüht, für die Betrachtungen und Beweise die einfachste mögliche Form zu finden. Jede blinde Benutzung des Apparates der Rechnung ist nach Möglichkeit vermieden und durch Überlegungen begrifflicher Natur ersetzt. Abgesehen von dem rein Methodischen enthält der vorliegende Band viele Einzelheiten, die auch dem Kenner neu sein dürften.

Ein geschlossenes Ganzes wird dieser Band erst mit dem in Vorbereitung befindlichen zweiten Bande bilden. Durchweg spielen die Gesichtspunkte der Variationsrechnung die beherrschende Rolle, d. h. das Bestreben, mathematische Größen und Funktionen durch Extremums-

eigenschaften zu charakterisieren. Immer mehr erweist sich die Variationsrechnung, in diesem allgemeinen Sinne verstanden, als mächtiger Hebel der mathematischen Analysis und wichtiges Prinzip der Vereinfachung und Vereinheitlichung.

Für den vorliegenden Band im einzelnen muß ich die Verantwortung allein übernehmen, da Anlage und Einzelausführungen zum größten Teil in meiner Hand lagen. Auch habe ich mir die Freiheit genommen, an zahlreichen Stellen des Buches größere Abschnitte aus eigenen Abhandlungen mit geringen Veränderungen abzudrucken. Wenn ich trotzdem darauf bestanden habe, daß auch nach außen hin die Autorschaft meines hochverehrten Lehrers, Kollegen und Freundes *Hilbert* mit zum Ausdruck kommt, so geschieht dies nicht nur im Hinblick auf das vielfach benutzte Material aus Hilbertschen Abhandlungen und Vorlesungen, welches in erhöhtem Maße noch im zweiten Bande zur Geltung kommen soll; vor allem wünsche ich vielmehr damit zu betonen, daß die hier vertretenen wissenschaftlichen und pädagogischen Bestrebungen Kinder der mathematischen Geistesrichtung sind, welche für immer mit *Hilberts* Namen verbunden bleiben wird.

Über die Einzelheiten des behandelten Stoffes unterrichtet das ausführliche Inhaltsverzeichnis. Für die Anordnung waren methodische, nicht stoffliche Gesichtspunkte maßgebend. Jedes einzelne Kapitel bildet in gewissem Grade eine selbständige Einheit und kann daher im wesentlichen auch ohne Kenntnis der übrigen gelesen werden. Ein ausführliches Register soll die Orientierung in dem Buche erleichtern. Die Literaturangaben, insbesondere die jedem Kapitel beigegebenen Literaturverzeichnisse, machen keinerlei Anspruch auf systematische Vollständigkeit.

Für den zweiten Band haben wir uns neben der allgemeinen Behandlung der klassischen Differentialgleichungen der Physik eine ausführliche Erörterung der Existenzfragen und der numerischen Berechnung der Lösungen vorbehalten, wobei die direkten Methoden der Variationsrechnung im Vordergrunde stehen sollen. Ferner sollen im zweiten Bande eine Ergänzung der hier im vierten Kapitel gegebenen Darstellung der Variationsrechnung durch die Hamilton-Jacobische Theorie und Anwendungen auf Fragen der neueren Physik Platz finden.

Vielen treuen Helfern bei der Herstellung des Manuskriptes und bei der saueren Arbeit der Korrektur schulde ich Dank: *E. Bessel-Hagen, K. Friedrichs, K. Grandjot, E. Hellinger, P. Jordan, H. Kneser, O. Neugebauer, A. Ostrowski, C. L. Siegel, A. Walther.*

Ebenso ist es mir eine angenehme Pflicht, auch an dieser Stelle der Verlagsbuchhandlung, welche in ihrer gewohnten Großzügigkeit die Arbeit des Autors durch jedes erdenkliche Entgegenkommen erleichtert hat, meinen herzlichen Dank auszusprechen.

Göttingen, am 11. Februar 1924.

R. Courant.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Die Algebra der linearen Transformationen und quadratischen Formen.

Seite

§ 1. **Lineare Gleichungen und lineare Transformationen** 1
Vektoren. — Lineare Gleichungen, Tensoren, Bilinearformen.

§ 2. **Lineare Transformationen mit linearem Parameter** 6

§ 3. **Die Hauptachsentransformation der quadratischen Formen** 9
Orthogonale Transformationen. Das Hauptachsenproblem. — Die Durchführung der Hauptachsentransformation auf Grund eines Maximumprinzips. — Charakteristische Zahlen und Eigenwerte. — Resolvente einer Form.

§ 4. **Die Minimum-Maximum-Eigenschaft der Eigenwerte** . . . 16

§ 5. **Anwendungen** 18
Orthogonale Vektorensysteme. Vollständigkeit. Lineare Darstellung eines Vektors durch ein Vektorensystem. — Lineare Unabhängigkeit und Gramsche Determinante. — Lösung des zu einer Form gehörigen linearen Gleichungssystems.

§ 6. **Ergänzungen und Aufgaben zum ersten Kapitel** 24
Determinantenabschätzung von Hadamard. — Simultane Transformation zweier quadratischer Formen in kanonische Gestalt. — Trägheitsgesetz der quadratischen Formen. — Bilinearformen und quadratische Formen von unendlich vielen Variablen. — Unendlich kleine lineare Transformationen. — Variierte Systeme. — Auferlegung einer Bindung. — Elementarteiler eines Tensors oder einer Bilinearform. — Literatur zum ersten Kapitel.

Zweites Kapitel.

Das Problem der Reihenentwicklung willkürlicher Funktionen.

§ 1. **Orthogonale Funktionensysteme** 33
Definitionen. — Orthogonalisierung von Funktionen. — Besselsche Ungleichung. Vollständigkeitsrelation. Approximation im Mittel. — Orthogonale Transformationen in unendlich vielen Veränderlichen. — Gültigkeit der Ergebnisse bei mehreren unabhängigen Veränderlichen. Erweiterung der Voraussetzungen.

§ 2. **Das Häufungsprinzip für Funktionen** 39

§ 3. **Unabhängigkeitsmaß und Dimensionenzahl** 42
Unabhängigkeitsmaß. — Asymptotische Dimensionenzahl einer Funktionenfolge.

Seite

§ 4. **Die Fouriersche Reihe** 46

Vollständigkeit des Systems der trigonometrischen Funktionen. — Die Fouriersche Reihenentwicklung stetiger Funktionen mit stückweise stetiger Ableitung. — Ausdehnung des Resultates auf stückweise stetige Funktionen. — Die Größenordnung der Fourierschen Entwicklungskoeffizienten.

§ 5. **Beispiele und Anwendungen für die Fouriersche Reihe** . . . 54

Das Dirichletsche Integral. — Beispiele. — Streckung des Grundgebietes. — Funktionalgleichung der Thetafunktion. — Die Poissonsche Formel. — Mehrfache Fouriersche Reihen.

§ 6. **Das Fouriersche Integral** 61

Plausibilitätsbetrachtungen. — Beweis des Fourierschen Integraltheorems. — Reziprozitätsformeln.

§ 7. **Beispiele für das Fouriersche Integral** 65

§ 8. **Die Polynome von Legendre** 66

Erzeugung durch Orthogonalisierung der Potenzen $1, x, x^2, \ldots$ — Differentialgleichung und erzeugende Funktion. — Vollständigkeit.

§ 9. **Der Approximationssatz von Weierstraß** 69

Erster Beweis. — Zweiter Beweis. — Ausdehnung des Ergebnisses auf Funktionen von mehreren Veränderlichen.

§ 10. **Beispiele anderer Orthogonalsysteme** 72

Verallgemeinerung der zu den Legendreschen Polynomen führenden Fragestellung. — Die Tschebyscheffschen Polynome. — Die Jacobischen Polynome. — Die Hermiteschen Polynome. — Die Laguerreschen Polynome.

§ 11. **Die zu einem Orthogonalsystem gehörigen Integralgleichungen** 79

§ 12. **Ergänzungen und Aufgaben zum zweiten Kapitel** 82

Die Hurwitzsche Lösung des isoperimetrischen Problems. — Gauß' Anwendung der Kugelfunktionen zur numerischen Berechnung von bestimmten Integralen. — Reziprozitätsformeln. — Einiges über Bernoullische Polynome und Zahlen. — Beispiele Fourierscher Reihen von Funktionen mit Unendlichkeitsstellen. — Spektrale Zerlegung durch Fouriersche Reihe und Fouriersches Integral. — Vollständigkeit des Systems der trigonometrischen Funktionen. — Erzeugung vollständiger Funktionensysteme in mehreren Variablen durch solche in einer Veränderlichen. — Die Mellinschen Umkehrformeln. — Das Gibbssche Phänomen. — Sätze über die Gramsche Determinante. — Anwendung des Lebesgueschen Integralbegriffes. — Literatur zum zweiten Kapitel.

Drittes Kapitel.

Theorie der linearen Integralgleichungen.

§ 1. **Vorbereitende Betrachtungen** 99

Bezeichnungen und Grundbegriffe. — Ausgeartete Kerne. — Quellenmäßig dargestellte Funktionen.

§ 2. **Die Fredholmschen Sätze für ausgeartete Kerne** 102

Seite

§ 3. **Die Fredholmschen Sätze für einen beliebigen Kern** . . . 104

§ 4. **Die symmetrischen Kerne und ihre Eigenwerte** 107

Existenz eines Eigenwertes bei einem symmetrischen Kern. — Die Gesamtheit der Eigenfunktionen und Eigenwerte. — Die Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte.

§ 5. **Der Entwicklungssatz und seine Anwendungen** 117

Der Entwicklungssatz. — Auflösung der inhomogenen linearen Integralgleichung. — Die Bilinearformel für die iterierten Kerne. — Der Mercersche Satz.

§ 6. **Die Neumannsche Reihe und der reziproke Kern** 122

§ 7. **Die Fredholmschen Formeln** 124

§ 8. **Neubegründung der Theorie** 128

Ein Hilfssatz. — Die Eigenfunktionen eines symmetrischen Kernes. — Unsymmetrische Kerne. — Stetige Abhängigkeit vom Kern.

§ 9. **Erweiterung der Gültigkeitsgrenzen der Theorie** 132

§ 10. **Ergänzungen und Aufgaben zum dritten Kapitel** 134

Beispiele zur allgemeinen Theorie. — Singuläre Integralgleichungen. — Methode von E. Schmidt zur Herleitung der Sätze von Fredholm. — Methode von Enskog zur Auflösung symmetrischer Integralgleichungen. — Methode von Kellogg zur Bestimmung von Eigenfunktionen. — Beispiel eines unsymmetrischen Kernes ohne Nullösungen. — Volterrasche Integralgleichungen. — Die zu einem unsymmetrischen Kerne gehörigen adjungierten Orthogonalsysteme. Integralgleichungen erster Art. — Anwendung des Integrals von Lebesgue. — Die Methode der unendlich vielen Variablen. — Minimumseigenschaften der Eigenfunktionen. — Polare Integralgleichungen. — Symmetrisierbare Kerne. — Bestimmung des lösenden Kernes durch Funktionalgleichungen. — Die Stetigkeit der definiten Kerne. — Satz von Hammerstein. — Literatur zum dritten Kapitel.

Viertes Kapitel.

Die Grundtatsachen der Variationsrechnung.

§ 1. **Die Problemstellung der Variationsrechnung** 142

Maxima und Minima von Funktionen. — Funktionenfunktionen. — Die typischen Probleme der Variationsrechnung. — Die charakteristischen Schwierigkeiten der Variationsrechnung.

§ 2. **Ansätze zur direkten Lösung** 155

Isoperimetrisches Problem. — Das Ritzsche Verfahren. Minimalfolgen. — Weitere direkte Methoden. — Prinzipielles über die direkten Methoden der Variationsrechnung.

§ 3. **Die Differentialgleichungen der Variationsrechnung** 165

Das einfachste Problem der Variationsrechnung. — Mehrere gesuchte Funktionen. — Auftreten höherer Ableitungen. — Mehrere unabhängige Variable. — Identisches Verschwinden des Eulerschen Ausdruckes. — Homogene Form der Eulerschen Differentialgleichungen. — Die Legendresche Bedingung.

Seite

§ 4. **Bemerkungen und Beispiele zur Integration der Eulerschen Differentialgleichung** 177

§ 5. **Randbedingungen** 179

Allgemeiner Ausdruck für die erste Variation eines Integrals. — Freie Ränder, natürliche Randbedingungen und Transversalität.

§ 6. **Variationsprobleme mit Nebenbedingungen** 186

Isoperimetrische Probleme. — Endliche Bedingungsgleichungen. — Allgemeine Nebenbedingungen.

§ 7. **Der invariante Charakter der Eulerschen Differentialgleichungen** 193

Allgemeine Formeln. — Transformation von Δu. Polarkoordinaten. — Elliptische Koordinaten.

§ 8. **Die Greenschen Formeln** 199

Greensche Formeln für gewöhnliche Differentialausdrücke zweiter Ordnung. Adjungierte Ausdrücke. — Gewöhnliche Differentialausdrücke höherer Ordnung. — Partielle Differentialausdrücke. — Normalformen im elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Falle. — Beispiele.

§ 9. **Das Hamiltonsche Prinzip und die Differentialgleichungen der Physik** 207

Das Hamiltonsche Prinzip in der Punktmechanik. — Schwingende Saite und schwingender Stab. — Schwingende Membran und Platte.

§ 10. **Ergänzungen und Aufgaben zum vierten Kapitel** 212

Geometrische Deutung des Multiplikators von Lagrange. — Variationsproblem zu gegebener Differentialgleichung. — Reziprozität bei isoperimetrischen Problemen. — Kreisförmige Lichtstrahlen. — Das Problem der Dido. — Beispiel eines räumlichen Problems. — Das isoperimetrische Problem auf einer krummen Fläche. — Beispiel eines allgemeinen Mayerschen Problems. — Die Indikatrix und ihre Anwendungen. — Gleichzeitige Variation der abhängigen und unabhängigen Variablen. — Die Sätze von E. Noether über invariante Variationsprobleme. Integrale in der Punktmechanik. — Transversalität bei mehrfachen Integralen. — Eulersche Differentialausdrücke auf krummen Flächen. — Tetrazyklische und pentasphärische Koordinaten. — Literatur zum vierten Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Die Schwingungs- und Eigenwertprobleme der mathematischen Physik.

§ 1. **Allgemeine Bemerkungen über lineare Differentialgleichungen** 221

Das Superpositionsprinzip. — Homogene und unhomogene Randbedingungen.

§ 2. **Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad** . . . 222

Integration der Differentialgleichung. — Anwendung auf die Theorie der Resonanzerscheinungen und der Registrierapparate. — Behandlung der unhomogenen Gleichung im allgemeinen Fall.

Seite

§ 3. **Systeme von endlich vielen Freiheitsgraden** 228

Hauptschwingungen. — Allgemeine Eigenschaften der schwingenden Systeme. — Übergang von einem System zu einem benachbarten System.

§ 4. **Systeme von unendlich vielen Freiheitsgraden** 232

Die Methoden des Grenzübergangs zu unendlich vielen Freiheitsgraden. — Die homogene Saite. — Äußere Kräfte. — Allgemeiner Gedankengang der folgenden Untersuchungen.

§ 5. **Die unhomogene Saite** 237

Die allgemeine unhomogene Saite und das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem. — Kleine Unhomogenitäten.

§ 6. **Der schwingende Stab** 243

§ 7. **Die schwingende Membran** 245

Das allgemeine Eigenwertproblem der homogenen Membran. — Erzwungene Bewegungen. — Knotenlinien. — Rechteckige Membran. — Kreisförmige Membran. — Besselsche Funktionen. — Die unhomogene Membran.

§ 8. **Die schwingende Platte** 256

Allgemeines. — Kreisförmige Begrenzung.

§ 9. **Andere Eigenwertprobleme** 257

Probleme vom Sturm-Liouvilleschen Typus. Besselsche Funktionen, Legendresche Funktionen beliebiger Ordnung. Jacobische, Hermitesche, Laguerresche, Tschebyscheffsche Polynome. — Wärmeleitung und Eigenwertprobleme. — Schwingungen dreidimensionaler Kontinua. — Eigenwertprobleme der Potentialtheorie. Kugelfunktionen. — Randwertaufgabe der Potentialtheorie und Eigenwertprobleme. Lamésches Problem.

§ 10. **Die Greensche Funktion und die Lösung der Eigenwertprobleme mit Hilfe der Integralgleichungstheorie** 273

Die Greensche Funktion für gewöhnliche Differentialgleichungen. — Zusammenhang mit der Integralgleichungstheorie. — Die Konstruktion der Greenschen Funktion und die Greensche Funktion im erweiterten Sinne. — Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung. — Partielle Differentialgleichungen.

§ 11. **Beispiele für Greensche Funktionen** 291

Gewöhnliche Differentialgleichungen. — Greensche Funktion von Δu für Kreis und Kugel. — Greensche Funktion und konforme Abbildung. — Die Greensche Funktion der Potentialgleichung für eine Kugeloberfläche.

§ 12. **Ergänzungen und Aufgaben zum fünften Kapitel** 299

Systeme von zwei Freiheitsgraden. — Registrierung von Kurven durch Registrierapparate. — Poincarés Deutung des Eigenwertproblems bei endlich vielen Freiheitsgraden. — Dämpfung und Anfachung. — Beispiele zur schwingenden Saite. — Ein Satz über die Schwingungsgleichung. — Schwingungen des frei herabhängenden Seils und Besselsche Funktionen. — Die Greensche Funktion der Gleichung $\Delta u = 0$ für ein Rechtflach. — Die Greensche Funktion für das Innere eines Rechtecks. — Die Greensche Funktion für einen

Kreisring. — Weitere Beispiele für explizit lösbare Fälle der Schwingungsgleichung. — Parameter in den Randbedingungen bei partiellen Differentialgleichungen. — Greensche Tensoren für Differentialgleichungssysteme. — Belastete Orthogonalität und belastete Integralgleichungen. — Streckenspektrum und Integraldarstellungen. — Verallgemeinerung der Entwicklungssätze für schwingende Saite und schwingenden Stab. — Analytische Fortsetzung der Lösungen der Gleichung $\Delta u + \lambda u = 0$. — Ein Satz über die Knotenlinien der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$. — Beispiel für einen Eigenwert unendlich hoher Ordnung. — Grenzen für die Gültigkeit der Entwicklungssätze. — Literatur zum fünften Kapitel.

Sechstes Kapitel.

Anwendung der Variationsrechnung auf die Eigenwertprobleme.

Seite

§ 1. **Die Extremumseigenschaften der Eigenwerte** 322

Die klassischen Extremumseigenschaften. — Die Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte. — Bemerkungen über das Auftreten negativer Eigenwerte.

§ 2. **Allgemeine Folgerungen aus den Extremumseigenschaften der Eigenwerte** 329

Allgemeine Sätze. — Die Größenordnung der Eigenwerte. — Die Vollständigkeitseigenschaft der Eigenfunktionen. — Stetigkeitseigenschaften der Eigenfunktionen.

§ 3. **Der Entwicklungssatz** 342

§ 4. **Die asymptotische Verteilung der Eigenwerte** 344

Die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ bei Gebieten, welche aus endlich vielen Quadraten oder Würfeln bestehen. — Ausdehnung des Resultates auf die allgemeine Differentialgleichung $L[u] + \lambda \varrho u = 0$. — Die Gesetze der asymptotischen Eigenwertverteilung für einen beliebigen Bereich. — Die Gesetze der asymptotischen Eigenwertverteilung für die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ in verschärfter Form. — Vektorielle Randwertaufgaben. Das Gesetz der asymptotischen Eigenwertverteilung für die elektrischen Eigenschwingungen eines Hohlraumes.

§ 5. **Die Knoten der Eigenfunktionen** 363

§ 6. **Das asymptotische Verhalten der Sturm - Liouvilleschen Eigenfunktionen und die Erweiterung der Entwicklungssätze** 367

Asymptotische Entwicklung der Eigenfunktionen. — Anwendung zur Verschärfung der Entwicklungssätze. — Übertragung der Resultate auf die Besselschen und Legendreschen Funktionen.

§ 7. **Ergänzungen und Aufgaben zum sechsten Kapitel** 375

Ableitung der Minimumseigenschaften der Eigenwerte aus ihrer Vollständigkeit. — Andere Minimumseigenschaften der Eigenwerte. — Direkte Ableitung der Eigenwertgleichung. — Stetigkeitseigenschaft der Eigenwerte bei unendlich werdendem σ. — Asymptotische Eigenwertverteilung bei der schwingenden Platte. — Aufgaben. — Parameter in den Randbedingungen. — Minimumsätze für Membran und Platte. — Minimumprobleme bei variabler Massenverteilung. — Literatur zum sechsten Kapitel.

Siebentes Kapitel.

Spezielle durch Eigenwertprobleme definierte Funktionen.

Seite

§ 1. **Vorbemerkungen über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung** 381

§ 2. **Die Besselschen Funktionen** 382

Anwendung der Laplaceschen Transformation. — Diskussion des Integrationsweges. Hankelsche Funktionen. — Besselsche und Neumannsche Funktionen. Integraldarstellung von $J_\lambda(x)$. — Potenzreihendarstellung für $J_\lambda(x)$. — Abhängigkeit vom Parameter λ. — Eine andere Integraldarstellung der Hankelschen und Besselschen Funktionen. — Charakterisierung der Hankelschen Funktionen durch ihr Verhalten im Unendlichen. — Explizite Darstellung der Neumannschen Funktion. — Relationen zwischen den Besselschen Funktionen. — Die Nullstellen der Besselschen Funktionen.

§ 3. **Die Kugelfunktionen von Legendre** 416

Das Schläflische Integral. — Die Integraldarstellungen von Laplace. — Die Legendreschen Funktionen zweiter Art. — Zugeordnete Kugelfunktionen.

§ 4. **Die Kugelfunktionen von Laplace** 420

Aufstellung von $2n + 1$ Kugelfunktionen n^{ter} Dimension. — Vollständigkeit des gewonnenen Funktionensystems. — Der Entwicklungssatz. — Das Poissonsche Integral. — Die Maxwell-Sylvestersche Darstellung der Kugelfunktionen.

§ 5. **Asymptotische Entwicklungen** 430

Die Methode von Laplace. — Anwendung zum Beweis der Stirlingschen Formel. — Anwendung zur asymptotischen Berechnung der Hankelschen und Besselschen Funktionen für große Argumente. — Sattelpunktmethode. — Anwendung der Sattelpunktmethode zur Berechnung der Besselschen Funktionen bei großem Parameter und großem Argument. — Allgemeine Bemerkungen über die Sattelpunktmethode. — Methode von Darboux. — Anwendung der Darbouxschen Methode zur asymptotischen Entwicklung der Legendreschen Polynome.

Schlußbemerkung 444

Sachverzeichnis 445

Druckfehlerberichtigung.

Auf S. 40, Zeile 13 von unten, sind hinter die Worte „gleichmäßig stetigen" die Worte „und gleichmäßig beschränkten" einzuschalten.

Erstes Kapitel.

Die Algebra der linearen Transformationen und quadratischen Formen.

Zahlreiche Fragen der mathematischen Analysis, die uns in diesem Bande beschäftigen werden, sind durch Analogie und innere Verwandtschaft aufs engste mit dem Gebiete der linearen Transformationen und quadratischen Formen verknüpft; wir wollen daher dieses Gebiet einleitend in aller Kürze unter den hier für uns wichtigen Gesichtspunkten durchmustern, indem wir beim Leser eine gewisse Vertrautheit mit den berührten Fragen voraussetzen. Die auftretenden Größen setzen wir hierbei, wie auch später, als reell voraus, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt wird.

§ 1. Lineare Gleichungen und lineare Transformationen.

1. Vektoren. Um die bekannten Tatsachen der Theorie der linearen Gleichungen kurz aussprechen zu können, ist es zweckmäßig, die einfachsten Bezeichnungen der Vektorrechnung heranzuziehen[1]). Ein System von n reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ nennen wir einen *n-dimensionalen Vektor* oder einen Vektor im Raume von n Dimensionen und bezeichnen ihn kurz durch den entsprechenden deutschen Buchstaben $\mathfrak{x}$. Die Zahlen x_i $(i = 1, \ldots, n)$ heißen die *Komponenten* des Vektors $\mathfrak{x}$. Verschwinden alle Komponenten, so sprechen wir vom Vektor Null oder vom *Nullvektor*. Für $n = 2$ oder $n = 3$ ist die einfachste geometrische Deutung eines Vektors bekanntlich die als „Ortsvektor", der vom Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems zum Punkte mit den rechtwinkligen Koordinaten x_i führt. Für $n > 3$ versagt zwar die geometrische Anschauung; trotzdem bleibt eine geometrische Sprechweise der Natur der Sache angemessen.

Sind zwei beliebige reelle Zahlen λ und μ gegeben, so verstehen wir unter dem Vektor $\lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y} = \mathfrak{z}$ denjenigen, dessen Komponenten z_i sich linear aus den Komponenten x_i, y_i von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gemäß der Be-

[1]) Dabei handelt es sich für uns nur um eine kurze Bezeichnungsweise, nicht aber um eine Darlegung der eigentlichen Vektoranalysis bzw. ihrer Verallgemeinerungen auf n Dimensionen, in welcher die Frage nach gewissen Invarianten den Kernpunkt der Untersuchung bildet.

ziehung $z_i = \lambda x_i + \mu y_i$ zusammensetzen. Hiermit ist insbesondere die Summe und die Differenz zweier Vektoren definiert.

Als *„inneres Produkt"* $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})$ der Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bezeichnen wir die Zahl

$$(1) \qquad (\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n = (\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}).$$

Gelegentlich benutzen wir für das innere Produkt $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})$ auch die Bezeichnung *Komponente des Vektors* $\mathfrak{y}$ *in bezug auf* $\mathfrak{x}$ oder umgekehrt.

Verschwindet das innere Produkt $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})$, so nennen wir $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ senkrecht oder *orthogonal* zueinander; für $n = 2$ und $n = 3$ besitzt diese Ausdrucksweise unmittelbar anschauliche Bedeutung. Eine besondere Rolle spielt das innere Produkt $N\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}^2$ eines Vektors mit sich selbst, welches wir als *Norm* des Vektors bezeichnen. Die positiv gerechnete Quadratwurzel aus $\mathfrak{x}^2$ nennen wir den *Betrag* oder die Länge des Vektors $\mathfrak{x}$ und schreiben dafür $|\mathfrak{x}| = +\sqrt{\mathfrak{x}^2}$. Ein Vektor von der Länge 1 heißt ein *normierter Vektor* oder ein *Einheitsvektor*.

Für das innere Produkt $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$ von zwei Vektoren $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ und $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ besteht folgende Ungleichheitsbeziehung:

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})^2 \leqq \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2,$$

oder ohne Benutzung von Vektoren:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann eintritt, wenn die a_i den b_i proportional sind, also eine Beziehung $\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b} = 0$ besteht.

Der Beweis dieser *„Schwarzschen Ungleichung"*[1]) folgt unmittelbar aus der Bemerkung, daß die quadratische Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 = x^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2x \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 0$$

für die Unbekannte x niemals zwei verschiedene reelle Wurzeln haben kann, sondern, außer im Falle der Proportionalität der a_i und b_i, nichtreelle Wurzeln besitzen muß; die Schwarzsche Ungleichung ist die dieser Tatsache entsprechende Relation für die Diskriminante der quadratischen Gleichung.

Vektoren $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m$ heißen voneinander *linear unabhängig*, wenn es unmöglich ist, Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, die nicht alle Null sind, derart zu finden, daß die Vektorgleichung

$$\lambda_1 \mathfrak{x}_1 + \cdots + \lambda_m \mathfrak{x}_m = 0$$

besteht, d. h. daß die Komponenten des linkerhand stehenden Vektors sämtlich verschwinden. Andernfalls nennen wir die Vektoren *linear abhängig*.

[1]) Diese Beziehung wird übrigens schon von *Cauchy* benutzt.

2. Lineare Gleichungen, Tensoren, Bilinearformen. Nunmehr sprechen wir den Hauptsatz der Theorie der linearen Gleichungen ohne Bezugnahme auf die Determinantentheorie folgendermaßen aus:

Ein System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$, *die wir als Komponenten eines Vektors* $\mathfrak{x}$ *betrachten*:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n, \end{aligned}$$

kurz

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = y_i, \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

besitzt bei gegebenen a_{ik} *entweder für jeden willkürlich gegebenen Vektor* $\mathfrak{y}$ *eine und nur eine Lösung* $\mathfrak{x}$, *insbesondere die Lösung* $\mathfrak{x} = 0$ *für* $\mathfrak{y} = 0$; *oder aber die homogenen Gleichungen, welche aus* (2) *für* $\mathfrak{y} = 0$ *entstehen, weisen eine positive Anzahl* ϱ *„nicht trivialer", d. h. vom Nullvektor verschiedener, voneinander linear unabhängiger Lösungen* $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\varrho$ *auf, die wir als normiert annehmen dürfen. In diesem Fall hat auch das „transponierte" Gleichungssystem*

$$\sum_{k=1}^{n} a'_{ik}x'_k = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

wobei $a'_{ik} = a_{ki}$ *gesetzt ist, genau* ϱ *linear unabhängige, nicht triviale Lösungen* $\mathfrak{x}'_1, \ldots, \mathfrak{x}'_\varrho$. *Für diejenigen Vektoren und nur für solche, welche den* ϱ *Relationen* $(\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}'_1) = 0, \ldots, (\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}'_\varrho) = 0$ *genügen, also zu* $\mathfrak{x}'_1, \ldots, \mathfrak{x}'_\varrho$ *orthogonal sind, ist dann auch das unhomogene Gleichungssystem* (2) *lösbar, wobei diese Lösung nur bis auf eine beliebige additiv hinzutretende Lösung des homogenen Gleichungssystems bestimmt ist.*

Wir können unsere linearen Gleichungen auffassen als eine lineare Transformation des Vektors $\mathfrak{x}$ in den Vektor $\mathfrak{y}$; der lineare Charakter der Transformation kommt darin zur Geltung, daß dem Vektor $\lambda_1\mathfrak{x}_1 + \lambda_2\mathfrak{x}_2$ der Vektor $\lambda_1\mathfrak{y}_1 + \lambda_2\mathfrak{y}_2$ entspricht. Eine solche lineare Vektortransformation, die durch das Koeffizientenschema oder die *„Matrix"* der Gleichungen (2):

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit der Determinante

$$\mathsf{A} = |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

bestimmt ist, wollen wir einen „*Tensor*“[1]) nennen und mit dem Buchstaben $\mathfrak{A}$ bezeichnen. Die Elemente a_{ik} der Matrix A heißen die Komponenten des Tensors $\mathfrak{A}$. Die lineare Transformation (2) können wir dann als Multiplikation des Tensors $\mathfrak{A}$ mit dem Vektor $\mathfrak{x}$ auffassen und in der Gestalt

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{y} \tag{2'}$$

schreiben.

Ist der Vektor $\mathfrak{x}$ seinerseits das Produkt eines zweiten Tensors $\mathfrak{B}$ der Komponenten b_{ik} mit einem Vektor $\mathfrak{w}$, hängt also $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{w}$ durch das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik} w_k = x_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

mit der Matrix $B = (b_{ik})$ zusammen, so geht auch $\mathfrak{y}$ aus $\mathfrak{w}$ durch Multiplikation mit einem Tensor $\mathfrak{C}$ hervor. Die Matrix C von $\mathfrak{C}$ entsteht aus A und B nach den Regeln der Matrizenmultiplikation:

$$C = AB,$$

d. h. das Element c_{ik} ist das innere Produkt der i^{ten} Zeile von A und der k^{ten} Spalte von B:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \qquad (i, k = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Den Tensor $\mathfrak{C}$ nennen wir daher das innere Produkt oder kurz das *Produkt der Tensoren* $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Wie man aus der Definition unmittelbar abliest, besteht für diese Produktbildung das *assoziative Gesetz* $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B})\,\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\,(\mathfrak{B}\,\mathfrak{C})$, so daß das Produkt $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2 \cdots \mathfrak{A}_h$ einer beliebigen Anzahl von Tensoren in fester Reihenfolge einen wohldefinierten Sinn erhält. Für $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \cdots = \mathfrak{A}_h = \mathfrak{A}$ schreiben wir dieses Produkt als h^{te} Potenz $\mathfrak{A}^h$ des Tensors $\mathfrak{A}$. Dagegen ist wohl zu beachten, daß das *kommutative Gesetz* der Multiplikation im allgemeinen nicht gilt, sodaß man zwischen einer *vorderen* und einer *hinteren* Multiplikation zu unterscheiden hat. Schließlich definieren wir als den Tensor $\lambda\,\mathfrak{A} + \mu\,\mathfrak{B}$ denjenigen mit der Matrix $\lambda A + \mu B$, d. h. mit den Komponenten $\lambda a_{ik} + \mu b_{ik}$; als Tensor Null demgemäß denjenigen, dessen Komponenten sämtlich verschwinden. Übrigens erkennt man unmittelbar das Bestehen des *distributiven Gesetzes*:

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\,\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\,\mathfrak{C}.$$

---

[1]) An sich wäre für die Durchführung algebraischer Betrachtungen die Einführung eines neuen Wortes nicht nötig; sie empfiehlt sich aber, wenn man die Operation der Transformation begrifflich von dem bloßen Schema der Koeffizienten unterscheiden will.

Im Falle des Nichtverschwindens der Determinante $\mathsf{A} = |a_{ik}|$ unseres Gleichungssystems (2) wird dessen Auflösung durch ein entsprechendes Gleichungssystem

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \breve{a}_{ik} y_k \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

bewirkt. Dabei ist bekanntlich

$$\breve{a}_{ik} = \frac{\mathsf{A}_{ki}}{\mathsf{A}}, \tag{7}$$

wenn A_{ki} die zum Element a_{ki} gehörige Unterdeterminante von A bedeutet. Die Matrix $\breve{A} = (\breve{a}_{ik})$ heißt die zur Matrix A *reziproke oder inverse Matrix* und ist dadurch ausgezeichnet, daß

$$\breve{A}A = A\breve{A} = E$$

ist, wobei E die „*Einheitsmatrix*"

$$E = (e_{ik}) = \begin{pmatrix} 1\,0 \ldots 0 \\ 0\,1 \ldots 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0\,0 \ldots 1 \end{pmatrix} \qquad (e_{ii} = 1;\ e_{ik} = 0 \text{ für } k \neq i) \tag{8}$$

mit der Determinante 1 und der Eigenschaft $ZE = EZ = Z$ für jede beliebige Matrix Z bezeichnet. Wir sind daher berechtigt, A^{-1} statt $\breve{A}$ zu schreiben; die Determinante von A^{-1} hat den Wert A^{-1}. Der zu A^{-1} gehörige Tensor heißt entsprechend der zu $\mathfrak{A}$ reziproke Tensor $\mathfrak{A}^{-1}$, der zu E gehörige Tensor der Einheitstensor $\mathfrak{E}$. Er bedeutet die identische Transformation $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$. Der Übergang von den Gleichungen (2) zu (6) kann aufgefaßt werden als vordere Multiplikation der Gleichung (2′) mit dem Tensor $\mathfrak{A}^{-1}$.

Zur übersichtlichen Zusammenfassung der linearen Gleichungen (2) können wir statt eines Tensors auch die mit ihm äquivalente, zur Matrix A gehörige *Bilinearform*[1]) benützen. Diese Bilinearform

$$A(u, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_i x_k \tag{9}$$

entsteht, indem wir die auf der linken Seite der Gleichungen (2) stehenden Linearformen in $x_1, \ldots, x_n$ mit unbestimmten Größen $u_1, \ldots, u_n$ multiplizieren und addieren; dadurch erhalten wir an Stelle des Gleichungssystems (2) die eine in den u identische Gleichung:

$$A(u, x) = E(u, y), \tag{10}$$

wobei $E(u, y) = \sum_{i=1}^{n} u_i y_i$ die Bilinearform der Einheitsmatrix oder die

[1]) Manche Autoren benutzen die Bezeichnung Tensor auch direkt für die Bilinearform.

bilineare Einheitsform ist. In Tensoren lautet die Gleichung (10):

$$((\mathfrak{A}\,\mathfrak{x})\,\mathfrak{u}) = (\mathfrak{y}\,\mathfrak{u}). \tag{10'}$$

Unter dem *Produkt zweier Bilinearformen* $A(u,x)$ und $B(u,x)$ mit den Matrizen A und B versteht man die Bilinearform $C(u,x)$ mit der Matrix $C = AB$; die Potenz $A^h(u,x)$ bezeichnet man auch als die h^{te} *iterierte Form*. Die *„reziproke Bilinearform"* $A^{-1}(u,x)$ mit der Matrix A^{-1} kann nach den Sätzen der Determinantentheorie in die Gestalt

$$A^{-1}(u,x) = -\frac{\mathsf{A}(u,x)}{\mathsf{A}} \tag{7'}$$

gebracht werden, wobei

$$\mathsf{A}(u,x) = \begin{vmatrix} 0 & u_1 \dots u_n \\ x_1 & a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots & \dots \\ x_n & a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = -\sum \mathsf{A}_{ik}\, x_i\, u_k$$

gesetzt ist.

Ein besonderes Interesse bieten die *symmetrischen linearen Transformationen*, welche durch die Bedingung $a_{ki} = a_{ik}$ gekennzeichnet sind. Zu ihrer Untersuchung genügt die Betrachtung der *quadratischen Form*

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, x_k\,, \qquad (a_{ki} = a_{ik})$$

welche aus der Bilinearform entsteht, wenn man $u_i = x_i$ annimmt. Denn man erhält aus einer quadratischen Form $A(x,x)$ eine symmetrische Bilinearform

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, u_i\, x_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial A(x,x)}{\partial x_i} = \frac{A(x+u,x+u) - A(x,x) - A(u,u)}{2}.$$

§ 2. Lineare Transformationen mit linearem Parameter.

Bei vielen Problemen tritt das Gleichungssystem der linearen Transformation in der folgenden, übrigens stets herstellbaren Form auf:

$$x_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\, x_k = y_i\,, \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{11}$$

wobei λ ein (auch komplexer Werte fähiger) Parameter ist. Die zugehörige Bilinearform lautet $E(u,x) - \lambda T(u,x)$, wobei $T(u,x)$ die Matrix (t_{ik}) besitzt. Die zu $E(u,x) - \lambda T(u,x)$ reziproke Form $T^*(u,x)$ muß der Gleichung $(E - \lambda T)T^* = E$ oder $T^* - \lambda TT^* = E$ genügen. Diese reziproke Form T^* läßt sich nach (7') schreiben als

$$T^*(u,x;\lambda) = -\frac{\Delta(u,x;\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{12}$$

wobei

$$\Delta(u, x; \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & \dots & u_n \\ x_1 & 1-\lambda t_{11} & \dots & -\lambda t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & -\lambda t_{n1} & \dots & 1-\lambda t_{nn} \end{vmatrix}$$

und

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda t_{11} & -\lambda t_{12} & \dots & -\lambda t_{1n} \\ -\lambda t_{21} & 1-\lambda t_{22} & \dots & -\lambda t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda t_{n1} & -\lambda t_{n2} & \dots & 1-\lambda t_{nn} \end{vmatrix}$$

ganze rationale Funktionen $(n-1)^{\text{ten}}$ bzw. n^{ten} Grades von λ sind. Die Nullstellen des Polynoms $\Delta(\lambda)$ heißen die *„Eigenwerte"* von $T(u, x)$.

Die Gleichungen (11) legen durch ihren besonderen Bau den Gedanken nahe, ihre Auflösung durch fortgesetzte Approximation zu versuchen, indem man in der Gleichung

$$x_i = y_i + \lambda \sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_k$$

für die Größen x_k wieder

$$y_k + \lambda \sum_{j=1}^{n} t_{kj} x_j$$

einsetzt und so fortfährt. Am übersichtlichsten gestaltet sich dieses Verfahren an Hand der Relation $T^* = E + \lambda T T^*$, aus welcher wir der Reihe nach erhalten:

$$\begin{aligned} T^* &= E + \lambda T T^* = E + \lambda T + \lambda^2 T^2 T^* \\ &= E + \lambda T + \lambda^2 T^2 + \lambda^3 T^3 T^* = \cdots . \end{aligned}$$

Falls das Verfahren konvergiert, gelangen wir so zu einem Ausdruck für T^* durch eine unendliche Reihe:

$$T^* = E + \lambda T + \lambda^2 T^2 + \lambda^3 T^3 + \cdots ,$$

welche — ihre Konvergenz vorausgesetzt — tatsächlich die reziproke Form von $E - \lambda T$ darstellt. Um dies einzusehen, brauchen wir die Reihe nur mit $E - \lambda T$ zu multiplizieren und dabei zu beachten, daß sich unsere symbolische Multiplikation ohne weiteres gliedweise ausführen läßt. Es ist unmittelbar klar, daß die Darstellung

$$T^* = (E - \lambda T)^{-1} = E + \lambda T + \lambda^2 T^2 + \cdots$$

formal vollständig mit der gewöhnlichen geometrischen Reihe übereinstimmen muß. Mit Hilfe der *„Resolvente"*

$$\mathsf{T}(u, y; \lambda) = \frac{T^*(u, y; \lambda) - E(u, y)}{\lambda}$$

von $T(u,y)$ können wir die Auflösung der ursprünglichen Gleichungen

$$E(u,x) - \lambda T(u,x) = E(u,y)$$

in der Gestalt

$$E(u,y) + \lambda \mathsf{T}(u,y;\lambda) = E(u,x),$$

schreiben. Diese ergibt sich unmittelbar, wenn wir in der Formel $T^*(E - \lambda T) = E$ für T^* den Ausdruck $\lambda \mathsf{T} + E$ eintragen. Dabei bekommt man für die Resolvente $\mathsf{T}(u,y;\lambda)$ die *„Neumannsche Reihe"*[1]:

$$\mathsf{T}(u,y;\lambda) = T + \lambda T^2 + \lambda^2 T^3 + \cdots. \tag{13}$$

Wenn wir statt mit den Formen mit den Tensoren rechnen, schreiben wir die Lösung entsprechend

$$(\mathfrak{E} - \lambda \mathfrak{T})^{-1} = \mathfrak{E} + \lambda \mathfrak{T} + \lambda^2 \mathfrak{T}^2 + \lambda^3 \mathfrak{T}^3 + \cdots.$$

Die Konvergenz der Neumannschen Reihe für gewisse λ ist leicht zu beweisen. Bedeutet M eine obere Schranke für die Absolutbeträge der Zahlen t_{ik}, so ergeben sich für die Absolutbeträge der Koeffizienten der Formen $T^2, T^3, \ldots, T^h$ sofort die Schranken $nM^2, n^2M^3, \ldots, n^{h-1}M^h$. Wir erhalten also in

$$(M + \lambda n M^2 + \lambda^2 n^2 M^3 + \cdots)(|u_1| + \cdots + |u_n|)(|y_1| + \cdots + |y_n|)$$

eine Majorante der Neumannnschen Reihe. Diese Majorante ist aber für $\lambda < \frac{1}{nM}$ sicher konvergent. Bei hinreichend kleinen Werten von λ konvergiert also auch die Neumannsche Reihe und stellt wirklich die Resolvente von $T(u,y)$ dar[2]).

Andererseits haben wir für die Form T^* den Ausdruck (12), der für alle reellen und komplexen Werte von λ mit Ausnahme der Nullstellen des Nenners gilt. Somit gibt uns die Gleichung

$$T + \lambda T^2 + \lambda^2 T^3 + \cdots = -\frac{\Delta(u,y;\lambda)}{\lambda \Delta(\lambda)} - \frac{1}{\lambda} E(u,y) \tag{14}$$

die analytische Fortsetzung der links stehenden, ihrer Natur nach keineswegs unmittelbar zu übersehenden und gewiß nicht für alle Werte von λ konvergierenden Neumannschen Reihe in die ganze λ-Ebene.

[1]) Die Bezeichnung dieser Reihe nach Carl Neumann wird zwar keineswegs dem historischen Sachverhalt gerecht, ebensowenig wie viele andere gebräuchliche Personalbezeichnungen. Wir wollen uns aber hier wie auch sonst gelegentlich dem eingebürgerten Sprachgebrauch anpassen.

[2]) Die Konvergenz der hier aufgestellten Majorante wird offenbar bei zunehmendem n immer schlechter. Schon jetzt sei aber darauf hingewiesen, daß durch Benutzung feinerer Hilfsmittel (vgl. § 6, 1) eine von n unabhängige Abschätzung der Konvergenzgrenze gefunden werden kann.

Entwickeln wir die Determinanten $\Delta(u, y; \lambda)$ und $\Delta(\lambda)$ entsprechend den Regeln der Determinantentheorie nach Potenzen von λ, so erhalten wir die Ausdrücke

$$\Delta(u, y; \lambda) = \Delta_1(u, y) - \lambda \Delta_2(u, y) + \lambda^2 \Delta_3(u, y) - \cdots + (-1)^n \lambda^{n-1} \Delta_n(u, y),$$

$$\Delta(\lambda) = 1 - \lambda \Delta_1 + \lambda^2 \Delta_2 - \cdots + (-1)^n \lambda^n \Delta_n,$$

wobei

$$\Delta_h(u, y) = \sum \begin{vmatrix} 0 & u_{p_1} & \cdots & u_{p_h} \\ y_{p_1} & t_{p_1 p_1} & \cdots & t_{p_1 p_h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{p_h} & t_{p_h p_1} & \cdots & t_{p_h p_h} \end{vmatrix},$$

und

$$\Delta_h = \sum \begin{vmatrix} t_{p_1 p_1} & t_{p_1 p_2} & \cdots & t_{p_1 p_h} \\ t_{p_2 p_1} & t_{p_2 p_2} & \cdots & t_{p_2 p_h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{p_h p_1} & t_{p_h p_2} & \cdots & t_{p_h p_h} \end{vmatrix},$$

gesetzt ist. Summiert wird hierbei über alle ganzzahligen $p_1, p_2, \ldots, p_h$ von 1 bis n mit $p_1 < p_2 < \cdots < p_h$.

§ 3. Die Hauptachsentransformation der quadratischen Formen.

1. Orthogonale Transformationen. Das Hauptachsenproblem. Ein besonders wichtiges Kapitel der Algebra ist die Theorie der orthogonalen Transformation einer quadratischen Form mit reellen Koeffizienten in eine Summe von Quadraten; in der Geometrie, der Mechanik, der Schwingungstheorie wird man häufig auf dieses *„Hauptachsenproblem"* geführt.

Gegeben ist eine quadratische Form

$$K(x, x) = \sum_{p,q=1}^{n} k_{pq} x_p x_q \tag{15}$$

mit der symmetrischen Matrix $K = (k_{pq})$ und der Determinante $\mathsf{K} = |k_{pq}|$. Gesucht ist eine lineare Transformation $\mathfrak{L}$ der Variablen x_p:

$$x_p = \sum_{q=1}^{n} l_{pq} y_q = L_p(y) \qquad (p = 1, \ldots, n) \tag{16}$$

mit der Matrix $L = (l_{pq})$ und der Determinante $\Lambda = |l_{pq}|$, welche erstens *„orthogonal"* ist, d. h. die *quadratische Einheitsform*

$$E(x, x) = \sum_{p=1}^{n} x_p^2$$

in sich überführt, also identisch in den y_p die Relation

$$E(x, x) = E(y, y) \tag{17}$$

erfüllt, und zweitens die Form $K(x, x)$ in die Gestalt

$$K(x, x) = \sum_{p=1}^{n} \varkappa_p y_p^2 \tag{18}$$

transformiert.

Dem Beweise für die Möglichkeit der Hauptachsentransformation schicken wir einige Bemerkungen voraus.

Wenden wir die zunächst beliebige Transformation $\mathfrak{L}$ an auf irgend eine quadratische Form $A(x, x)$ mit der symmetrischen Matrix $A = (a_{pq})$ und der Determinante $\mathsf{A} = |a_{pq}|$, so erhalten wir für den Koeffizienten b_{pq} der transformierten Form $B(y, y)$ den Wert

$$b_{pq} = \sum_{r,s=1}^{n} l_{rp}\, a_{rs}\, l_{sq}; \tag{19}$$

die Matrix $B = (b_{pq})$ hat also die Gestalt

$$B = L' A L, \tag{19'}$$

wobei L' die transponierte Matrix zu L bedeutet. Für die Determinante $\mathsf{B} = |b_{pq}|$ ergibt sich hieraus nach dem Determinantenmultiplikationssatz

$$\mathsf{B} = \Lambda^2 \mathsf{A} \tag{19''}$$

(die „Invarianteneigenschaft" der Determinante einer quadratischen Form).

Die Forderung (17) liefert durch Anwendung von (19') auf $A(x, x) = E(x, x)$, $B(y, y) = E(y, y)$ als notwendige und hinreichende Bedingung für die Orthogonalität der Transformation $\mathfrak{L}$ die Gleichungen

$$L' E L = L' L = L L' = E; \quad L' = L^{-1}; \tag{20}$$

es stimmt also die transponierte Matrix einer orthogonalen Transformation mit deren reziproker Matrix überein, so daß die Gleichungen (16) aufgelöst werden durch das gleichfalls orthogonale System

$$y_p = \sum_{q=1}^{n} l_{qp} x_q = L_p'(x). \tag{21}$$

Die aus (20) für die Matrizen A, B und L zweier beliebiger quadratischer Formen und einer orthogonalen Transformation folgende Relation $L'(AB)L = (L'AL)(L'BL)$ lehrt, daß man ein symbolisches Produkt quadratischer Formen durch orthogonale Transformation jedes einzelnen Faktors orthogonal transformieren kann. Hieraus ergibt sich insbesondere, daß die Orthogonaltransformierten zweier reziproker Formen wieder reziprok sind.

Durch Übergang zu den Determinanten ersieht man zunächst aus (20), daß $\Delta^2 = 1$, also die Determinante einer orthogonalen Transformation gleich $+1$ oder -1 ist; weiter aus (19′), daß die Determinante einer beliebigen quadratischen Form invariant gegen orthogonale Transformationen ist.

Ausführlich geschrieben ergeben die symbolischen Gleichungen (20) die *Orthogonalitätsrelationen:*

$$\sum_{\nu=1}^{n} l_{\nu p}^2 = 1, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} l_{\nu p} l_{\nu q} = 0 \qquad (q \neq p) \tag{22}$$

bzw.

$$\sum_{\nu=1}^{n} l_{p\nu}^2 = 1, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} l_{p\nu} l_{q\nu} = 0. \qquad (q \neq p) \tag{22′}$$

2. Die Durchführung der Hauptachsentransformation auf Grund eines Maximumprinzips. Jetzt wollen wir uns davon überzeugen, daß für eine vorgelegte quadratische Form $K(x,x)$ stets eine Hauptachsentransformation möglich ist. Dabei stützen wir uns auf die Tatsache, daß eine stetige Funktion von mehreren auf einen endlichen Bereich eingeschränkten Variablen in diesem Bereich oder auf seinem Rande einen größten Wert annimmt. (*Satz von Weierstraß.*)

Demgemäß gibt es einen Einheitsvektor $\mathfrak{l}_1$ mit den Komponenten $l_{11}, \ldots, l_{1n}$ derart, daß $K(x,x)$ für $x_1 = l_{11}, \ldots, x_n = l_{1n}$ den größten unter der Nebenbedingung

$$\sum_{p=1}^{n} x_p^2 = 1 \tag{23}$$

möglichen Wert $\varkappa_1$ erhält. Geometrisch wird durch den Vektor $\mathfrak{l}_1$ ein Punkt auf der „Einheitskugel" (23) bestimmt, der zugleich auf einer Fläche aus der Schar der Zentralflächen zweiten Grades $K(x,x) = \text{konst.}$ liegt, welche die Einheitskugel von außen berührt. Daß mindestens eine solche Fläche vorhanden sein muß, leuchtet anschaulich ohne weiteres ein.

Ferner existiert ein zu $\mathfrak{l}_1$ orthogonaler Einheitsvektor $\mathfrak{l}_2$ mit den Komponenten $l_{21}, \ldots, l_{2n}$ derart, daß $K(x,x)$ für $x_1 = l_{21}, \ldots, x_n = l_{2n}$ den größten Wert $\varkappa_2$ annimmt, der bei Hinzufügung der Bedingung

$$\sum_{p=1}^{n} l_{1p} x_p = 0 \tag{24}$$

zu (23) möglich ist. Auch hier ist einleuchtend, daß sich für das Schnittgebilde der Einheitskugel mit der zu $\mathfrak{l}_1$ orthogonalen „Ebene" (24) dasselbe Problem lösen läßt, das durch $\mathfrak{l}_1$ für die ganze Einheitskugel erledigt wird.

Weiter gibt es einen solchen zu $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ orthogonalen Einheitsvektor $\mathfrak{l}_3$ mit den Komponenten $x_1 = l_{31}, \ldots, x_n = l_{3n}$, daß $K(x,x)$

in seinem Endpunkt den größten unter den Nebenbedingungen (23), (24) und

$$\sum_{p=1}^{n} l_{2p} x_p = 0 \tag{24'}$$

möglichen Wert $\varkappa_2$ annimmt. Indem wir so fortfahren, gelangen wir zu einem System von n zueinander orthogonalen Vektoren $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_n$, die wir als *„Hauptachsenvektoren"* bezeichnen und deren Komponenten l_{pq} wegen (22) eine orthogonale Transformation

$$x_p = \sum_{q=1}^{n} l_{qp} y_q \qquad (p = 1, \ldots, n) \tag{25}$$

definieren, welche, wie wir behaupten, unsere Aufgabe löst.

Da die Gleichungen (25) aufgelöst werden durch

$$y_p = \sum_{q=1}^{n} l_{pq} x_q, \qquad (p = 1, \ldots, n) \tag{25'}$$

so ist die Gleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{l}_p$ gleichbedeutend mit $y_p = 1$, $y_q = 0$ für $q \neq p$. Insbesondere wird also das Maximum $\varkappa_1$ angenommen für $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $\ldots$, $y_n = 0$, so daß in der transformierten Form

$$C(y, y) = \sum_{p,q=1}^{n} c_{pq} y_p y_q = K(x, x)$$

der erste Koeffizient $c_{11} = \varkappa_1$ wird. Es ist dann die Form

$$H(y, y) = \sum_{p,q=1}^{n} h_{pq} y_p y_q = C(y, y) - \varkappa_1 (y_1^2 + \cdots + y_n^2)$$

positiver Werte nicht fähig. Denn zufolge der Maximumseigenschaft gilt dies jedenfalls unter der Bedingung

$$\sum_{p=1}^{n} x_p^2 = \sum_{p=1}^{n} y_p^2 = 1,$$

und diese Bedingung ist unwesentlich, da man die Ungleichung $H(y, y) \leqq 0$ mit einem beliebigen positiven Faktor multiplizieren kann. Käme nun y_1 noch in $H(y, y)$ vor, wäre etwa $h_{12} = h_{21}$ von Null verschieden, so würde sich für

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \varepsilon, \quad y_3 = \cdots = y_n = 0$$

der Wert

$$2 h_{12} \varepsilon + h_{22} \varepsilon^2 = \varepsilon (2 h_{12} + h_{22} \varepsilon)$$

von $H(y, y)$ ergeben, der durch geeignete Wahl von ε wieder positiv gemacht werden könnte.

Damit ist gezeigt, daß $K(x, x)$ nach der Transformation die Gestalt

$$C(y, y) = \varkappa_1 y_1^2 + C_1(y, y)$$

besitzt, worin $C_1(y, y)$ eine quadratische Form der $n - 1$ Variablen

$y_2, \ldots, y_n$ bedeutet. Bei der Nebenbedingung $y_1 = 0$ wird also die transformierte Form gleich $C_1(y, y)$, und wir können nunmehr genau so weiterschließen, daß $C_1(y, y)$ die Gestalt $\varkappa_2 y_2^2 + C_2(y, y)$ hat, wobei $C_2(y, y)$ nur noch von den $n - 2$ Variabeln $y_3, \ldots, y_n$ abhängt, usw.

Damit ist die Möglichkeit einer Hauptachsentransformation

$$\sum_{p,q=1}^{n} k_{pq} x_p x_q = \sum_{p=1}^{n} \varkappa_p y_p^2, \quad \sum_{p=1}^{n} x_p^2 = \sum_{p=1}^{n} y_p^2$$

vollständig dargetan. Man hätte übrigens beim Beweise ebensogut von einem entsprechenden Minimumproblem ausgehen, d. h. das Minimum von $K(x, x)$ bei der Nebenbedingung $E(x, x) = 1$ suchen können und wäre dann in umgekehrter Reihenfolge zu den Größen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ gelangt. Auch könnte man $K(x, x)$ konstant halten und die Maxima bzw. Minima von $E(x, x)$ suchen. Dann würde man die reziproken Größen zu den $\varkappa_i$ erhalten.

3. Charakteristische Zahlen und Eigenwerte. Wir wollen die Größen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ die *„charakteristischen Zahlen"*, ihre Reziproken $\lambda_1 = \frac{1}{\varkappa_1}, \ldots, \lambda_n = \frac{1}{\varkappa_n}$ die *„Eigenwerte"* der quadratischen Form nennen. Geometrisch bedeuten die Absolutbeträge der λ_p die Quadrate der Hauptachsenlängen der Zentralfläche zweiten Grades $K(x, x) = 1$. Ist mindestens eine der charakteristischen Zahlen gleich Null, so heißt die Form $K(x, x)$ *„ausgeartet"*; sie kann dann als Form von weniger als n Variablen dargestellt werden. Wegen der Invarianz der Determinante (vgl. S. 10) ist dies dann und nur dann der Fall, wenn $K = |k_{pq}| = \varkappa_1 \cdots \varkappa_n$ verschwindet. Sind alle Eigenwerte positiv bzw. alle negativ, so kann die Form, außer wenn alle Variablen verschwinden, nur positive bzw. negative Werte annehmen. Sie heißt dann *positiv- bzw. negativ-definit.*

Die Gleichung

$$(\varkappa - \varkappa_1)(\varkappa - \varkappa_2) \cdots (\varkappa - \varkappa_n) = 0$$

für die charakteristischen Zahlen kann man auch in der Gestalt

$$\begin{vmatrix} \varkappa - \varkappa_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varkappa - \varkappa_2 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & \varkappa - \varkappa_n \end{vmatrix} = 0$$

schreiben. Diese Determinante ist aber gleich der Determinante der quadratischen Form

$$\varkappa \sum_{p=1}^{n} y_p^2 - \sum_{p=1}^{n} \varkappa_p y_p^2,$$

die durch eine orthogonale Transformation aus der Form

$$\varkappa \sum_{p=1}^{n} x_p^2 - K(x, x)$$

hervorgeht. Daher gilt identisch in $\varkappa$

$$\begin{vmatrix} \varkappa - \varkappa_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varkappa - \varkappa_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varkappa - \varkappa_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varkappa - k_{11} & -k_{12} & \dots & -k_{1n} \\ -k_{21} & \varkappa - k_{22} & \dots & -k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -k_{n1} & -k_{n2} & \dots & \varkappa - k_{nn} \end{vmatrix};$$

die charakteristischen Zahlen sind also die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \varkappa & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} - \varkappa & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} - \varkappa \end{vmatrix} = 0 \tag{26}$$

für die Unbekannte $\varkappa$. Die früheren Betrachtungen zeigen, daß die Gleichung (26) stets lauter reelle Wurzeln hat, wenn k_{pq} beliebige reelle den Bedingungen $k_{pq} = k_{qp}$ genügende Größen sind[1]).

Ist für die Form $K(x, x)$ die Hauptachsentransformation

$$K(x, x) = \sum_{p=1}^{n} \varkappa_p y_p^2$$

gegeben, so kann man für die rechtsstehende quadratische Form unmittelbar die iterierten Formen bilden und erhält unter Beachtung des früher über die orthogonale Transformation eines Produktes Gesagten

$$K^2(x, x) = \sum_{p=1}^{n} \varkappa_p^2 y_p^2; \qquad K^3(x, x) = \sum_{p=1}^{n} \varkappa_p^3 y_p^2, \dots$$

Hieraus erkennt man, daß die h^{te} iterierte Form $K^h(x, x)$ die h^{ten} Potenzen der charakteristischen Zahlen bzw. der Eigenwerte von $K(x, x)$ als charakteristische Zahlen bzw. Eigenwerte besitzt; ferner sieht man, daß für gerades h die Form $K^h(x, x)$ positiv-definit wird.

Nehmen wir an, die charakteristischen Zahlen seien absolut genommen alle voneinander verschieden und nach abnehmendem Absolutbetrage geordnet; ferner sei

$$\varrho^n - c_1^{(h)} \varrho^{n-1} + c_2^{(h)} \varrho^{n-2} - \dots = 0$$

die Gleichung für die h^{ten} Potenzen der charakteristischen Zahlen. Dann ist

$$c_1^{(h)} = \varkappa_1^h + \dots + \varkappa_n^h, \quad c_2^{(h)} = \varkappa_1^h \varkappa_2^h + \dots + \varkappa_{n-1}^h \varkappa_n^h, \dots,$$

[1]) Wegen ihres Auftretens beim Problem der säkularen Planetenstörungen pflegt man die obige Gleichung als Säkulargleichung zu bezeichnen. Für einen direkten Beweis des obigen Realitätssatzes vgl. z. B. Kap. 3, § 4, 2.

und wir erhalten in bekannter Weise für die Eigenwerte die *„Graeffeschen Formeln"*

$$|\varkappa_1| = \lim_{h\to\infty}\left|\sqrt[h]{c_1^{(h)}}\right|, \qquad |\varkappa_2| = \lim_{h\to\infty}\left|\sqrt[h]{\frac{c_2^{(h)}}{c_1^{(h)}}}\right|, \ \ldots$$

und die *„Bernoullischen Formeln"*

$$\varkappa_1 = \lim_{h\to\infty}\frac{c_1^{(h)}}{c_1^{(h-1)}}, \qquad \varkappa_2 = \frac{1}{\varkappa_1}\lim_{h\to\infty}\frac{c_2^{(h)}}{c_2^{(h-1)}}, \ \ldots$$

Da wir die Koeffizienten $c_j^{(h)}$ aus den Größen k_{ij} in rationaler Weise berechnen können, haben wir damit eine Methode zur numerischen Bestimmung der charakteristischen Zahlen gewonnen.

4. Resolvente einer Form. Auch die Resolvente der quadratischen Form $K(x, x)$ läßt sich nach den Entwicklungen dieses Paragraphen leicht in eine übersichtliche Form bringen, wenn wir sie gemäß § 2 durch die symbolische Gleichung

$$\mathsf{K}(x, x; \lambda) = \frac{[E(x, x) - \lambda K(x, x)]^{-1} - E(x, x)}{\lambda}$$

definieren. Wir denken uns $K(x, x)$ durch Hauptachsentransformation in die Gestalt

$$K(x, x) = \sum_{p=1}^{n}\frac{y_p^2}{\lambda_p}$$

gebracht; die Resolvente von $\sum_{p=1}^{n}\frac{y_p^2}{\lambda_p}$ muß dann mit der von $K(x, x)$ übereinstimmen, da $[E(x, x) - \lambda K(x, x)]^{-1}$ durch die Transformation in

$$\left[E(y, y) - \lambda\sum_{p=1}^{n}\frac{y_p^2}{\lambda_p}\right]^{-1}$$

übergeht. Nun erhält man aber unmittelbar

$$\frac{1}{\lambda}\left[\left(\sum_{p=1}^{n}y_p^2 - \lambda\sum_{p=1}^{n}\frac{y_p^2}{\lambda_p}\right)^{-1} - E(y, y)\right] = \frac{1}{\lambda}\left[\left(\sum\frac{\lambda_p - \lambda}{\lambda_p}y_p^2\right)^{-1} - E(y, y)\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[\sum\frac{\lambda_p}{\lambda_p - \lambda}y_p^2 - E(y, y)\right] = \frac{1}{\lambda}\left[\sum\frac{\lambda_p}{\lambda_p - \lambda}y_p^2 - \sum y_p^2\right] = \sum_{p=1}^{n}\frac{y_p^2}{\lambda_p - \lambda}.$$

Transformieren wir hierin wieder auf die Variablen x_p, so erhalten wir mit der Bezeichnung (21) die Resolvente $\mathsf{K}(x, x; \lambda)$ von $K(x, x)$ in der Gestalt

(27) $$\mathsf{K}(x, x; \lambda) = \sum_{p=1}^{n}\frac{[L_p'(x)]^2}{\lambda_p - \lambda}$$

oder, wenn wir zur Bilinearform zurückgehen,

$$\mathsf{K}(u, x; \lambda) = \sum_{p=1}^{n} \frac{L'_p(u)\, L'_p(x)}{\lambda_p - \lambda}. \tag{27'}$$

Aus dieser Darstellung sehen wir übrigens, daß das Residuum der rationalen Funktion $\mathsf{K}(u, x; \lambda)$ von λ im Punkte $\lambda = \lambda_p$ gleich $-L'_p(u)\, L'_p(x)$ ist, wenn man $\lambda_p \neq \lambda_q$ für $p \neq q$ voraussetzt.

§ 4. Die Minimum-Maximum-Eigenschaft der Eigenwerte.

Oben haben wir die charakteristischen Zahlen durch eine Reihe von Maximumproblemen eingeführt, bei denen jedes die Lösung der vorangehenden voraussetzte. Jetzt zeigen wir, wie man, wenn die Eigenwerte nach abnehmender Größe geordnet sind, unmittelbar die h^{te} charakteristische Zahl als Lösung eines etwas anderen Problems kennzeichnen kann.

Es soll die Form

$$K(x, x) = \sum_{p,q=1}^{n} k_{pq} x_p x_q$$

zum Maximum gemacht werden, wenn außer der Forderung

$$\sum_{p=1}^{n} x_p^2 = 1 \tag{28}$$

noch $h - 1$ weitere Gleichungen

$$\sum_{p=1}^{n} \alpha_{\nu p} x_p = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, h-1;\ h \leqq n) \tag{29}$$

vorgeschrieben sind; sodann soll diesem Maximum, welches eine Funktion der Parameter $\alpha_{\nu p}$ ist, durch geeignete Wahl der $\alpha_{\nu p}$ ein möglichst kleiner Wert erteilt werden.

Die Hauptachsentransformation führt $K(x, x)$ über in

$$\sum_{p=1}^{n} \varkappa_p y_p^2 \qquad (\varkappa_1 \geqq \ldots \geqq \varkappa_n),$$

die Bedingung (28) in

$$\sum_{p=1}^{n} y_p^2 = 1 \tag{28'}$$

und die Gleichungen (29) in

$$\sum_{p=1}^{n} \beta_{\nu p} y_p = 0, \tag{29'}$$

wobei die $\beta_{\nu p}$ neue Parameter sind. Wählen wir

$$y_{h+1} = \cdots = y_n = 0,$$

so ergeben sich aus (29′) bei beliebigen $\beta_{\nu p}$ jedesmal $h-1$ homogene Gleichungen für die h Unbekannten $y_1, \ldots, y_h$, welche sicher durch ein mit (28′) verträgliches Wertsystem befriedigt werden können. Für diese Werte wird

$$K(x,x) = \varkappa_1 y_1^2 + \cdots + \varkappa_h y_h^2 \geqq \varkappa_h (y_1^2 + \cdots + y_n^2) = \varkappa_h .$$

Das zunächst gesuchte Maximum ist also für kein System der $\beta_{\nu p}$ kleiner als $\varkappa_h$. Es wird aber gerade gleich $\varkappa_h$, wenn für (29′) die Gleichungen

$$y_1 = \cdots = y_{h-1} = 0$$

genommen werden. So ergibt sich:

Die h^{te} charakteristische Zahl $\varkappa_h$ der quadratischen Form $K(x,x)$ ist der kleinste Wert, welchen das Maximum von $K(x,x)$ annehmen kann, wenn außer der Bedingung

$$\sum_{p=1}^{n} x_p^2 = 1$$

noch $h-1$ beliebige lineare homogene Gleichungen zwischen den x_p vorgeschrieben sind.

Auf Grund dieser *Minimum-Maximum-Eigenschaft der charakteristischen Zahlen* läßt sich besonders leicht übersehen, in welcher Weise sie sich verändern, wenn den Variablen j unabhängige *„Bindungen"*

$$\sum_{p=1}^{n} \gamma_{sp} x_p = 0 \qquad (s = 1, \ldots, j) \tag{30}$$

auferlegt werden, so daß sich $K(x,x)$ auf eine quadratische Form $\tilde{K}(x,x)$ von $n-j$ unabhängigen Variablen reduziert. Die h^{te} charakteristische Zahl $\tilde{\varkappa}_h$ entsteht durch dasselbe Minimum-Maximum-Problem wie $\varkappa_h$, wobei jedoch durch (30) die Gesamtheit der zur Konkurrenz zugelassenen Wertsysteme $x_1, \ldots, x_n$ verengert ist. Daher übertrifft das einzelne Maximum und somit auch die charakteristische Zahl bei $\tilde{K}(x,x)$ sicher nicht die entsprechende Größe bei $K(x,x)$.

Ferner ist $\varkappa_{j+h}$ das kleinste Maximum, das $K(x,x)$ besitzen kann, wenn außer (28) noch $h+j$ lineare homogene Bedingungen für die x_p vorgeschrieben sind, und daher sicher nicht größer als $\tilde{\varkappa}_h$, für welches j dieser Bedingungen durch die festen Gleichungen (30) gegeben sind.

Es gilt also $\varkappa_h \geqq \tilde{\varkappa}_h \geqq \varkappa_{h+j}$; oder in Worten:

Geht eine quadratische Form $K(x,x)$ von n Veränderlichen durch j lineare homogene Bindungen in eine quadratische Form $\tilde{K}(x,x)$ von $n-j$ Veränderlichen über, so sind die charakteristischen Zahlen $\tilde{\varkappa}_1, \ldots, \tilde{\varkappa}_{n-j}$ von $\tilde{K}(x,x)$ nicht größer als die entsprechenden Zahlen der Reihe $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-j}$ und nicht kleiner als die entsprechenden Zahlen der Reihe $\varkappa_{j+1}, \ldots, \varkappa_n$.

Ebenso ergibt sich: *Addiert man zu $K(x, x)$ eine nirgends negative Form, so sind die charakteristischen Zahlen der Summe nicht kleiner als die entsprechenden von $K(x, x)$.*

Anstatt ein Minimum-Maximum-Problem zur Kennzeichnung der charakteristischen Zahlen zu benutzen, können wir ebensogut ein *Maximum-Minimum-Problem* zum Ausgangspunkt nehmen. Man erhält dann wiederum die $\varkappa_h$, nur in umgekehrter Reihenfolge[1]).

§ 5. Anwendungen.

1. Orthogonale Vektorensysteme. Vollständigkeit. Lineare Darstellung eines Vektors durch ein Vektorensystem. Bereits in § 1 haben wir die Orthogonalität und lineare Abhängigkeit von Vektoren definiert. Jetzt wollen wir diese Begriffe unter Anwendung der im Paragraphen 2 und 3 erhaltenen Resultate genauer untersuchen.

Als *Koordinatenvektoren* $e_1, \ldots, e_n$ im n-dimensionalen Raume bezeichnen wir ein System von n orthogonalen Einheitsvektoren[2]). Ein solches System bilden z. B. die Vektoren, deren Komponenten der Reihe nach durch die Horizontalreihen des Schemas

$$\begin{array}{l} 1\,0\ldots 0 \\ 0\,1\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\,0\ldots 1 \end{array}$$

gegeben sind, ferner die in § 3 betrachteten Hauptachsenvektoren.

Die Vektoren $e_1, \ldots, e_n$ sind stets linear unabhängig; denn aus einer Beziehung $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ folgt durch Multiplikation mit e_h wegen $e_h^2 = 1$, $e_h e_k = 0$ $(k \neq h)$ sofort $\lambda_h = 0$. Während es also gewiß Systeme von n linear unabhängigen Vektoren gibt, muß zwischen $n+1$ Vektoren $u_1, \ldots, u_{n+1}$ stets mindestens eine lineare Gleichung mit nicht identisch verschwindenden Koeffizienten:

$$\mu_1 u_1 + \cdots + \mu_{n+1} u_{n+1} = 0$$

bestehen, da n homogene lineare Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n+1} u_{ik}\mu_i = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

für die $n+1$ Unbekannten $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$ stets eine nicht triviale Lösung haben.

---

[1]) Zur Erläuterung der hier entwickelten Betrachtungen diene folgende Bemerkung: Schneidet man ein dreiachsiges Ellipsoid mit einer Ebene durch seinen Mittelpunkt, so liegt die große Achse der Schnittellipse zwischen der großen und der mittleren Achse des Ellipsoids und die kleine Achse der Ellipse zwischen der mittleren und der kleinen Achse des Ellipsoids.

[2]) Vielfach werden übrigens als Koordinatenvektoren auch nicht orthogonale, linear unabhängige Vektoren benutzt.

Ist $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Vektor, so muß also mit nicht sämtlich verschwindenden Konstanten c eine Beziehung

$$c_0\,\mathfrak{x} - c_1\,\mathfrak{e}_1 - \cdots - c_n\,\mathfrak{e}_n = 0$$

gelten, wobei c_0 wegen der Unabhängigkeit der $\mathfrak{e}$ nicht Null sein kann, mithin gleich 1 genommen werden darf. Jeder Vektor $\mathfrak{x}$ läßt sich demnach durch ein System von Koordinatenvektoren in der Form

$$\mathfrak{x} = c_1\,\mathfrak{e}_1 + \cdots + c_n\,\mathfrak{e}_n \tag{31}$$

darstellen. Für das oben zuerst angeführte spezielle System der ursprünglichen Koordinatenvektoren ist dies trivial. Die Werte der Koeffizienten c_i, die „*Komponenten von* $\mathfrak{x}$ *in bezug auf das System der* $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$", finden wir aus (31) durch Multiplikation mit den $\mathfrak{e}_i$ zu

$$c_i = (\mathfrak{x}\,\mathfrak{e}_i)\,.$$

Aus einem beliebigen System von m linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m$ können wir durch den folgenden *Orthogonalisierungsprozeß* ein System von m orthogonalen Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_m$ gewinnen.

Wir setzen $\mathfrak{e}_1 = \frac{\mathfrak{v}_1}{|\mathfrak{v}_1|}$. Sodann wählen wir zwei nicht gleichzeitig verschwindende Zahlen c_1', c_2' so, daß $c_1'\,\mathfrak{e}_1 + c_2'\,\mathfrak{v}_2$ orthogonal zu $\mathfrak{e}_1$, also $c_1' + c_2'\,(\mathfrak{v}_2\,\mathfrak{e}_1) = 0$ wird. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$, also auch von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ ist der Vektor $c_1'\,\mathfrak{e}_1 + c_2'\,\mathfrak{v}_2$ von Null verschieden; durch Division mit seinem Betrag erhalten wir den zu $\mathfrak{e}_1$ orthogonalen Einheitsvektor $\mathfrak{e}_2$. Weiter bestimmen wir drei nicht zugleich verschwindende Zahlen c_1'', c_2'', c_3'' so, daß $c_1''\,\mathfrak{e}_1 + c_2''\,\mathfrak{e}_2 + c_3''\,\mathfrak{v}_3$ orthogonal zu $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$, also $c_1'' + c_3''\,(\mathfrak{v}_3\,\mathfrak{e}_1) = 0$ und $c_2'' + c_3''\,(\mathfrak{v}_3\,\mathfrak{e}_2) = 0$ wird. Der Vektor $c_1''\,\mathfrak{e}_1 + c_2''\,\mathfrak{e}_2 + c_3''\,\mathfrak{v}_3$ ist wieder von Null verschieden und kann also normiert werden, wodurch wir $\mathfrak{e}_3$ erhalten. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangen wir zu dem gewünschten Orthogonalsystem.

Für $m < n$ sprechen wir von einem unvollständigen, für $m = n$ von einem *vollständigen orthogonalen System*. Bezeichnen wir die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{x}$ in bezug auf das System $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_m$ wieder mit $c_1, \ldots, c_m$, so folgt aus der selbstverständlichen Beziehung

$$(\mathfrak{x} - c_1\,\mathfrak{e}_1 - \cdots - c_m\,\mathfrak{e}_m)^2 \geqq 0\,,$$

indem wir das Quadrat des Vektors auf der linken Seite erlaubterweise nach den Regeln der Algebra ausführen

$$\mathfrak{x}^2 - 2\,\mathfrak{x}\sum_{i=1}^{m} c_i\,\mathfrak{e}_i + \sum_{i=1}^{m} c_i^2 = \mathfrak{x}^2 - 2\sum c_i^2 + \sum c_i^2 \geqq 0$$

oder

$$\mathfrak{x}^2 \geqq \sum_{i=1}^{m} c_i^2\,, \tag{32}$$

wobei $m \leqq n$ und $c_i = (\mathfrak{x}\, \mathfrak{e}_i)$ ist. Für $m = n$ gilt das Gleichheitszeichen:

$$\mathfrak{x}^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i^2 . \tag{33}$$

Die letzten beiden Relationen, welche den vektoriellen Ausdruck des pythagoreischen Lehrsatzes enthalten und für $n \leqq 3$ unmittelbar anschauliche Bedeutung haben, pflegt man als die *Besselsche Ungleichung* und die *Vollständigkeitsrelation* zu bezeichnen. In der Tat besagt die Gleichung (33), wenn sie für jeden Vektor besteht, daß das gegebene Orthogonalsystem vollständig ist. Denn (33) könnte nicht für einen auf allen Vektoren $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_m$ orthogonalen Vektor gelten, und einen solchen müßte es geben, wenn $m < n$ wäre.

Man kann übrigens die Vollständigkeitsrelation in die allgemeinere Form

$$(\mathfrak{x}\, \mathfrak{x}') = \sum_{i=1}^{m} c_i c_i' \tag{33'}$$

setzen, die leicht aus der Orthogonalität der $\mathfrak{e}$ folgt.

Alle diese Beziehungen sind vorwiegend formaler Natur. Sie gewinnen eine tiefere Bedeutung dadurch, daß sie sich, ohne trivial zu sein, in formal ganz ähnlicher Weise bei tieferen Problemen der Analysis wiederfinden.

2. Lineare Unabhängigkeit und Gramsche Determinante. Die Frage der linearen Abhängigkeit von m gegebenen Vektoren $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m$ läßt sich formal sehr einfach folgendermaßen entscheiden, ohne daß man in der üblichen Weise den Rang der Matrix der Komponenten explizit festzustellen braucht. Wir betrachten die quadratische Form

$$G(x, x) = (x_1 \mathfrak{v}_1 + \cdots + x_m \mathfrak{v}_m)^2 = \sum_{i,k=1}^{m} (\mathfrak{v}_i \mathfrak{v}_k)\, x_i x_k .$$

Sicherlich ist $G(x, x) \geqq 0$, und die Vektoren $\mathfrak{v}_i$ sind dann und nur dann linear abhängig, wenn es ein Wertsystem der Variablen $x_1, \ldots, x_m$ gibt, welches der Bedingung

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = 1 \tag{34}$$

genügt und für welches $G(x, x) = 0$ wird. Damit also lineare Abhängigkeit besteht, muß das Minimum der Form $G(x, x)$ unter der Nebenbedingung (34) den Wert Null haben. Dieses Minimum ist aber die kleinste charakteristische Zahl der Form $G(x, x)$, d. h. die kleinste Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{v}_1^2 - \varkappa & (\mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_2) & \ldots & (\mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_m) \\ (\mathfrak{v}_2 \mathfrak{v}_1) & \mathfrak{v}_2^2 - \varkappa & \ldots & (\mathfrak{v}_2 \mathfrak{v}_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\mathfrak{v}_m \mathfrak{v}_1) & (\mathfrak{v}_m \mathfrak{v}_2) & \ldots & \mathfrak{v}_m^2 - \varkappa \end{vmatrix} = 0 . \tag{35}$$

Das bedeutet:

Notwendig und hinreichend für die lineare Abhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m$ *ist das Verschwinden der „Gramschen Determinante"*

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_1^2 & (\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2) & \ldots & (\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_m) \\ (\mathfrak{v}_2\mathfrak{v}_1) & \mathfrak{v}_2^2 & \ldots & (\mathfrak{v}_2\mathfrak{v}_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\mathfrak{v}_m\mathfrak{v}_1) & (\mathfrak{v}_m\mathfrak{v}_2) & \ldots & \mathfrak{v}_m^2 \end{vmatrix}. \tag{36}$$

Entwickelt man die Gleichung (35), welcher die sämtlich nicht negativen charakteristischen Zahlen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$ von $G(x, x)$ genügen, nach Potenzen von $\varkappa$, so ist das von $\varkappa$ freie Glied gleich Γ und der Koeffizient von $\varkappa^m$ ist gleich $(-1)^m$. Nach einem bekannten algebraischen Satz gilt also

$$\Gamma = \varkappa_1 \cdots \varkappa_m. \tag{36'}$$

Mithin ist die Gramsche Determinante eines beliebigen Systems von m Vektoren niemals negativ. Die Beziehung

$$\Gamma = |(\mathfrak{v}_i\mathfrak{v}_k)| \geqq 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, m), \tag{37}$$

in welcher das Gleichheitszeichen nur für linear abhängige Vektoren $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m$ auftritt, ist die Verallgemeinerung der Schwarzschen Ungleichung

$$\mathfrak{v}_1^2\mathfrak{v}_2^2 - (\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2)^2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_1^2 & (\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2) \\ (\mathfrak{v}_2\mathfrak{v}_1) & \mathfrak{v}_2^2 \end{vmatrix} \geqq 0.$$

Der Wert der Gramschen Determinante oder auch die kleinste charakteristische Zahl $\varkappa_m$ der Form $G(x, x)$ stellen ein *Maß für die lineare Unabhängigkeit der Vektoren* $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m$ dar. Je kleiner diese Zahl ist, desto „flacher" wird das von $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m$ aufgespannte m-dimensionale Gebilde; ist dieses *Unabhängigkeitsmaß* gleich Null, so klappt das Gebilde in ein höchstens $(m-1)$-dimensionales zusammen. Übrigens kann man der Gramschen Determinante auch sehr leicht eine geometrische Bedeutung beilegen. Sie ist gleich dem Quadrat des $m!$fachen Volumens des m-dimensionalen geometrischen Gebildes, das von den m Vektoren $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m$ aufgespannt wird — also z. B. für $m = 2$ gleich dem Quadrat des doppelten Flächeninhalts des aus $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ konstruierten Dreiecks.

Natürlich muß das Gramsche Kriterium für lineare Abhängigkeit mit dem gewöhnlichen äquivalent sein, welches besagt, daß die Vektoren dann und nur dann linear abhängig sind, wenn alle m-spaltigen aus dem rechteckigen Schema der Komponenten

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{m1} & v_{m2} & \ldots & v_{mn} \end{pmatrix} = \mathfrak{V}$$

herausgeschnittenen Determinanten verschwinden. In der Tat ist nach einem bekannten Satze der Determinantentheorie

$$\Gamma = \sum \begin{vmatrix} v_{1s_1} & v_{1s_2} & \dots & v_{1s_m} \\ v_{2s_1} & v_{2s_2} & \dots & v_{2s_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{ms_1} & v_{ms_2} & \dots & v_{ms_m} \end{vmatrix}^2, \tag{38}$$

wobei die Summation über alle ganzzahligen $s_1, s_2, \dots, s_m$ von 1 bis n mit $s_1 < s_2 < \dots < s_m$ läuft.

3. Lösung des zu einer Form gehörigen linearen Gleichungssystems. Zum Schluß wollen wir noch in Vektorbezeichnung die Lösung für das zur quadratischen Form

$$K(x, x) = \sum_{p,q=1}^{n} k_{pq} x_p x_q$$

gehörige Gleichungssystem

$$x_p - \lambda \sum_{q=1}^{n} k_{pq} x_q = y_p \qquad (p = 1, \dots, n) \tag{39}$$

oder mit Vektoren

$$\mathfrak{x} - \lambda \mathfrak{K} \mathfrak{x} = \mathfrak{y} \tag{39'}$$

aufschreiben.

Multiplizieren wir die letzte Gleichung mit dem zum Tensor $\mathfrak{L}$ der Hauptachsentransformation von $K(x, x)$ reziproken Tensor $\mathfrak{L}^{-1}$, so entsteht

$$\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{x} - \lambda (\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{K})\mathfrak{x} = \mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{y},$$

oder, wenn wir

$$\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{x} = \mathfrak{u}, \quad \mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{y} = \mathfrak{v}, \quad \mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{K}\mathfrak{L} = \mathfrak{Q}$$

setzen,

$$\mathfrak{u} - \lambda \mathfrak{Q} \mathfrak{u} = \mathfrak{v}. \tag{40}$$

Dabei ist die Matrix Q von $\mathfrak{Q}$ gegeben durch $Q = L^{-1}KL = L'KL$, sie hat also die Gestalt

$$Q = \begin{pmatrix} \varkappa_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varkappa_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varkappa_n \end{pmatrix}.$$

In Komponenten lautet demnach die Gleichung (40)

$$u_p - \lambda \varkappa_p u_p = v_p, \qquad (p = 1, \dots, n) \tag{40'}$$

so daß sie sich auflösen läßt durch die Beziehung

$$u_p = \frac{v_p}{1-\lambda \varkappa_p} = \frac{v_p}{1-\frac{\lambda}{\lambda_p}} = \frac{\lambda_p}{\lambda_p - \lambda} v_p . \tag{41}$$

Mit Hilfe des Tensors $\mathfrak{M}$ mit der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\lambda_n}{\lambda_n-\lambda} \end{pmatrix}$$

können wir (41) symbolisch in der Gestalt

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{M}\,\mathfrak{v}$$

schreiben, und durch Multiplikation mit $\mathfrak{L}$ erhält man als Lösung der Gleichungen (39), (39′) die Relation

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{L}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{L}'\mathfrak{y} = \mathfrak{G}\,\mathfrak{y} .$$

In der gleichbedeutenden Formel

$$\mathfrak{x} = \sum_{p=1}^{n} \frac{(\mathfrak{y}\,\mathfrak{l}_p)}{1-\frac{\lambda}{\lambda_p}} \mathfrak{l}_p \tag{42}$$

erscheint die Lösung nach den Hauptachsenvektoren $\mathfrak{l}_1, \dots, \mathfrak{l}_n$ der Form $K(x, x)$ entwickelt.

Der Hauptachsenvektor $\mathfrak{l}_p$ selbst gibt die normierte Lösung der homogenen Gleichungen

$$\mathfrak{x} - \lambda_p \mathfrak{K}\mathfrak{x} = 0$$

oder

$$u_q - \lambda_p \varkappa_q u_q = 0 \qquad (q = 1, \dots, n) .$$

Sind für $q \neq p$ alle $\varkappa_q$ von $\varkappa_p = \frac{1}{\lambda_p}$ verschieden, so gibt es nur eine normierte Lösung

$$u_p = 1 , \qquad u_q = 0 \qquad (q \neq p)$$

oder

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{l}_p ;$$

fallen mehrere charakteristische Zahlen zusammen, so sind die Hauptachsenvektoren nicht eindeutig bestimmt, wie auch aus den Entwicklungen von § 3 erhellt. — Die Hauptachsenvektoren von $\mathfrak{K}$ nennt man auch die ***Eigenvektoren*** von $\mathfrak{K}$.

Man könnte den Tensor $\mathfrak{G} = \mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{L}'$ den *Greenschen Tensor* der quadratischen Form $K(x,x)$ nennen, in Analogie zu der später im Kap.V zu betrachtenden *Greenschen Funktion.*

§ 6. Ergänzungen und Aufgaben zum ersten Kapitel.

1. Determinantenabschätzung von Hadamard. Für jede Determinante

$$A = |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

mit reellen Elementen a_{ik} gilt die Abschätzung

$$A^2 \leqq \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 . \tag{43}$$

Beweis: Wir lassen die Elemente a_{ik} variieren, wobei jedoch die Quadratsummen

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = c_i^2 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

festgehalten werden mögen. Ist $A_{\max}^2$ der größte Wert, den die Funktion A^2 der Elemente a_{ik} unter diesen n Bedingungen annehmen kann — daß ein solches Maximum für eine gewisse Determinante $A_{\max}$ angenommen werden muß, folgt unmittelbar aus dem auf S. 11 angeführten Satz von *Weierstraß* —, so müssen die Elemente von $A_{\max}$ in jeder Zeile den zugehörigen Unterdeterminanten proportional sein. Denn es ist für irgendein fest gewähltes h

$$A = a_{h1} A_{h1} + \cdots + a_{hn} A_{hn} ,$$

also nach der Schwarzschen Ungleichung auf S. 2

$$A^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} a_{hk}^2 \sum_{k=1}^{n} A_{hk}^2 = c_h^2 \sum_{k=1}^{n} A_{hk}^2 ;$$

sind dabei die a_{hk} nicht proportional den A_{hk}, so besitzt A^2 sicher nicht seinen Maximalwert, weil dann das Ungleichheitszeichen gilt, während durch Abänderung der n Größen a_{hk} $(k = 1, 2, \ldots, n)$ unter Festhaltung von c_h^2 und der A_{hk} das Determinantenquadrat der rechten Seite gleich gemacht werden kann.

Multiplizieren wir nun $A_{\max}$ nach dem Multiplikationssatz der Determinanten mit sich selbst, so erhalten wir, da die inneren Produkte

verschiedener Zeilen infolge der eben bewiesenen Proportionalität nach elementaren Determinantensätzen verschwinden

$$A_{\max}^2 = \prod_{i=1}^{n} c_i^2 .$$

Für die ursprüngliche Determinante A gilt daher sicher

$$A^2 \leqq \prod_{i=1}^{n} c_i^2 = \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 .$$

Geometrisch besagt die Hadamardsche Determinantenungleichung einfach, daß das Volumen eines aus n Vektoren im Raume von n Dimensionen mit gegebenen Normen konstruierten Parallelflachs am größten ist, wenn die Vektoren aufeinander senkrecht stehen.

Die Hadamardsche Abschätzung gilt auch für komplexe a_{ik}, wenn in ihr für A bzw. a_{ik} die absoluten Beträge eingesetzt werden.

2. Simultane Transformation zweier quadratischer Formen in kanonische Gestalt. Die Hauptachsentransformation ist ein Sonderfall des allgemeineren, auf sie zurückführbaren, aber ebenso einfach auch direkt zu behandelnden Problems, zwei gegebene quadratische Formen

$$K(x,x) = \sum_{p,q=1}^{n} k_{pq} x_p x_q , \qquad H(x,x) = \sum_{p,q=1}^{n} h_{pq} x_p x_q ,$$

von denen die eine, etwa $H(x,x)$, positiv-definit ist, durch eine lineare Transformation

$$y_p = \sum_{q=1}^{n} l_{pq} x_q \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

gleichzeitig in reinquadratische Ausdrücke

$$K(x,x) = \sum_{p=1}^{n} \varkappa_p y_p^2 , \qquad H(x,x) = \sum_{p=1}^{n} \eta_p y_p^2$$

zu transformieren[1]). Dabei können noch die Koeffizienten η_p der positiven Form H_p gleich $+1$ gemacht werden. Die Quotienten $\frac{\varkappa_p}{\eta_p} = \varrho_p$ nennen wir die charakteristischen Zahlen, die Zahlen $\frac{1}{\varrho_p} = \lambda_p$ die Eigenwerte der Form $K(x,x)$ in bezug auf $H(x,x)$.

Man führe die Transformationstheorie direkt durch und beweise insbesondere die folgende Minimum-Maximum-Eigenschaft der charakteristischen Zahlen:

[1]) Die wesentlich schwierigere Untersuchung analoger Fragen, wenn von keiner der beiden Formen vorausgesetzt wird, daß sie definit ist, bildet den Gegenstand der Elementarteilertheorie, über die sich der Leser etwa nach der ausgezeichneten Darstellung bei *M. Böcher*, Einleitung in die höhere Algebra, orientieren kann. Eine entsprechende Behandlung der Theorie der Integralgleichungen findet sich bei *Landsberg, G.*: Theorie der Elementarteiler linearer Integralgleichungen. Math. Ann. Bd. 69, S. 227—265. 1910.

Für $\varrho_1 \geqq \ldots \geqq \varrho_n$ *ist* ϱ_h *der kleinste Wert, den das Maximum von* $\frac{K(x,x)}{H(x,x)}$ *unter den Nebenbedingungen*

$$\sum_{p=1}^{n} \alpha_{\nu p} x_p = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, h-1)$$

annehmen kann, wenn dieses Maximum als Funktion der Parameter $\alpha_{\nu p}$ *aufgefaßt wird.*

Zur Aufstellung der gesuchten simultanen Transformation kann man zunächst das Maximum von $\frac{K(x,x)}{H(x,x)}$ unter der Nebenbedingung $H(x,x) = 1$ aufsuchen, das für $x_p = l_{1p}$ $(p = 1, \ldots, n)$ angenommen werden möge. Sodann fügt man als weitere Nebenbedingung

$$\sum_{p,q=1}^{n} h_{pq} l_{1p} x_q = 0$$

hinzu usw. Die charakteristischen Zahlen ϱ_p ergeben sich als Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \varrho h_{11} & k_{12} - \varrho h_{12} & \ldots & k_{1n} - \varrho h_{1n} \\ k_{21} - \varrho h_{21} & k_{22} - \varrho h_{22} & \ldots & k_{2n} - \varrho h_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ k_{n1} - \varrho h_{n1} & k_{n2} - \varrho h_{n2} & \ldots & k_{nn} - \varrho h_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung kann man auch als Bedingung für die Lösbarkeit des homogenen Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^{n} (k_{ij} - \varrho h_{ij}) x_j = 0$$

erhalten. Die Lösungssysteme x_j selbst für die einzelnen charakteristischen Zahlen ergeben nach geeigneter Normierung die Komponenten der „Eigenvektoren", also die Koeffizienten der gesuchten simultanen Transformation.

3. Trägheitsgesetz der quadratischen Formen. Läßt man die Forderung der Orthogonalität fallen, so kann man, wie aus der vorhergehenden Nummer ersichtlich, eine quadratische Form $K(x,x)$ auf mannigfache Weise in eine Quadratsumme $\sum_{p=1}^{n} \varrho_p y_p^2$ transformieren. Es gilt jedoch der Satz, *daß die Anzahl der positiven und negativen dabei auftretenden Koeffizienten unveränderlich ist* („*Trägheitsgesetz der quadratischen Formen*"), wenn wir uns, wie bisher stets, auf reelle Transformationen beschränken.

Beweis: Die Koeffizienten können gleich $+1$ oder -1 gemacht werden. Wäre nun die quadratische Form $K(x,x)$ durch zwei verschiedene reelle Transformationen in $y_1^2 + \cdots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \cdots - y_n^2$

und in $z_1^2 + \cdots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \cdots - z_n^2$ mit $r < s$ übergeführt, so würde wegen

$$y_1^2 + \cdots + y_r^2 + z_{s+1}^2 + \cdots + z_n^2 = y_{r+1}^2 + \cdots + y_n^2 + z_1^2 + \cdots + z_s^2$$

aus $y_1 = \cdots = y_r = z_{s+1} = \cdots = z_n = 0$ auch das Verschwinden der übrigen y_j folgen. Da aber dieses Gleichungssystem weniger als n Gleichungen enthält, ist es sicher durch einen von Null verschiedenen Vektor $\mathfrak{x}$ zu befriedigen; ein solcher kann aber nicht die n homogenen Gleichungen $\mathfrak{y} = 0$ mit nicht verschwindender Determinante erfüllen.

4. Bilinearformen und quadratische Formen von unendlich vielen Variablen. Unsere Theorien lassen sich auch aufrecht erhalten, wenn man die Anzahl der auftretenden Variablen über alle Grenzen wachsen läßt und dabei erstens über die Koeffizienten der Bilinearformen oder quadratischen Formen z. B. die Voraussetzung macht, daß die Summe ihrer Quadrate konvergiert, und zweitens die Konvergenz auch von der Quadratsumme der auftretenden Variablen voraussetzt. Diese Theorie der Formen von unendlich vielen Variablen, die von *Hilbert* entwickelt worden ist, läßt sich dann direkt auf zahlreiche Probleme der Analysis anwenden. Wir werden jedoch rascher zum Ziele gelangen, wenn wir dort in einer mehr unmittelbaren, der direkten algebraischen Vektor- und Tensorrechnung entsprechenden Weise vorgehen.

5. Unendlich kleine lineare Transformationen. Als unendlich kleine lineare Transformation bezeichnen wir eine solche mit der Matrix

$$A = E + (\varepsilon \alpha_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon\alpha_{11} & \varepsilon\alpha_{12} \cdots & \varepsilon\alpha_{1n} \\ \varepsilon\alpha_{21} & 1 + \varepsilon\alpha_{22} \cdots & \varepsilon\alpha_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \varepsilon\alpha_{n1} & \varepsilon\alpha_{n2} \cdots & 1 + \varepsilon\alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

wobei ε eine infinitesimale, d. h. solche Größe bezeichnet, deren Quadrat und höhere Potenzen vernachlässigt werden dürfen. Das Produkt zweier solcher unendlich kleiner Transformationen mit den Matrizen $A = E + (\varepsilon\alpha_{ik}), B = E + (\varepsilon\beta_{ik})$ hat die Matrix $C = AB = E + (\varepsilon\alpha_{ik} + \varepsilon\beta_{ik})$. Daraus folgt insbesondere der Satz:

Unendlich kleine lineare Transformationen sind vertauschbar.

Ferner erkennt man:

Die zur Matrix $A = E + (\varepsilon\alpha_{ik})$ reziproke Matrix ist $A^{-1} = E - (\varepsilon\alpha_{ik})$.

Soll die unendlich kleine Transformation orthogonal sein, so ergibt sich aus $A'A = E$, wobei A' die transponierte Matrix ist, die Relation $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0$; d. h. es gilt weiter:

Notwendig und hinreichend für die Orthogonalität einer unendlich kleinen Transformation ist die Bedingung, daß ihre um E verminderte Matrix schiefsymmetrisch ist.

Eine allgemeine unendlich kleine Transformation $C = E + (\varepsilon\gamma_{ik})$ kann mit Hilfe der Größen

$$\alpha_{ik} = \tfrac{1}{2}(\gamma_{ik} - \gamma_{ki})$$
$$\beta_{ik} = \tfrac{1}{2}(\gamma_{ik} + \gamma_{ki})$$

dargestellt werden als Produkt einer orthogonalen Transformation mit der Matrix $A = E + (\varepsilon\alpha_{ik})$ und einer symmetrischen mit der Matrix $B = E + (\varepsilon\beta_{ik})$.

Eine symmetrische, nicht notwendig unendlich kleine Transformation $\mathfrak{y} = \mathfrak{S}\mathfrak{x}$ mit der Matrix $S = (s_{ik})$ bedeutet geometrisch eine Dehnung in n zueinander senkrechten Richtungen. Denn durch Multiplikation von $\mathfrak{y} = \mathfrak{S}\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{L}^{-1}$, wo $\mathfrak{L}$ der Tensor der Hauptachsentransformation der quadratischen Form $S(x, x)$ ist, entsteht, wenn wir

$$\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{x} = \mathfrak{u}, \quad \mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{y} = \mathfrak{v}, \quad S(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i u_i^2$$

setzen,

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{L}\mathfrak{u}$$

und

$$v_i = \varkappa_i u_i,$$

was die analytische Darstellung einer auf die Hauptdilatationsachsen bezogenen Dehnung ist. Das Verhältnis der Volumzunahme zum Ausgangsvolumen, die „räumliche Dilatation", wird offenbar durch die Differenz $\varkappa_1 \cdots \varkappa_n - 1$ gegeben, wofür wir ähnlich wie bei den Gleichungen (36), (36′) von § 5 auch $|s_{ik}| - 1$ schreiben können. Ist insbesondere die Transformation unendlich klein, also $(s_{ik}) = E + (\varepsilon\beta_{ik})$, so wird

$$\varkappa_1 \cdots \varkappa_n - 1 = \varepsilon(\beta_{11} + \cdots + \beta_{nn}).$$

Da eine orthogonale Transformation eine Drehung bedeutet, können wir zusammenfassend sagen:

Eine unendlich kleine Transformation mit der Matrix $E + (\varepsilon\gamma_{ik})$ *kann als Produkt einer Drehung und einer Dehnung dargestellt werden; die räumliche Dilatation beträgt* $\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ii}$.

Diese Ergebnisse sind wichtig z. B. für die Elastizitätstheorie.

6. Variierte Systeme. Für die Theorie der kleinen Schwingungen ist es wichtig, festzustellen, wie sich die Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Form $K(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$ ändern, wenn man sowohl die Einheitsform $E(x, x)$ als auch $K(x, x)$ unendlich wenig variiert, d. h. die Formen $E(x, x) + \varepsilon A(x, x)$ bzw. $K(x, x) + \varepsilon B(x, x)$

gleichzeitig in die kanonische Gestalt transformiert (vgl. S. 25), wobei

$$A(x, x) = \sum_1^n \alpha_{ik} x_i x_k, \qquad B(x, x) = \sum_1^n \beta_{ik} x_i x_k$$

und ε eine infinitesimale Größe ist. Setzen wir

$$K(x, x) + \varepsilon B(x, x) = \sum_1^n b'_{ik} x_i x_k, \qquad E(x, x) + \varepsilon A(x, x) = \sum_1^n a'_{ik} x_i x_k,$$

so lauten die Gleichungen zur Bestimmung der Komponenten der Eigenvektoren

$$\sum_{k=1}^n (b'_{ik} - \varrho' a'_{ik}) x'_k = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

wobei sich ϱ' aus der entsprechenden Determinantengleichung bestimmen läßt und n reeller Werte fähig ist. Bezeichnet man die charakteristischen Zahlen von $K(x, x)$ unter der Annahme, daß sie alle voneinander verschieden sind, mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$, die entsprechenden Werte des variierten Systems mit $\varrho'_1, \varrho'_2, \ldots, \varrho'_n$, so kann man die Ausgangsform $K(x, x)$ als eine Summe von Quadraten annehmen

$$K(x, x) = \varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2 + \cdots + \varrho_n x_n^2.$$

Dann lauten die Komponenten des zu ϱ_h gehörenden Eigenvektors $\mathfrak{x}_k$ wie folgt: $x_{hk} = 0$ $(k \neq h)$, $x_{kk} = 1$, und die Komponenten x'_{hk} der variierten Eigenvektoren $\mathfrak{x}'_k$ weichen von den entsprechenden nicht variierten Komponenten um infinitesimale Größen von erster oder höherer Ordnung in ε ab. Betrachten wir von den Gleichungen

$$\sum_{k=1}^n (b'_{ik} - \varrho'_h a'_{ik}) x'_{hk} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

zunächst die Gleichung für $i = h$, so sind in ihr alle Summanden, bis auf denjenigen mit $k = h$, unendlich klein von der zweiten Ordnung, da sowohl die x'_{hk} als auch b'_{ik} und a'_{ik} unendlich klein von der ersten Ordnung sind. Daher muß auch $(b'_{hh} - \varrho'_h a'_{hh}) x'_{hh}$ unendlich klein von der zweiten Ordnung sein, und somit gilt dasselbe auch für $b'_{hh} - \varrho'_h a'_{hh} = \varrho_h + \varepsilon \beta_{hh} - \varrho'_h (1 + \varepsilon \alpha_{hh})$. Daher folgt für ϱ'_h bis auf Größen zweiter Ordnung in ε

$$\varrho'_h = \frac{\varrho_h + \varepsilon \beta_{hh}}{1 + \varepsilon \alpha_{hh}} = \varrho_h - \varepsilon \varrho_h \alpha_{hh} + \varepsilon \beta_{hh}.$$

Die Betrachtung der Gleichungen mit $i \neq h$, in denen alle Glieder bis auf zwei von selbst unendlich klein von der zweiten Ordnung sind, liefert wegen $\sum x_i^2 = 1$

$$x'_{hh} = 1, \quad x'_{hi} = -\varepsilon \frac{\alpha_{ih} \varrho_h - \beta_{ih}}{\varrho_h - \varrho_i}$$

bis auf unendlich kleine Größen zweiter Ordnung in ε.

Unter Benutzung dieser Werte für die Komponenten der Eigenvektoren lassen sich die Eigenwerte sehr leicht bis auf Größen dritter Ordnung in ε berechnen. Man betrachte wieder die Gleichung für die Komponenten des h^{ten} Eigenvektors, die sich für $i = h$ ergibt:

$$\sum_{k=1}^{n} (b'_{hk} - \varrho'_h a'_{hk})\, x'_{hk} = 0.$$

Vernachlässigt man links die Größen dritter Ordnung in ε und sondert das Glied mit $h = k$ ab, so entsteht

$$(b'_{hh} - \varrho'_h a'_{hh}) = \sum_{k}{}' \varepsilon\, (b'_{hk} - \varrho'_h a'_{hk}) \frac{\alpha_{kh}\varrho_k - \beta_{kh}}{\varrho_h - \varrho_k} = -\varepsilon^2 \sum_{k}{}' \frac{(\alpha_{kh}\varrho_k - \beta_{kh})^2}{\varrho_h - \varrho_k};$$

für ϱ'_h folgt dann

$$\varrho'_h = \varrho_h + \varepsilon(\varrho_h \alpha_{hh} + \beta_{hh}) + \varepsilon^2 \alpha_{hh}(\beta_{hh} - \varrho_h \alpha_{hh}) + \varepsilon^2 \sum_{k}{}' \frac{(\alpha_{kh}\varrho_k - \beta_{kh})^2}{\varrho_h - \varrho_k}.$$

Dabei bedeutet der Strich am Summenzeichen, daß über alle k von 1 bis n mit Ausnahme des Wertes $k = h$ zu summieren ist.

7. Die Auferlegung einer Bindung

$$\gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_n x_n = 0$$

und die dadurch zustande kommende Verringerung der Variablenzahl der quadratischen Form $K(x, x) = \sum_{p,q=1}^{n} k_{pq} x_p x_q$ kann man sich durch einen kontinuierlichen Prozeß erzeugt denken, indem man die quadratische Form $K(x, x) + t(\gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_n x_n)^2$ betrachtet, wobei t ein positiver Parameter ist. Wächst t über alle Grenzen, so nimmt auch jede charakteristische Zahl monoton zu. Insbesondere wächst die größte charakteristische Zahl über alle Grenzen, während die anderen in die charakteristischen Zahlen der aus $K(x, x)$ durch Elimination einer Veränderlichen vermöge der Relation $\gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_n x_n = 0$ entstehenden quadratischen Form übergehen.

8. Elementarteiler eines Tensors oder einer Bilinearform. Es sei $\mathfrak{A}$ ein Tensor, $A = (a_{ik})$ die zugehörige Matrix. Dann zerfällt das Polynom

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

nach gewissen, hier nicht näher anzugebenden Regeln in ein Produkt von „Elementarteilern"

$$(\lambda - r_1)^{e_1},\ (\lambda - r_2)^{e_2},\ \ldots,\ (\lambda - r_h)^{e_h},$$

wobei unter den Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_h$ auch gleiche vorkommen können. Zu jedem Elementarteiler $(\lambda - r_\nu)^{e_\nu}$ gehört ein System von e_ν Vektoren $\mathfrak{f}_1^{(\nu)}, \mathfrak{f}_2^{(\nu)}, \ldots, \mathfrak{f}_{e_\nu}^{(\nu)}$ derart, daß die Gleichungen gelten

$$\mathfrak{A}\mathfrak{f}_1^{(\nu)} = r_\nu \mathfrak{f}_1^{(\nu)}, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{f}_2^{(\nu)} = r_\nu \mathfrak{f}_2^{(\nu)} + \mathfrak{f}_1^{(\nu)}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{f}_{e_\nu}^{(\nu)} = r_\nu \mathfrak{f}_{e_\nu}^{(\nu)} + \mathfrak{f}_{e_\nu - 1}^{(\nu)}.$$

Dabei sind die n Vektoren

$$\mathfrak{f}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{f}_{e_1}^{(1)}; \quad \mathfrak{f}_1^{(2)}, \ldots, \mathfrak{f}_{e_2}^{(2)}; \quad \ldots; \quad \mathfrak{f}_1^{(h)}, \ldots, \mathfrak{f}_{e_h}^{(h)}$$

linear unabhängig. Führt man sie als neue Variable $x_1^{(1)}, \ldots, x_{e_h}^{(h)}$ ein, so verwandelt sich A in die folgende Matrix

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & A_h \end{pmatrix},$$

in der $A_1, A_2, \ldots, A_h$ selbst Matrizen sind, und zwar hat A_ν die Gestalt einer Matrix von der Ordnung e_ν:

$$A_\nu = \begin{pmatrix} r_\nu & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & r_\nu & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_\nu & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & r_\nu \end{pmatrix}.$$

Literatur zum ersten Kapitel.

Lehrbücher:

Kowalewski, G.: Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig 1909.

Bôcher, M.: Einführung in die höhere Algebra. Leipzig und Berlin 1910.

Monographien und Abhandlungen:

Hilbert, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, insbesondere 1. und 4. Abschnitt. Leipzig und Berlin 1912.

Fischer, E.: Über quadratische Formen mit reellen Koeffizienten. Monatsh. f. Math. u. Phys. Bd. 16, S. 234—249. 1905. Dort ist die Maximum-Minimumeigenschaft der Eigenwerte wohl zum erstenmal ausgesprochen.

Courant, R.: Zur Theorie der kleinen Schwingungen. Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 2, S. 278—285. 1922.

Zweites Kapitel.

Das Problem der Reihenentwicklung willkürlicher Funktionen.

Viele der im vorigen Kapitel behandelten Zusammenhänge finden eine weitgehende Analogie, wenn man statt der Vektoren im n-dimensionalen Raume Funktionen von einer oder mehreren Veränderlichen betrachtet, die in einem vorgegebenen *Grundgebiet* G definiert sind. So kann man zu der Tatsache, daß sich im Raume von n Dimensionen jeder Vektor linear durch n unabhängige, sonst aber beliebig gewählte Vektoren ausdrücken läßt, das Problem in Parallele setzen, eine mehr oder weniger willkürlich angenommene Funktion im Grundgebiete G als lineare Kombination aus vorgegebenen Funktionen darzustellen. (Die Menge dieser vorgegebenen Funktionen muß, wie sich im folgenden als selbstverständlich erweisen wird, unendlich sein). Wir sprechen dann von dem *Problem der Reihenentwicklung der willkürlich angenommenen Funktion nach dem vorgeschriebenen Funktionensystem.* Im vorliegenden Kapitel soll diese bei den Aufgaben der mathematischen Physik in der mannigfachsten Form auftretende Fragestellung unter allgemeinen Gesichtspunkten behandelt werden.

Wir beschränken uns dabei grundsätzlich auf *stückweise stetige Funktionen*, d. h. solche Funktionen, für welche es eine Zerlegung von G in endlich viele Teilgebiete gibt, derart, daß die Funktion im Inneren eines jeden von ihnen stetig ist und bei Annäherung an den Rand jedes Teilgebietes von innen her sich bestimmten, endlichen Randwerten nähert. An Sprungstellen werden wir, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt ist, als Funktionswert das arithmetische Mittel aus den beiderseitigen Randwerten betrachten. Der bequemeren Schreibweise wegen setzen wir zunächst voraus, daß wir es mit Funktionen nur einer Veränderlichen x zu tun haben, deren Grundgebiet G eine im Endlichen gelegenen Strecke der x-Achse ist. Handelt es sich um Funktionen von mehreren, etwa von zwei Variablen x und y, so wollen wir vom Grundgebiet G voraussetzen, daß es von endlich vielen Kurvenbögen mit stetig sich drehender Tangente begrenzt ist. Wenn wir die Randpunkte zum Grundgebiet hinzurechnen wollen, so werden wir von einem „abgeschlossenen Gebiet" sprechen, falls nicht schon durch den Zusammenhang ein Mißverständnis ausgeschlossen ist.

Ferner werden wir öfter von den betrachteten Funktionen voraussetzen müssen, daß sie *stückweise glatt* sind, d. h. stückweise stetig sind und stückweise stetige erste Ableitungen haben.

§ 1. Orthogonale Funktionensysteme.

1. Definitionen. Unter dem *inneren Produkt* (f, g) *oder auch* (fg) *zweier Funktionen* $f(x)$ *und* $g(x)$ wollen wir das über das Grundgebiet genommene Integral[1])

$$(f, g) = \int f g \, dx \tag{1}$$

verstehen. Es genügt der *Schwarzschen Ungleichung*

$$(f, g)^2 \leqq (f, f)\,(g, g), \tag{2}$$

die ebenso wie bei Vektoren aus dem positiv-definiten Charakter der quadratischen Funktion $\int (\lambda f + g)^2 \, dx$ der Veränderlichen λ folgt; das Gleichheitszeichen tritt dann und nur dann ein, wenn f und g proportional sind. Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, für welche das innere Produkt verschwindet, also $(f, g) = 0$ ist, sollen *orthogonal* heißen. Das innere Produkt einer Funktion $f(x)$ mit sich selbst bezeichnen wir auch als *Norm* Nf dieser Funktion:

$$Nf = (f, f) = \int f^2 \, dx; \tag{3}$$

eine Funktion mit der Norm 1 nennen wir *normiert*.

Ein Beispiel eines normierten orthogonalen Funktionensystems für das Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ oder allgemeiner für jedes Intervall von der Länge 2π bilden die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots ; \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots,$$

wie man sofort aus den Integralformeln

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos \mu x \cos \nu x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos \mu x \sin \nu x \, dx \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin \mu x \sin \nu x \, dx = 0, & (\mu, \nu = 0, 1, \ldots; \mu \neq \nu) \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos \nu x \sin \nu x \, dx = 0, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 \nu x \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 \nu x \, dx = \pi, & (\nu = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

[1]) Die Integrationsgrenzen lassen wir in Zukunft fort, wenn ein Mißverständnis ausgeschlossen ist.

den *„Orthogonalitätsrelationen"* für das Funktionensystem $\cos \nu x$, $\sin \nu x$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$, entnimmt; ihre prägnante Zusammenfassung finden diese unter Benutzung komplexer Größen in der Beziehung

$$(4') \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\mu-\nu)x}\,dx = e_{\mu\nu} \qquad (e_{\nu\nu} = 1,\ e_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu).$$

Als *linear abhängig* bezeichnen wir r Funktionen $f_1, \ldots, f_r$, wenn sie identisch in x einer homogenen linearen Relation $\sum_{i=1}^{r} c_i f_i = 0$ mit konstanten, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten c_i $(i = 1, \ldots, r)$ genügen. Andernfalls nennen wir sie *linear unabhängig*.

2. Orthogonalisierung von Funktionen. Aus einem vorgelegten unendlichen System von Funktionen $v_1, v_2, \ldots$, von denen für jedes beliebige r je r linear unabhängig sind, kann man immer durch einen „Orthogonalisierungsprozeß" ein normiertes orthogonales Funktionensystem $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ gewinnen, indem man φ_n als geeignete lineare Kombination von $v_1, \ldots, v_n$ wählt. Man setzt zunächst $\varphi_1 = \frac{v_1}{\sqrt{N v_1}}$. Sodann bestimmt man irgend zwei nicht gleichzeitig verschwindende Zahlen c_1 und c_2 derart, daß die Funktion $\varphi_2' = c_1\varphi_1 + c_2 v_2$ orthogonal auf φ_1 steht, daß also die Gleichung $c_1 + c_2(\varphi_1 v_2) = 0$ erfüllt ist. Die Funktion φ_2' kann wegen der linearen Unabhängigkeit von v_1 und v_2 oder, was auf dasselbe hinauskommt, von φ_1 und v_2 nicht identisch verschwinden. Somit erhalten wir in $\varphi_2 = \frac{\varphi_2'}{\sqrt{N\varphi_2'}}$ eine normierte, zu φ_1 orthogonale Funktion. Weiter bilden wir eine Funktion

$$\varphi_3' = c_1^*\varphi_1 + c_2^*\varphi_2 + c_3^* v_3,$$

indem wir drei nicht sämtlich verschwindende Zahlen c_1^*, c_2^*, c_3^* gemäß den beiden homogenen linearen Gleichungen

$$(\varphi_3'\varphi_1) = c_1^* + c_3^*(\varphi_1 v_3) = 0, \quad (\varphi_3'\varphi_2) = c_2^* + c_3^*(\varphi_2 v_3) = 0$$

ermitteln. Wegen der linearen Unabhängigkeit von v_1, v_2, v_3 bzw. $\varphi_1, \varphi_2, v_3$ kann die Funktion φ_3' nicht identisch verschwinden, und daher liefert $\varphi_3 = \frac{\varphi_3'}{\sqrt{N\varphi_3'}}$ eine normierte, zu φ_1 und φ_2 orthogonale Funktion. Indem wir dieses Verfahren unbegrenzt fortsetzen, bekommen wir das gewünschte orthogonale Funktionensystem durch die Rekursionsformel:

$$\varphi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{N v_{n+1}}}\left[v_{n+1} - \sum_{h=1}^{n} \varphi_h(\varphi_h v_{n+1})\right]$$

Wenn wir später von Orthogonalisierung sprechen werden, ist, wofern nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt wird, immer das eben

geschilderte Verfahren gemeint, welches also zugleich mit der Orthogonalisierung die Normierung liefert.

3. Besselsche Ungleichung. Vollständigkeitsrelation. Approximation im Mittel. Ist $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ein normiertes Orthogonalsystem und f irgendeine Funktion, so nennen wir die Zahlen

$$c_\nu = (f\varphi_\nu) = \int f\varphi_\nu\, dx \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

die *Entwicklungskoeffizienten oder Komponenten* von f in bezug auf das gegebene Orthogonalsystem[1]).

Aus der unmittelbar einleuchtenden Beziehung

$$\int \Big(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\Big)^2 dx \geqq 0 \tag{6}$$

folgt durch Ausführung des Quadrats und gliedweise Integration

$$0 \leqq \int f^2\, dx - 2\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \int f\varphi_\nu\, dx + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 = Nf - 2\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 \leqq Nf, \tag{7}$$

also, da rechts eine feste, von n unabhängige Zahl steht,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2 \leqq Nf. \tag{8}$$

Diese fundamentale Ungleichung, die *„Besselsche Ungleichung"*, besteht für jedes beliebige normierte Orthogonalsystem. Sie lehrt die Konvergenz der aus positiven Gliedern bestehenden Reihe der Quadrate der Entwicklungskoeffizienten auf der linken Seite der Beziehung (8).

Der Integralausdruck in (6) ergibt sich ganz ungezwungen, wenn man sich die Aufgabe stellt, *die gegebene Funktion f durch ein lineares Aggregat $\sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \varphi_\nu$ mit konstanten Koeffizienten γ_ν im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate so zu approximieren, daß das „mittlere Fehlerquadrat" $M = \int (f - \sum \gamma_\nu \varphi_\nu)^2 dx$ möglichst klein wird.* Für diese beste Approximation muß $\frac{\partial M}{\partial \gamma_\nu} = 0$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ sein, was wegen der Zulässigkeit der Differentiation unter dem Integralzeichen gerade zu den Werten $\gamma_\nu = c_\nu = (f\varphi_\nu)$ führt.

Wenn es möglich ist, für jede Funktion f das kleinste mittlere Fehlerquadrat $\int \Big(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\Big)^2 dx$ durch passende Wahl von n unter eine beliebig kleine positive Zahl herunterzudrücken, d. h. jede Funktion durch ein lineares Aggregat $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu$ mit hinreichend vielen Gliedern im

[1]) In Anlehnung an die Theorie der Fourierschen Reihen gebraucht man zuweilen auch den Ausdruck „Fouriersche Koeffizienten".

Sinne der Methode der kleinsten Quadrate oder, wie wir es auch nennen wollen, *„im Mittel"* beliebig genau zu *approximieren*, so bezeichnen wir das Funktionensystem $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ als ein *„vollständiges Funktionensystem"* und die alsdann nach den obigen Ausführungen für die Entwicklungskoeffizienten $c_\nu = (f\varphi_\nu)$ jeder Funktion f geltende Beziehung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2 = Nf \tag{9}$$

als die *„Vollständigkeitsrelation"*. Allgemeiner kann man diese in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu d_\nu = (f, g) \quad \text{mit} \quad c_\nu = (f\varphi_\nu),\ d_\nu = (g\varphi_\nu) \tag{9'}$$

schreiben, welche sich ergibt, wenn wir die Formel (9) auf die Funktion $f + g$ anwenden:

$$N(f+g) = Nf + Ng + 2(f, g) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(c_\nu + d_\nu)^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty}(c_\nu^2 + d_\nu^2 + 2c_\nu d_\nu),$$

und nachher die entsprechenden Gleichungen für f und g subtrahieren.

Für die Vollständigkeit eines Funktionensystems $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ist es übrigens hinreichend, wenn die Vollständigkeitsrelation (9) für alle *stetigen* Funktionen f erfüllt ist. Jede stückweise stetige Funktion g kann nämlich durch eine stetige Funktion f derart approximiert werden, daß das Integral $\int |f - g|\, dx$ und auch das Integral $\int (f-g)^2\, dx$ beliebig klein ausfällt. Eine solche Funktion f bekommt man z. B., wenn man sich die Funktion g durch eine Kurve dargestellt denkt, an allen Sprungstellen von g je einen links und rechts in dem beliebig klein wählbaren Abstande δ von der Sprungstelle gelegenen Punkt der Kurve durch ein Geradenstück verbindet und in diesem Intervall die Kurve durch das Geradenstück ersetzt[1]). Sind also $a_1, a_2, \ldots$ die Entwicklungskoeffizienten der Funktion g und $c_1, c_2, \ldots$ die der Funktion f, so folgt daraus, daß das Integral $\int \left(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\right)^2 dx$ durch geeignete Wahl von n beliebig klein gemacht werden kann, dieselbe Tatsache mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung für das Integral

$$M' = \int \left(g - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\right)^2 dx = \int \left[(g-f) + \left(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\right)\right]^2 dx .$$

---

[1]) Bedeutet nämlich etwa M die obere Grenze von $|g(x)|$ und q die Anzahl der Sprungstellen von $g(x)$ im Integrationsintervall, so läßt sich in

$$\int |f - g|\, dx \leqq 4M\delta q$$

die rechte Seite durch passende Wahl des Abstandes δ beliebig verkleinern.

Es ist nämlich

$$M' = N(g-f) + N\left(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\right) + 2\,(g-f,\, f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu),$$

also

$$M' \leqq N(g-f) + N(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu) + 2\sqrt{N(g-f)\,N(f - \sum c_\nu \varphi_\nu)}.$$

Nun ist aber

$$M = \int \left(g - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_\nu\right)^2 dx \leqq M',$$

da die Entwicklungskoeffizienten a_ν für g das kleinste mittlere Fehlerquadrat liefern, womit die Vollständigkeitsrelation auch für g bewiesen ist.

Wohl zu beachten ist, daß wir aus der Vollständigkeit des Funktionensystems $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, d. h. aus der Gleichung

$$\lim_{n \to \infty} \int \left(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\right)^2 dx = 0$$

keineswegs auf die Gleichung $f = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu$, also auf die Entwickelbarkeit von f in eine nach den Funktionen φ_ν fortschreitende Reihe, schließen dürfen, auch wenn f als stückweise glatt vorausgesetzt wird. *Die Entwickelbarkeit steht vielmehr auch für stückweise glatte f nur dann von vornherein fest, wenn die Reihe* $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu$ *gleichmäßig konvergiert und eine stückweise glatte Funktion darstellt, so daß wir also den Grenzübergang zur stückweisen glatten Grenzfunktion unter dem Integralzeichen vornehmen dürfen.* Die Vollständigkeit des vorgelegten Systems $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ist dabei selbstverständlich eine unerläßliche Voraussetzung, weil z. B. für eine aus einem vollständigen System herausgenommene Funktion alle Komponenten nach dem übrigbleibenden unvollständigen System verschwinden. Aber auch für ein vollständiges System $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ erfordert die Frage nach der Entwickelbarkeit einer stückweise glatten Funktion f eine genauere Untersuchung, wie wir sie später (Kap. IV, V, VI) noch verschiedentlich durchführen werden.

Den Inhalt der obigen Limesgleichung kennzeichnen wir auch durch die Ausdrucksweise: *die Funktion* $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu$ *konvergiert im Mittel gegen die Funktion f.*

Ferner fügen wir den Satz an, *daß eine stückweise stetige Funktion durch ihre Entwicklungskoeffizienten nach einem vorgegebenen vollständigen orthogonalen System eindeutig festgelegt ist, in dem Sinne, daß zwei stückweise stetige Funktionen miteinander identisch sind, wenn sie dieselben Entwicklungskoeffizienten haben.* Denn die Differenz zweier

solcher Funktionen mit gleichen Koeffizienten hat die Koeffizienten Null und also nach der Vollständigkeitsrelation die Norm Null; sie verschwindet somit selbst identisch.

Der Begriff der Vollständigkeit eines Funktionensystems behält übrigens auch dann einen Sinn, wenn das System nicht orthogonal und normiert ist. Wir nennen nämlich allgemein ein System von Funktionen dann vollständig, wenn sich eine stückweise glatte Funktion durch ein lineares Aggregat dieser Funktionen hinsichtlich der mittleren Fehlerquadrate beliebig genau approximieren läßt.

4. Orthogonale Transformationen in unendlich vielen Veränderlichen. Die orthogonalen normierten Funktionensysteme zeigen viele Analogien zu den orthogonalen Systemen von normierten Vektoren im n-dimensionalen Raume; die Komponenten $c_\nu = (f\varphi_\nu)$ der Funktion f kann man geradezu als rechtwinklige Koordinaten der Funktion f in einem durch die „Koordinatenfunktionen" $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ festgelegten *„Koordinatensystem im Raume von unendlich vielen Dimensionen"* ansehen.

Ist $\psi_1, \psi_2, \ldots$ ein zweites orthogonales normiertes Funktionensystem, in welchem $d_\nu = (f, \psi_\nu)$ die Komponenten von f sind, und sind beide Systeme vollständig, so liefert die Vollständigkeitsrelation (9'), angewandt auf die Funktionen f und φ_i in bezug auf das System $\psi_1, \psi_2, \ldots$, sofort das unendliche Gleichungssystem

$$c_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} d_k, \quad a_{ik} = (\varphi_i \psi_k). \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

Entsprechend erhalten wir das inverse Gleichungssystem

$$d_i = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} c_k, \quad b_{ik} = (\psi_i \varphi_k) = a_{ki}. \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{10'}$$

Die Koeffizienten genügen den Bedingungen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} a_{jk} = (\varphi_i \varphi_j) = \begin{cases} 0 \text{ für } j \neq i, \\ 1 \text{ für } j = i; \end{cases} \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} a_{kj} = (\psi_i \psi_j) = \begin{cases} 0 \text{ für } j \neq i, \\ 1 \text{ für } j = i, \end{cases} \tag{11'}$$

welche die genaue Verallgemeinerung der früheren Orthogonalitätsrelationen im n-dimensionalen Raume (Kap. I, § 3) auf den Raum von unendlich vielen Dimensionen darstellen. Wir nennen daher eine solche Transformation (10), welche die Bedingungen (11), (11') erfüllt, eine *orthogonale Transformation von unendlich vielen Variablen.*

5. Gültigkeit der Ergebnisse bei mehreren unabhängigen Veränderlichen. Erweiterung der Voraussetzungen. Alle unsere Begriffe und Überlegungen bleiben unverändert erhalten, wenn wir statt der

Funktionen einer einzigen Veränderlichen x solche von mehreren Variablen, etwa von x und y, betrachten, wobei die Variablen in einem fest gegebenen, ganz im Endlichen liegenden Gebiete G laufen, dessen Inhaltselement wir mit dG bezeichnen. Wir erklären für zwei Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ in diesem Gebiet G das innere Produkt (f, g) durch $(f, g) = \int_G f g \, dG$ und brauchen sodann an den Bezeichnungen und Beweisen dieses Paragraphen nichts Wesentliches zu verändern.

Ferner bleiben alle Begriffe und Tatsachen auch dann bestehen, wenn man das Grundgebiet als unendlich annimmt und von allen vorkommenden Funktionen voraussetzt, daß sie samt ihren Quadraten über das ganze Grundgebiet integrierbar sind.

Endlich sei hervorgehoben, daß unsere Begriffsbildungen gültig bleiben, wenn die Funktion f im Grundgebiet Unendlichkeitsstellen derart besitzt, daß ihr Quadrat über das Grundgebiet integrierbar ist.

§ 2. Das Häufungsprinzip für Funktionen.

Die Analogie zwischen Funktionen und Vektoren in einem n-dimensionalen Raume erleidet vielfach eine Unterbrechung, wenn man zur Betrachtung von unendlichen Funktionenmengen bzw. Vektorenmengen übergeht. Bei Vektorenmengen lehren die elementarsten Tatsachen der Analysis (Weierstraßscher Häufungsstellensatz, Konvergenzdefinitionen) unmittelbar, daß sich aus jeder unendlichen Menge von Vektoren $\mathfrak{v}$ mit beschränktem absoluten Betrage $|\mathfrak{v}|$ oder beschränkter Norm $\mathfrak{v}^2 = N\mathfrak{v}$ eine konvergente Teilfolge auswählen läßt, daß aus der Gültigkeit der Relation $\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} N(\mathfrak{v}_n - \mathfrak{v}_m) = 0$ für eine Folge von Vektoren $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3, \ldots$ die Existenz eines Grenzvektors $\mathfrak{v} = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{v}_n$ folgt und daß ferner aus $\lim_{n\to\infty} N\mathfrak{v}_n = 0$ sich $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{v}_n = 0$ ergibt. Im Raume von unendlich vielen Dimensionen hören diese Tatsachen auf, gültig zu sein. Man kann z. B. nicht aus jeder Menge stetiger Funktionen $f(x)$ mit beschränkter Norm Nf eine gegen eine stetige Funktion konvergente Teilfolge herausgreifen, und man kann auch nicht aus der Relation $\lim_{n\to\infty} Nf_n = 0$ für eine Folge stetiger Funktionen die Beziehung $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ schließen. Nehmen wir etwa für das Grundgebiet $-1 \leqq x \leqq +1$ die Funktionen

$$f_n(x) = 1 - n^2 x^2 \quad \text{für} \quad x^2 \leqq \frac{1}{n^2},$$

$$f_n(x) = 0 \quad \text{für} \quad x^2 \geqq \frac{1}{n^2}.$$

Jede Teilmenge dieser Funktionenmenge konvergiert gegen die für $x = 0$ unstetige Funktion

$$f(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0,$$
$$f(x) = 1 \quad \text{für} \quad x = 0,$$

und es ist trotzdem $\lim_{n\to\infty} N f_n = 0$.

Die Durchführung unserer Analogie zwischen Vektoren und Funktionen doch zu ermöglichen, d. h. das Weierstraßsche Häufungsstellenprinzip und die oben erwähnten Konvergenzsätze für den *„Funktionenraum"* zu retten, ist eine Aufgabe, welche bei vielen Untersuchungen, vor allem bei der Führung von Konvergenz- und Existenzbeweisen, unerläßlich ist. Zu ihrer Lösung bieten sich zwei Wege dar. Einmal läßt sich das gewünschte Ziel durch Erweiterung des Funktionenbereichs und gleichzeitige Erweiterung des Integral- und des Konvergenzbegriffes erreichen. Diesen Weg, der auf der Theorie von *Lebesgue* beruht, wollen wir als für die Zwecke dieses Buches ungeeignet nicht beschreiten, vielmehr einen zweiten Weg einschlagen, welcher darauf beruht, daß wir den zugrunde gelegten Funktionenbereich verengern, um die Gültigkeit des Konvergenzprinzipes zu erzwingen. Diese Verengerung besteht darin, daß wir von der Gesamtheit der Funktionen unseres Funktionenbereiches nicht nur die Stetigkeit, sondern für den ganzen Funktionenbereich die *gleichmäßige Stetigkeit* verlangen. Es möge sich etwa um Funktionen der einen unabhängigen Variablen x handeln. Dann besagt die Forderung der gleichmäßigen Stetigkeit, daß es zu jedem positiven ε eine nur von ε, nicht aber von dem Individuum $f(x)$ der Funktionenmenge abhängige und mit ε zugleich gegen Null strebende Zahl $\delta = \delta(\varepsilon)$ derart geben soll, daß aus $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ die Relation $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ folgt, wenn x_1 und x_2 dem Bereiche der unabhängigen Variablen angehören. Für solche Funktionenmengen gilt dann das *Häufungsstellenprinzip: Aus jeder im Grundgebiete G gleichmäßig stetigen Funktionenmenge läßt sich eine in G gleichmäßig konvergente Teilfolge* $q_1(x), q_2(x), q_3(x), \ldots$ *auswählen.*

Dieser Satz sagt für unsere Mengen stetiger Funktionen etwas Ähnliches aus wie der Weierstraßsche Häufungsstellensatz für beschränkte Punktmengen und erfüllt damit unsere obige Forderung.

Zum Beweise betrachten wir eine abzählbare Menge von Punkten $x_1, x_2, \ldots$, die im Intervall überall dicht liegen, wie sie etwa aus denjenigen Stellen gebildet sind, die sich durch fortgesetzte Halbierung des Intervalls und der neu entstehenden Teilintervalle ergeben. In der Menge der Funktionswerte im Punkte x_1 gibt es nach dem Weierstraßschen Häufungsstellensatz eine konvergente Teilfolge; es läßt sich also aus der Menge aller vorgelegten Funktionen eine Folge von unendlich vielen Funktionen $a_1(x), a_2(x), \ldots$ derart auswählen, daß die zugehörigen

Funktionswerte im Punkte x_1 eine konvergente Folge bilden. Aus dieser Folge kann in derselben Weise eine Teilfolge $b_1(x)$, $b_2(x)$, ... ausgesondert werden, für welche die Funktionswerte auch im Punkte x_2 eine konvergente Folge darstellen usw. Nunmehr fassen wir die „Diagonalfolge" $a_1(x) = q_1(x)$, $b_2(x) = q_2(x)$, ... aller so erhaltenen Funktionenfolgen ins Auge und behaupten, daß sie die Eigenschaft der gleichmäßigen Konvergenz im ganzen Intervall besitzt.

Um dies zu zeigen, teilen wir nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Zahl ε das Intervall $a \leqq x \leqq b$ durch eine genügend große, feste Anzahl von Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_M$ der eben betrachteten Punktmenge $x_1, x_2, \ldots$ so fein ein, daß zu jedem Punkte x des Intervalls ein Punkt x_h mit $h \leqq M$ existiert, für den $|x - x_h| \leqq \delta(\varepsilon)$ ist, wobei $\delta(\varepsilon)$ die in der Voraussetzung angegebene Bedeutung hat. Sodann nehmen wir die von ε abhängige Zahl $N = N(\varepsilon)$ so groß, daß für $m > N$, $n > N$ im Punkte x_h $(h = 1, 2, \ldots, M)$

$$|q_m(x_h) - q_n(x_h)| < \varepsilon$$

gilt. Der gleichmäßigen Stetigkeit wegen ist ferner für ein geeignetes $h \leqq M$

$$|q_m(x) - q_m(x_h)| < \varepsilon,$$
$$|q_n(x) - q_n(x_h)| < \varepsilon,$$

also für $m > N$, $n > N$

$$|q_m(x) - q_n(x)| < 3\varepsilon,$$

womit die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge $q_1(x), q_2(x), \ldots$ für alle x des Intervalls $a \leqq x \leqq b$ erwiesen ist. Die Stetigkeit der Grenzfunktion $q(x)$ ist dann eine unmittelbare Folge aus der Gleichmäßigkeit der Konvergenz.

Eine Menge gleichmäßig stetiger Funktionen besitzt folgende weiteren Eigenschaften: *Gehört die Funktionenfolge* $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ *einer solchen Menge an und gilt* $\lim_{n\to\infty} N f_n = 0$, *so ist im Sinne gleichmäßiger Konvergenz* $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$. *Ist ferner* $N f_n$ *beschränkt und gilt* $\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} N(f_n - f_m) = 0$, *so gibt es eine stetige Funktion* $f(x)$ *derart, daß im Sinne gleichmäßiger Konvergenz* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *ist.*

Um den ersten Teil dieser Behauptung zu beweisen, nehmen wir an, es sei für die Stelle $x = x_0$ nicht $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$; dann gibt es beliebig große Werte von n, so daß $f_n^2(x_0) > 2\alpha^2$ ist, unter $2\alpha^2$ eine positive Schranke verstanden. Wegen der Gleichmäßigkeit der Stetigkeit der Funktionen $f_n(x)$ gibt es dann ein festes, den Punkt x_0 enthaltendes Intervall der Breite δ, so daß in diesem Intervall für die oben

genannten Werte von n die Ungleichung $f_n^2 > \alpha^2$ besteht. Also wird auch $Nf_n > \delta\alpha^2$, im Gegensatz zu unserer Voraussetzung. Ganz ähnlich läßt sich, was der Leser selbst durchführen mag, der zweite Teil der Behauptung beweisen.

Eine andere Eigenschaft, die einer gleichmäßig stetigen Funktionenmenge mit beschränkten Normen zukommt, ist die folgende, welche wir als *Glattheit*[1]) der Menge bezeichnen wollen. *Es seien r eine positive ganze Zahl und $c_1, c_2, \ldots, c_r$ irgendwelche Zahlen, deren Beträge unterhalb einer festen Schranke, etwa 1, liegen; dann gibt es eine nur von der positiven Zahl ε abhängige und zugleich mit ε gegen Null strebende Zahl $\delta(\varepsilon)$, so daß aus der Relation $N(c_1 f_1 + \cdots + c_r f_r) < \varepsilon$ die Relation*

$$|c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_r f_r| < \delta$$

folgt, wenn $f_1, f_2, \ldots, f_r$ irgendwelche r Funktionen der Menge sind.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem oben Bewiesenen, wenn man beachtet, daß der Bereich unserer Funktionen auch dann noch die Eigenschaft der gleichmäßigen Stetigkeit seiner Individuen behält, wenn man ihn durch Hinzufügung aller linearen Kombinationen $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_r f_r$ bei festem r und beschränkten Werten von $|c_i|$ erweitert.

Aus dem Häufungsstellenprinzip läßt sich ohne weiteres der folgende, etwas allgemeinere Satz entnehmen: *Es sei*

$$\begin{aligned} &p_{11}(x),\ p_{12}(x),\ \ldots,\ p_{1r}(x),\\ &p_{21}(x),\ p_{22}(x),\ \ldots,\ p_{2r}(x),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

eine Folge von Gruppen $G_1, G_2, \ldots$ von je r Funktionen, die im Intervall $a \leqq x \leqq b$ alle gleichmäßig stetig und gleichmäßig beschränkt sind. Dann lassen sich Gruppen $p_{n_i,k}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, \lim\limits_{i\to\infty} n_i = \infty,\ k = 1, \ldots, r)$ von Funktionen so herausheben, daß die Funktionen $p_{n_i,k}(x)$ mit wachsendem i gleichmäßig gegen r stetige Funktionen $p_1(x), \ldots, p_r(x)$ konvergieren.

In der Tat können wir die gewünschte Konvergenz zunächst für die erste Spalte durch geeignete Auswahl erzielen; aus der so gewonnenen Folge von Gruppen von Funktionen sondern wir dann eine Teilfolge so aus, daß die Konvergenz auch in der zweiten Spalte statthat, und wiederholen dieses Verfahren noch $(r-2)$ mal.

§ 3. Unabhängigkeitsmaß und Dimensionenzahl.

1. Unabhängigkeitsmaß. Für die lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit von r Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ können wir analog zu den

[1]) Der Leser möge diesen auf Funktionen-Mengen bezüglichen Begriff nicht mit dem S. 33 eingeführten einer „glatten Funktion" verwechseln.

früheren Entwicklungen bei den Vektoren des n-dimensionalen Raumes leicht ein einfaches Kriterium herleiten. Dazu bilden wir die quadratische Form in r reellen Veränderlichen $t_1, \ldots, t_r$

$$(12)\quad K(t,t) = N(t_1 f_1 + \cdots + t_r f_r) = \int (t_1 f_1 + \cdots + t_r f_r)^2 dx = \sum_{i,k=1}^{r} (f_i f_k) t_i t_k$$

und nennen ihre kleinste, sicher nicht negative charakteristische Zahl m, d. h. das Minimum von $K(t,t)$ bei Variation der t_i unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{r} t_i^2 = 1$, das *„Unabhängigkeitsmaß"* der Funktionen $f_1, \ldots, f_r$. Linear abhängig sind die Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ offenbar dann und nur dann, wenn das Unabhängigkeitsmaß m den Wert Null hat; im Falle linearer Unabhängigkeit hingegen gibt die Größe von m eine Vorstellung von der Art der linearen Unabhängigkeit. Gleichbedeutend mit dem Verschwinden des Unabhängigkeitsmaßes m ist das Verschwinden der *Gramschen Determinante*

$$(13)\quad \Gamma(f_1, \ldots, f_r) = \begin{vmatrix} (f_1 f_1) & \cdots & (f_1 f_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (f_r f_1) & \cdots & (f_r f_r) \end{vmatrix}$$

des Funktionensystems $f_1, \ldots, f_r$. Diese Tatsache ergibt sich daraus, daß die Gramsche Determinante das Produkt der sämtlichen, durchweg nichtnegativen charakteristischen Zahlen von $K(t,t)$ ist. Hiernach gilt nämlich $m^r \leqq \Gamma \leqq m M^{r-1}$, wenn M die größte charakteristische Zahl von $K(t,t)$ bedeutet. In Verallgemeinerung der Schwarzschen Ungleichung ist wegen des positiv definiten Charakters von $K(t,t)$ übrigens $\Gamma \geqq 0$. *Auch hier stellt also das Verschwinden der Gramschen Determinante eine hinreichende und notwendige Bedingung für lineare Abhängigkeit der Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ dar.* So kann man z. B. die lineare Unabhängigkeit von je n Funktionen eines normierten Orthogonalsystems aus der Tatsache herleiten, daß ihre Gramsche Determinante, wie unmittelbar einzusehen ist, den Wert 1 hat.

Bildet man eine lineare Kombination $f = \sum_{i=1}^{r} u_i f_i$ von r linear unabhängigen Funktionen $f_1, \ldots, f_r$, welche zudem normiert ist, so kann kein Koeffizient u_i absolut genommen oberhalb der lediglich von dem Unabhängigkeitsmaß m von $f_1, \ldots, f_r$ abhängigen Schranke $\frac{1}{\sqrt{m}}$ liegen. Denn zufolge der Definition von m ist für

$$v_i = \frac{u_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{r} u_i^2}} \text{ offenbar } \int \left(\sum_{i=1}^{r} v_i f_i \right)^2 dx = \frac{N f}{\sum_{i=1}^{r} u_i^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} u_i^2} \geqq m,$$

also $\sum_{i=1}^{r} u_i^2 \leqq \frac{1}{m}$. *Wenn man also ein System von r Funktionen mit einem*

oberhalb der positiven Schranke μ liegenden Unabhängigkeitsmaß orthogonalisiert, d. h. seine Funktionen durch geeignete normierte lineare Kombinationen aus ihnen ersetzt, so können dabei niemals Absolutwerte der Koeffizienten oberhalb der Schranke $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ auftreten.

2. Asymptotische Dimensionenzahl einer Funktionenfolge. Sind in einer Folge von normierten Funktionen $f_1, f_2, \ldots$ oder allgemeiner von Funktionen mit beschränkter Norm immer je $r+1$ Funktionen linear voneinander abhängig, so daß sich jede Funktion als lineare Verbindung $t_1 g_1 + \cdots + t_r g_r$ von r, aber nicht weniger als r Grundfunktionen $g_1, \ldots, g_r$ mit konstanten Koeffizienten $t_1, \ldots, t_r$ darstellen läßt und demnach die ganze Funktionenfolge der *„linearen Schar"* $t_1 g_1 + \cdots + t_r g_r$ angehört, so sagen wir in Anlehnung an die geometrische Sprechweise, die Funktionenfolge habe genau die *Dimensionenzahl r*.

Besitzt die Funktionenfolge $f_1, f_2, \ldots$ keine endliche Dimensionenzahl, so können zwei Fälle eintreten. Entweder gibt es für jede noch so große positive ganze Zahl s Gruppen von je s Funktionen $f_{n_1}, \ldots, f_{n_s}$ der Folge mit beliebig großen Indizes $n_1, \ldots, n_s$ derart, daß das Unabhängigkeitsmaß dieser Funktionen oberhalb einer festen, d. h. nicht von den n_i (sondern höchstens von s) abhängigen positiven Schranke liegt. Dann schreiben wir der Funktionenfolge die asymptotische Dimensionenzahl ∞ zu[1]). Oder aber es konvergiert bei genügend großem s das Unabhängigkeitsmaß von $f_{n_1}, \ldots, f_{n_s}$ gegen Null, wenn sämtliche Zahlen $n_1, \ldots, n_s$ irgendwie über alle Grenzen wachsen. In diesem Falle nennen wir die kleinste ganze Zahl r, für die bei $s > r$ das Unabhängigkeitsmaß gegen Null strebt, die *asymptotische Dimensionenzahl* der Folge. Insbesondere ist $r = 0$, wenn Nf_n mit wachsendem n gegen Null konvergiert. Bei einer Folge mit der asymptotischen Dimensionenzahl r sind mithin nach Weglassung von hinreichend vielen Anfangsfunktionen je $r+1$ Funktionen „beinahe" linear abhängig.

Die innere Bedeutung der eingeführten, durch die geometrische Analogie zu Folgen von Vektoren im n-dimensionalen Raume nahegelegten Begriffsbildungen besteht darin, daß eine Funktionenfolge der asymptotischen Dimensionenzahl r als Grenzgebilde eine lineare Funktionenschar aus r Grundfunktionen definiert. Dies gilt allgemein allerdings erst dann, wenn man unter Heranziehung des Lebesgueschen Integralbegriffs und der zugehörigen Theorie den zugrunde gelegten Funktionenbereich erweitert. Da wir jedoch hier auf unserem elementaren Standpunkte verharren wollen, so müssen wir zum Beweise der eben ausgesprochenen Behauptung noch gemäß § 2 gewisse einschränkende Voraussetzungen machen, und zwar wollen wir einfach voraussetzen, daß die Funktionenfolge glatt ist (vgl. S. 42).

[1]) Das einfachste Beispiel ist eine Folge orthogonaler normierter Funktionen, bei der für jede Funktionengruppe das Unabhängigkeitsmaß den Wert 1 hat.

Dann gilt der Satz: *Ist $f_1, f_2, \ldots$ eine glatte Funktionenfolge mit der asymptotischen Dimensionenzahl r, so gibt es r voneinander linear unabhängige, also orthogonal und normiert wählbare Funktionen $g_1, \ldots, g_r$ derart, daß für hinreichend großes n sich jede der Funktionen f_n von einer Funktion der linearen Schar $t_1 g_1 + \cdots + t_r g_r$ um weniger als eine beliebig klein angenommene Größe ε unterscheidet, während keine lineare Schar mit weniger als r Grundfunktionen von derselben Eigenschaft existiert.*

Wir können diese lineare Grenzschar auch folgendermaßen charakterisieren: Sind $G_1, G_2, \ldots, G_m, \ldots$ Gruppen von je r Funktionen $f_{m_1}, \ldots, f_{m_r}$ der Folge, deren Unabhängigkeitsmaß oberhalb einer festen positiven Schranke μ liegt und deren Indizes m_i $(i = 1, \ldots, r)$ mit zunehmendem m über alle Grenzen wachsen, so konvergieren die durch die Funktionen von G_m als Grundfunktionen definierten linearen Funktionenscharen S_m mit wachsendem m gleichmäßig gegen eine durch r linear unabhängige Funktionen $g_1, \ldots, g_r$ definierte Grenzschar T in dem Sinne, daß bei hinreichend großem m jede normierte Funktion von S_m sich von einer Funktion von T beliebig wenig unterscheidet

Um den naheliegenden Beweis dieser Tatsachen bequem formulieren zu können, sagen wir, eine Funktion f habe von einer linearen Funktionenschar S eine Distanz kleiner als die positive Größe d, wenn sich f von einer geeigneten Funktion aus S absolut genommen überall um weniger als d unterscheidet. Entsprechend schreiben wir zwei linearen Funktionenscharen S und S^* eine Distanz kleiner als d zu, wenn jede normierte Funktion der einen Schar von einer geeigneten solchen der anderen Schar absolut genommen um weniger als d abweicht.

Nun ergibt sich sofort, daß bei genügend großem m und n die Funktion f_n von der Schar S_m eine beliebig kleine Distanz hat. Denn das Unabhängigkeitsmaß von $f_n, f_{m_1}, \ldots, f_{m_r}$ ist bei hinreichend großem m und n sicher beliebig klein; wegen der Glattheit der auftretenden Funktionen gibt es also $r+1$ Zahlen $u_0, u_1, \ldots, u_r$ mit $\sum_{i=0}^{r} u_i^2 = 1$, für die $|u_0 f_n + u_1 f_{m_1} + \cdots + u_r f_{m_r}|$ beliebig klein wird. Hierin kann bei zunehmendem m und n die Zahl u_0 absolut genommen nicht beliebig klein werden, weil sonst entgegen der Voraussetzung das Unabhängigkeitsmaß von $f_{m_1}, \ldots, f_{m_r}$ beliebig klein würde. Also können wir, indem wir $u_0 f_n + u_1 f_{m_1} + \cdots + u_r f_{m_r}$ durch u_0 dividieren und $\frac{u_i}{u_0} = -t_i$ setzen, den Schluß ziehen, daß sich bei hinreichend großen m und n die Funktion f_n von der Funktion $t_1 f_{m_1} + \cdots + t_r f_{m_r}$ der linearen Schar S_m beliebig wenig unterscheidet. Daher haben für hinreichend großes m und n auch die beiden linearen Funktionenscharen S_m und S_n eine beliebig kleine Distanz. Nunmehr sei ε eine später als genügend klein festzulegende Zahl und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine Folge positiver Zahlen mit $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = \varepsilon$.

Ferner sei m_i eine positive ganze Zahl derart, daß für $n \geqq m_i$ und $m \geqq m_i$ die Distanz von S_n und S_m kleiner als ε_i ist. Wir gehen von irgendwelchen r normierten Funktionen $h_{11}, \ldots, h_{1r}$ der Schar S_{m_1} aus und bestimmen, was nach Voraussetzung möglich ist, in S_{m_2} $(m_2 > m_1)$ die normierten Funktionen $h_{21}, \ldots, h_{2r}$ derart, daß $|h_{2i} - h_{1i}| < \varepsilon_1$ $(i = 1, \ldots, r)$ wird. Ebenso ermitteln wir in S_{m_3} $(m_3 > m_2)$ normierte Funktionen $h_{31}, \ldots, h_{3r}$ so, daß $|h_{3i} - h_{2i}| < \varepsilon_2$ wird usw. Wegen $|h_{pi} - h_{qi}| < \varepsilon_p + \cdots + \varepsilon_q$ $(p < q)$ konvergiert mit wachsendem n die Funktionenfolge h_{ni} $(i = 1, \ldots, r)$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion g_i, und es ist $|g_i - h_{1i}| < \varepsilon$. Wird ε hinreichend klein gewählt, so werden zugleich mit $h_{11}, \ldots, h_{1r}$ auch die Funktionen $g_1, \ldots, g_r$ ein von Null verschiedenes Unabhängigkeitsmaß haben, also linear unabhängig sein. Die Funktionen $g_1, \ldots, g_r$ erfüllen offenbar alle gestellten Anforderungen.

Die Voraussetzung der Glattheit der Funktionenfolge $f_1, f_2, \ldots$ ist besonders für die Anwendungen, die wir im nächsten Kapitel bei der Theorie der Integralgleichungen von den eben durchgeführten Überlegungen machen werden, von Wichtigkeit. Übrigens kann man diese Voraussetzung auch in die Form kleiden: Die Funktionenfolge $f_1, f_2, \ldots$ soll die Eigenschaft aufweisen, daß sich aus jeder ihrer Teilfolgen eine gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen läßt.

§ 4. Die Fouriersche Reihe.

Als erstes und wichtigstes Beispiel zur Erläuterung der allgemeinen Ausführungen wählen wir das für das Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ orthogonale und normierte System der trigonometrischen Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{\cos \nu x}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin \nu x}{\sqrt{\pi}}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Wir wollen in diesem Paragraphen nicht nur die Vollständigkeit dieses Funktionensystems nachweisen, sondern darüber hinaus zeigen, daß sich tatsächlich eine willkürliche Funktion $f(x)$, die samt ihrer ersten Ableitung im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ stückweise stetig oder, wie wir sagten, *„stückweise glatt"* ist, in eine nach den trigonometrischen Funktionen fortschreitende *„Fouriersche Reihe"*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \tag{14}$$

entwickeln läßt, wobei die Entwicklungskoeffizienten, die *„Fourierschen Koeffizienten"* oder *„Fourierschen Konstanten"* der Funktion $f(x)$, durch die Formeln

$$\begin{cases} a_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos \nu t \, dt, \\ b_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin \nu t \, dt \end{cases} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{15}$$

gegeben werden. Mit Hilfe der Beziehung $\cos \nu x + i \sin \nu x = e^{i\nu x}$ kann man die Gleichungen (14) und (15) auch in die übersichtlichere Gestalt

$$(14') \qquad f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu e^{i\nu x}, \quad \begin{pmatrix} 2\alpha_\nu = a_\nu - i b_\nu, & \nu > 0, \\ 2\alpha_\nu = a_{-\nu} + i b_{-\nu}, & \nu < 0, \end{pmatrix} \quad 2\alpha_0 = a_0$$

$$(15') \qquad \alpha_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-i\nu t}\, dt \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

bringen. Um uns bequem ausdrücken zu können, wollen wir uns in der Theorie der Fourierschen Reihen die Funktion $f(x)$ zunächst nur im Intervall $0 < x < 2\pi$ definiert und dann über dieses Grundgebiet hinaus durch die Funktionalgleichung $f(x + 2\pi) = f(x)$ periodisch fortgesetzt denken und ferner an jeder Sprungstelle ξ von $f(x)$ das arithmetische Mittel der „Grenzwerte von rechts und von links" $f(\xi + 0) = \lim_{h \to 0} f(\xi + h)$ bzw. $f(\xi - 0) = \lim_{h \to 0} f(\xi - h)$ $(h > 0)$, also die Zahl $\frac{1}{2}\,[f(\xi + 0) + f(\xi - 0)]$, als Funktionswert nehmen.

1. Vollständigkeit des Systems der trigonometrischen Funktionen. Um die Vollständigkeit unseres Funktionensystems darzutun, genügt nach § 1 der Nachweis, daß sich jede stetige Funktion $f(x)$ (wobei wir auch Stetigkeit über das Grundgebiet hinaus voraussetzen dürfen) gleichmäßig durch trigonometrische Polynome, d. h. Aggregate $P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (c_{\nu n} \cos \nu x + d_{\nu n} \sin \nu x)$ mit konstanten Koeffizienten, approximieren läßt. Dann ist nämlich sicher auch $\lim_{n \to \infty} N(f - P_n) = 0$, was die Vollständigkeit des Funktionensystems lehrt. Auf Grund der Minimumeigenschaft der Fourierschen Koeffizienten gilt übrigens dann erst recht $\lim_{n \to \infty} N(f - s_n) = 0$, wenn wir mit

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

die n^{te} Partialsumme der Fourierschen Reihe $\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$ bezeichnen.

Die eben behauptete Möglichkeit der Approximation von $f(x)$ durch trigonometrische Polynome kann man am kürzesten nach *Fejér*[1]) beweisen, indem man zeigt, daß die *arithmetischen Mittel*

$$S_n(x) = \frac{s_1(x) + \cdots + s_n(x)}{n}$$

[1]) Vgl. vor allem *Fejér, L.*: Untersuchungen über Fouriersche Reihen. Math. Ann. Bd. 58, S. 51—69. 1904. Die dort gemachte Bemerkung, daß man durch Mittelbildung den Verlauf der Partialsummen einer Reihe oft wesentlich glätten kann, hat zu vielen weiteren Untersuchungen Anlaß gegeben.

der Partialsummen mit wachsendem n gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergieren, und dabei beachtet, daß $S_n(x)$ ein trigonometrisches Polynom ist. Dies geschieht folgendermaßen:

Tragen wir für a_ν, b_ν die Ausdrücke (15) ein, so erhalten wir

$$(16)\quad \begin{cases} s_1(x) = \dfrac{a_0}{2}, \\ s_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{\nu=1}^{n-1}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \\ \qquad = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\left\{\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{\nu=1}^{n-1}(\cos \nu t \cos \nu x + \sin \nu t \sin \nu x)\right\} dt \\ \qquad = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\left\{\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{\nu=1}^{n-1}\cos \nu (t-x)\right\} dt \qquad (n = 2, 3, \ldots); \end{cases}$$

da der Integrand periodisch mit der Periode 2π ist, können wir auch

$$(16')\qquad s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1}\cos \nu t\right\} dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

schreiben. Nun findet man durch Anwendung der Summenformel der geometrischen Reihe

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{\nu=1}^{n-1}\cos \nu t = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{\nu=1}^{n-1}\dfrac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{\nu=-n+1}^{n-1} e^{i\nu t} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{e^{-i(n-1)t} - e^{int}}{1 - e^{it}} \\ \qquad = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{e^{i(n-\frac{1}{2})t} - e^{-i(n-\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\sin(n-\frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} \\ \qquad = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\cos(n-1)t - \cos nt}{1 - \cos t}, \end{cases}$$

also wird

$$(16'')\qquad s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x+t)\,\frac{\cos(n-1)t - \cos nt}{1 - \cos t}\,dt$$

und daher

$$(18)\quad \begin{cases} S_n(x) = \dfrac{s_1(x) + \cdots + s_n(x)}{n} = \dfrac{1}{2\pi n}\int\limits_0^{2\pi} f(x+t)\,\dfrac{1 - \cos nt}{1 - \cos t}\,dt \\ \qquad = \dfrac{1}{2\pi n}\int\limits_0^{2\pi} f(x+t)\left(\dfrac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\right)^2 dt. \end{cases}$$

Um die Relation $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$ zu beweisen, bemerken wir, daß für die Funktion $f(x) \doteq 1$ alle Partialsummen $s_n(x)$, also auch deren arithmetische Mittel $S_n(x)$, gleich 1 sind, daß also

$$1 = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt \tag{19}$$

gilt[1]; durch Multiplikation dieser Gleichung mit $f(x)$ und Subtraktion von (18) entsteht

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}[f(x+t) - f(x)]\left(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt. \tag{20}$$

Nun sei ε eine beliebig kleine positive Zahl; wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f(x)$ läßt sich dann ein nur von ε abhängiges $\delta = \delta(\varepsilon)$ des Intervalls $0 < \delta < \pi$ so bestimmen, daß für $|t| \leqq \delta$ und alle x

$$|f(x+t) - f(x)| \leqq \varepsilon$$

ist. Durch die Zerlegung $\int_0^{2\pi} = \int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{2\pi-\delta} + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi}$ des Integrals in (20) erhalten wir daher, wenn wir den Integranden kurz mit $\omega(t)$ und das Maximum von $|f(x)|$ mit M bezeichnen,

$$\left|\frac{1}{2\pi n}\int_0^{\delta}\omega(t)\,dt\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2\pi n}\int_0^{\delta}\left(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt < \frac{\varepsilon}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt = \varepsilon,$$

$$\left|\frac{1}{2\pi n}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\omega(t)\,dt\right| \leqq \frac{2M}{2\pi n}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\left(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt < \frac{M}{\pi n\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_0^{2\pi} dt = \frac{2M}{n\sin^2\frac{\delta}{2}},$$

$$\left|\frac{1}{2\pi n}\int_{2\pi-\delta}^{2\pi}\omega(t)\,dt\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2\pi n}\int_{2\pi-\delta}^{2\pi}\left(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt < \frac{\varepsilon}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt = \varepsilon,$$

also

$$|S_n(x) - f(x)| \leqq 2\varepsilon + \frac{2M}{n\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

---

[1]) Aus (19) erhält man übrigens ohne Schwierigkeit die Formel $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du = \frac{\pi}{2}$, die wir für eine spätere Anwendung anmerken wollen.

Für hinreichend große $n > n_0 = n_0(\varepsilon)$ ist aber $\frac{2M}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}} \leqq \varepsilon$, also $|S_n(x) - f(x)| \leqq 3\varepsilon$ für alle x. Damit ist die Beziehung $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$ und sonach die behauptete Vollständigkeit für jede stetige Funktion $f(x)$ bewiesen. Nach § 1 ist dies aber gleichbedeutend mit dem Bestehen der Vollständigkeitsrelation $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2) = Nf$ für jede stückweise stetige Funktion; als eine Folgerung aus dieser Relation (übrigens auch schon aus der viel weniger besagenden Besselschen Ungleichung) merken wir noch an, daß für jede stückweise stetige Funktion die Reihen $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu^2$ konvergent sind und daß daher die Fourierschen Koeffizienten a_ν, b_ν mit wachsendem ν gegen Null streben.

In den Koeffizienten der komplexen Entwicklungen (14'), (15') geschrieben lautet die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\alpha_\nu|^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx$$

und gilt in dieser Form, wie man sich sofort überzeugt, auch für stetige oder stückweise stetige komplexe Funktionen $f(x)$ der reellen Variablen x.

2. Die Fouriersche Reihenentwicklung stetiger Funktionen mit stückweise stetiger Ableitung. Die besondere Natur der trigonometrischen Funktionen erlaubt, aus der Vollständigkeitseigenschaft in einfachster Weise auf die Gültigkeit der Fourierschen Reihenentwicklung $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$ zu schließen, wenn die Funktion $f(x)$ *stückweise glatt* ist, d. h. selbst stückweise stetig ist und eine stückweise stetige erste Ableitung besitzt.

Zunächst machen wir die schärfere Voraussetzung, die Funktion $f(x)$ sei durchweg stetig und stückweise glatt. Bezeichnen wir die Fourierschen Konstanten der Ableitung $f'(x)$ mit a'_ν und b'_ν, so erhalten wir aus (15) wegen der Periodizität der stetigen Funktion $f(x)$ durch Teilintegration, die hier der stückweisen Glattheit halber erlaubt ist, für $\nu = 1, 2, \ldots$

$$(21) \quad \begin{cases} a_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos \nu t \, dt = -\frac{1}{\pi \nu} \int_0^{2\pi} f'(t) \sin \nu t \, dt = -\frac{b'_\nu}{\nu}, \\ b_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin \nu t \, dt = \frac{1}{\pi \nu} \int_0^{2\pi} f'(t) \cos \nu t \, dt = \frac{a'_\nu}{\nu}. \end{cases}$$

Zufolge der auch für die Funktion $f'(x)$ gültigen Vollständigkeitsrelation konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu'^2 + b_\nu'^2)$. Nach der Schwarzschen Ungleichung ist nun

$$\left(\sum_{\nu=m}^{n}|a_\nu \cos \nu x|\right)^2 \leqq \left(\sum_{\nu=m}^{n}\left|\frac{b_\nu'}{\nu}\right|\right)^2 \leqq \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu'^2 \sum_{\nu=m}^{n}\frac{1}{\nu^2},$$

$$\left(\sum_{\nu=m}^{n}|b_\nu \sin \nu x|\right)^2 \leqq \left(\sum_{\nu=m}^{n}\left|\frac{a_\nu'}{\nu}\right|\right)^2 \leqq \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu'^2 \sum_{\nu=m}^{n}\frac{1}{\nu^2},$$

wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$ konvergiert also die Fouriersche Reihe der Funktion $f(x)$ absolut und gleichmäßig. Ihre Summe ist eine stetige Funktion, deren Fouriersche Konstanten offenbar mit denen von $f(x)$ übereinstimmen, die also mit $f(x)$ identisch sein muß.

3. Ausdehnung des Resultats auf stückweise stetige Funktionen. Um die Gültigkeit der Fourierschen Reihenentwicklung auch für unstetige, stückweise glatte Funktionen nachzuweisen, behandeln wir zunächst eine spezielle solche Funktion, die durch

$$(22)\qquad \begin{cases} h(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & \text{für} \quad 0 < x < 2\pi, \\ h(0) = 0, \\ h(x + 2\pi) = h(x). \end{cases}$$

definiert ist und an den Stellen $x = \pm 2k\pi$ $(k = 0, 1, \ldots)$ den Sprung π aufweist. Vermöge der Formeln (15) ergeben sich für ihre Fourierschen Koeffizienten die Werte

$$(23)\qquad a_0 = 0, \quad a_\nu = 0, \quad b_\nu = \frac{1}{\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Zum Beweis der hiernach zu vermutenden Gleichung

$$(24)\qquad h(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin \nu x}{\nu}$$

benutzen wir den allgemeinen

Hilfssatz: *Eine trigonometrische Reihe* $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu x$, *deren Koeffizienten von einer gewissen Stelle an positiv sind und monoton nach Null abnehmen, bei der also für* $\nu \geqq N$

$$a_\nu \geqq 0, \quad a_\nu - a_{\nu+1} \geqq 0$$

ist, konvergiert für alle Werte von x, und zwar gleichmäßig in jedem die Punkte $\pm 2k\pi$ $(k = 0, 1, \ldots)$ *ausschließenden Intervall.*

Für $x = \pm 2k\pi$ ist die Konvergenz klar, da dann alle Glieder der Reihe verschwinden, während man für $x \neq \pm 2k\pi$ durch Multiplikation der Partialsumme $s_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin \nu x$ mit $2\sin\frac{x}{2}$ nach einer elementaren Umformung bei $a_0 = 0$

$$s_n(x) = -a_n \frac{\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{\sum_{\nu=1}^{n}(a_{\nu-1} - a_\nu)\cos\frac{2\nu-1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

erhält. Hierin strebt für wachsendes n das erste Glied gegen Null, während für den Zähler des zweiten Gliedes von $\nu = N+1$ an $\sum_{\nu=N+1}^{\infty}(a_{\nu-1} - a_\nu) = a_N$ eine Majorante ist. Damit ist die Konvergenz dargetan; die Gleichmäßigkeit der Konvergenz etwa im Intervall $\delta \leqq x \leqq 2\pi - \delta$, $\delta > 0$, folgt aus der für den Rest $\varrho_n(x)$ der Reihe bei $n \geqq N$ geltenden gleichmäßigen Abschätzung

$$|\varrho_n(x)| = \left| a_n \frac{\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(a_{\nu-1} - a_\nu)\cos\frac{2\nu-1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} \right|$$

$$\leqq \frac{a_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}(a_{\nu-1} - a_\nu)}{2\sin\frac{\delta}{2}} = \frac{a_n}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

Unsere Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\nu}$ ist demnach für $\delta \leqq x \leqq 2\pi - \delta$ gleichmäßig konvergent. Um zu zeigen, daß sie dort die Funktion $h(x)$ darstellt, bilden wir die Fouriersche Reihe für die integrierte Funktion

$$H(x) = \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4}, \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi,$$

die wir uns mit der Periode 2π periodisch fortgesetzt denken. Da die Funktion $H(x)$ dann durchweg stetig ist, wird sie nach 2. durch ihre absolut und gleichmäßig konvergente Fouriersche Reihe dargestellt; durch Auswertung der Fourierschen Koeffizienten (15) mittels Teilintegration ergibt sich

$$H(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu x}{\nu^2}. \tag{25}$$

Somit entsteht für $\delta \leqq x \leqq 2\pi - \delta$ die gleichmäßig konvergente Reihe (24) aus (25) durch gliedweise Differentiation, stellt also nach

einem bekannten Reihensatz die Ableitung $h(x)$ von $H(x)$ dar, wie wir beweisen wollten.

Ebenso wie die Funktion $h(x)$ für $x = 0$ den Sprung π macht, liefert $h(x - \xi)$ eine Funktion, die für $x = \xi$ denselben Sprung aufweist und sonst im Grundgebiet stetig ist. Ist nun $f(x)$ eine stückweise stetige Funktion, welche an den Stellen $x = \xi_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ des Intervalls $0 \leqq x < 2\pi$ die Sprünge $s(\xi_i) = f(\xi_i + 0) - f(\xi_i - 0)$ besitzt und sonst stetig ist, so wird

$$F(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{r} \frac{s(\xi_i)}{\pi} h(x - \xi_i)$$

eine überall stetige Funktion, die offenbar überdies zugleich mit $f(x)$ eine stückweise stetige erste Ableitung hat. Also ist nach 2. $F(x)$ in eine absolut und gleichmäßig konvergente Fouriersche Reihe entwickelbar, und da die Funktion $\sum_{i=1}^{r} \frac{s(\xi_i)}{\pi} h(x - \xi_i)$ in jedem die Sprungstellen ausschließenden Intervall ebenfalls durch eine solche Reihe dargestellt wird, so ist damit der zu Beginn des Paragraphen aufgestellte Satz vollständig bewiesen.

Zugleich enthalten unsere Ausführungen den Beweis, daß die Konvergenz gleichmäßig ist in jedem von Sprungstellen freien, abgeschlossenen Intervall.

Die gewonnenen Ergebnisse reichen für die Anwendungen der Fourierschen Reihe in der mathematischen Physik aus. Lediglich eine Verallgemeinerung verdient hier noch besonders hervorgehoben zu werden, nämlich *daß die Funktion an einer oder mehreren Stellen des Grundgebietes unendlich werden darf, wenn sie absolut genommen integrierbar bleibt* (wie z. B. an einer *logarithmischen Unendlichkeitsstelle*). Es kann dem Leser überlassen bleiben, sich von der Gültigkeit unserer Überlegungen für diesen Fall selbst zu überzeugen.

4. Die Größenordnung der Fourierschen Entwicklungskoeffizienten. Wenn die in eine Fouriersche Reihe $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu e^{i\nu x} = f(x)$ entwickelte periodische Funktion mit ihren Ableitungen bis zur $(h-1)^{\text{ten}}$ Ordnung stetig ist und eine stückweise stetige h^{te} Ableitung besitzt, dann gilt

$$2|\alpha_\nu| = \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2} \leqq \frac{c}{\nu^h},$$

wobei c eine Konstante bedeutet. Man sieht hieraus, in welcher Weise die Koeffizienten der Reihe um so schärfer gegen 0 gehen, je glatter die Funktion verläuft.

Das angegebene Resultat erhält man unmittelbar, indem man auf die Koeffizientendarstellung (15′) h-mal Teilintegration anwendet.

§ 5. Beispiele und Anwendungen für die Fouriersche Reihe.

1. Das Dirichletsche Integral. Bedeutet $f(x)$ eine stückweise glatte Funktion, a eine beliebige positive Zahl, so gilt die Formel

$$\lim_{v\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} f(x+t)\,\frac{\sin v t}{t}\,dt = \tfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]; \tag{26}$$

das hierin auftretende Integral pflegt man das *Dirichletsche Integral* zu nennen.

Wir beweisen zunächst, daß die Teilintegrale $\int_{\eta}^{a}$ und $\int_{-a}^{-\eta}$ bei beliebig kleinem festem $\eta > 0$ für $v\to\infty$ gegen 0 streben. Um dies für das erste Integral zu zeigen, wenden wir darauf Teilintegration an:

$$-\frac{1}{v}\int_{\eta}^{a}\frac{f(x+t)}{t}\,\frac{d(\cos v t)}{dt}\,dt = -\frac{1}{v}\left[\frac{f(x+t)}{t}\cos v t\Big|_{\eta}^{a} + S\right]$$
$$+\frac{1}{v}\int_{\eta}^{a}\cos v t\,\frac{d}{dt}\,\frac{f(x+t)}{t}\,dt;$$

S bedeutet die Summe der Sprünge der Funktion

$$\frac{f(x+t)}{t}\cos v t$$

im Innern des Intervalls (η, a). Da auf der rechten Seite sowohl der Ausdruck in der eckigen Klammer als auch der Integrand für festes η beschränkt bleibt, ist unsere Behauptung bewiesen. Genau ebenso verläuft der Beweis für das zweite Integral.

Um nun den Grenzwert des Integrals $\int_{-\eta}^{\eta} f(x+t)\,\frac{\sin v t}{t}\,dt$, auf das wir uns beschränken können, zu ermitteln, betrachten wir für ein so kleines η, daß die erste Ableitung von $f(x+t)$ für $0 < t \leqq \eta$ und $-\eta \leqq t < 0$ stetig ist, die Differenz

$$\int_{0}^{\eta} f(x+t)\,\frac{\sin v t}{t}\,dt - f(x+0)\int_{0}^{\eta}\frac{\sin v t}{t}\,dt = \int_{0}^{\eta}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\sin v t\,dt.$$

Da der erste Faktor unter dem Integralzeichen absolut beschränkt bleibt und $\leqq M^{+}$ ist, wenn M^{+} die obere Grenze für die absoluten Beträge der Ableitung von $f(x+t)$ für $0 < t \leqq \eta$ bedeutet, so ist diese Differenz absolut $\leqq M^{+}\eta$. Ebenso ergibt sich für die Differenz

$$\int_{-\eta}^{0} f(x+t)\,\frac{\sin v t}{t}\,dt - f(x-0)\int_{-\eta}^{0}\frac{\sin v t}{t}\,dt = \int_{-\eta}^{0}\frac{f(x+t)-f(x-0)}{t}\sin v t\,dt,$$

daß sie absolut kleiner als $M^- \eta$ ist, wo M^- die obere Grenze der absoluten Beträge von $f'(x+t)$ für $-\eta \leqq t < 0$ ist. So erhalten wir schließlich

$$\left| \int_{-\eta}^{+\eta} f(x+t) \frac{\sin v t}{t} dt - [f(x+0) + f(x-0)] \int_0^{\eta} \frac{\sin v t}{t} dt \right| \leqq (M^+ + M^-)\eta,$$

da offenbar $\int_0^{\eta} \frac{\sin v t}{t} dt = \int_{-\eta}^{0} \frac{\sin v t}{t} dt$ ist. Diese Ungleichung gilt gleichmäßig für alle $v \geqq 0$. Da nun M^+ und M^- sich sicher nicht vergrößern, wenn man $\eta > 0$ kleiner werden läßt, genügt es, zum Beweis von (26) die Gleichung

$$\lim_{v \to \infty} \int_0^{\eta} \frac{\sin v t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

darzutun.

Nun hatten wir auf Seite 49, Anm. 1, die Relation

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

erwähnt. Durch Teilintegration gewinnt man aus ihr

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = -\frac{\sin^2 t}{t}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\sin 2t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{v \to \infty} \int_0^{\eta} \frac{\sin v t}{t} dt,$$

d. h. gerade die gewünschte Gleichung.

Man kann, wie es Dirichlet in seiner klassischen Arbeit[1]) getan hat, die eben bewiesene Integralformel zum Ausgangspunkt der Theorie der Fourierschen Reihen machen, worauf hier nur beiläufig hingewiesen sei.

2.—10. Beispiele. Ist $f(x)$ eine gerade Funktion, d. h. ist $f(-x) = f(x)$, so wird $b_\nu = 0$ und $a_\nu = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos \nu t \, dt$; ist hingegen $f(x)$ ungerade, d. h. $f(-x) = -f(x)$, so wird $a_\nu = 0$ und $b_\nu = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin \nu t \, dt$. Eine gerade Funktion wird demnach durch eine reine Kosinusreihe, eine ungerade Funktion durch eine reine Sinusreihe dargestellt.

3. Für $-\pi < x < \pi$ sei $f(x) = x$; dann ergibt sich die Sinusreihe

$$x = f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - + \cdots\right).$$

---

[1]) Vgl. *Dirichlet, P. G. L.:* Sur la convergence des séries trigonometriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, J. reine angew. Math. Bd. 4, S. 157—169. 1829; Werke Bd. 1, S. 117—132. Berlin 1889.

Setzt man $x = \frac{\pi}{2}$, so erhält man die Leibnizsche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots .$$

4. Die gerade Funktion $f(x) = |x|$ $(-\pi < x < \pi)$ besitzt die Kosinusentwicklung

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right).$$

An der Stelle $x = 0$ ist $f(x)$ noch stetig; daher gewinnt man für $x = 0$ die Formel

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots .$$

5. Es sei $f(x) = -1$ für $-\pi < x < 0$ und $f(x) = +1$ für $0 < x < \pi$. Die Fouriersche Reihe lautet

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots\right);$$

sie entsteht aus der vorhergehenden durch gliedweise Differentiation.

6. Für $-\pi < x < \pi$ sei $f(x) = x \sin x$; es folgt

$$f(x) = 1 - \frac{\cos x}{2} - 2\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} - \frac{\cos 3x}{2 \cdot 4} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} - + \cdots\right)$$

und insbesondere für $x = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - + \cdots .$$

7. Zu der geraden Funktion $f(x) = |\sin x|$ gehört die Kosinusentwicklung

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\nu x}{4\nu^2 - 1}.$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ bekommt man die obige Reihe aus 6., die auch aus der Leibnizschen Reihe durch Zusammenfassung von je zwei aufeinander folgenden Gliedern hervorgeht.

8. Es sei für $-\pi < x < \pi$ die Funktion $f(x) = \cos \mu x$, wobei μ nicht ganzzahlig ist; man erhält

$$f(x) = \cos \mu x = \frac{2\mu \sin \mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu^2} - \frac{\cos x}{\mu^2 - 1^2} + \frac{\cos 2x}{\mu^2 - 2^2} - \frac{\cos 3x}{\mu^2 - 3^2} + - \cdots\right).$$

Bei $x = \pi$ ist die Funktion noch stetig; ersetzt man x durch π und μ durch x, so steht in

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \nu^2}$$

die Partialbruchzerlegung des Kotangens da. Aus ihr entnimmt man unter Benutzung der Formel $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cot t\,dt = \log \sin x$ die Produktdarstellung des Sinus

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right),$$

die für $x = \frac{1}{2}$ das Wallissche Produkt

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu}{2\nu-1} \cdot \frac{2\nu}{2\nu+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

liefert.

9. Die für $-\pi < x < \pi$ durch $f(x) = \sin \mu x$ definierte Funktion $f(x)$ läßt sich in die Reihe

$$f(x) = \sin \mu x = -\frac{2 \sin \mu\pi}{\pi} \left(\frac{\sin x}{\mu^2 - 1^2} - \frac{2 \sin 2x}{\mu^2 - 2^2} + \frac{3 \sin 3x}{\mu^2 - 3^2} - + \cdots\right)$$

entwickeln, aus der für $x = \frac{\pi}{2}$ die Partialbruchzerlegung des Sekans

$$\pi \sec \pi x = \frac{\pi}{\cos \pi x} = 4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}(2\nu-1)}{4x^2 - (2\nu-1)^2}$$

hergeleitet werden kann.

10. Die Reihen für die Hyperbelfunktionen $\mathfrak{Cof}\,\mu x$ und $\mathfrak{Sin}\,\mu x$ $(-\pi < x < \pi)$ lauten

$$\mathfrak{Cof}\,\mu x = \frac{2\mu}{\pi} \mathfrak{Sin}\,\mu\pi \left(\frac{1}{2\mu^2} - \frac{\cos x}{\mu^2 + 1^2} + \frac{\cos 2x}{\mu^2 + 2^2} - \frac{\cos 3x}{\mu^2 + 3^2} + - \cdots\right),$$

$$\mathfrak{Sin}\,\mu x = \frac{2}{\pi} \mathfrak{Sin}\,\mu\pi \left(\frac{\sin x}{\mu^2 + 1^2} - \frac{2 \sin 2x}{\mu^2 + 2^2} + \frac{3 \sin 3x}{\mu^2 + 3^2} - + \cdots\right).$$

Wir bekommen sie am einfachsten, wenn wir in den früheren Formeln für $\cos \mu x$ und $\sin \mu x$ μ durch $i\mu$ ersetzen.

11. Streckung des Grundgebietes. Ist die Funktion $f(x)$ periodisch mit der Periode $2l$ statt 2π, so gestattet sie die Entwicklung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(a_\nu \cos \nu \frac{\pi}{l} x + b_\nu \sin \nu \frac{\pi}{l} x\right) \tag{27}$$

mit

$$a_\nu = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(t) \cos \nu \frac{\pi}{l} t\,dt, \quad b_\nu = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(t) \sin \nu \frac{\pi}{l} t\,dt, \tag{27'}$$

die wir auch in der Gestalt

$$(28) \qquad f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu e^{i\frac{\pi}{l}\nu x}, \quad \alpha_\nu = \frac{1}{2l}\int_0^{2l} f(t)\, e^{-i\frac{\pi}{l}\nu t}\, dt$$

schreiben können.

12. Funktionalgleichung der Thetafunktion. Die Anwendung der Fourierschen Entwicklung ermöglicht einen einfachen Beweis für eine wichtige *Funktionalgleichung der Thetafunktion*

$$\vartheta(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\mu^2 x} \qquad (x > 0).$$

Diese Funktionalgleichung lautet

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\vartheta\left(\frac{1}{x}\right).$$

Zum Beweise setzen wir

$$\varphi(y) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(\mu+y)^2 x};$$

offenbar ist $\varphi(y)$ eine periodische Funktion von y mit der Periode 1, die alle Ableitungen nach y besitzt und sich demnach in die Fouriersche Reihe

$$\varphi(y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu e^{2\pi i\nu y}$$

mit

$$\alpha_\nu = \int_0^1 \varphi(t)\, e^{-2\pi i\nu t}\, dt = \int_0^1 \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(\mu+t)^2 x - 2\pi i\nu t}\, dt$$

entwickeln läßt. Da für alle $x > 0$ Summation und Integration vertauscht werden dürfen, ergibt sich für den Koeffizienten α_ν:

$$\alpha_\nu = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{-\pi(\mu+t)^2 x - 2\pi i\nu(\mu+t)}\, dt = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \int_\mu^{\mu+1} e^{-\pi t^2 x - 2\pi i\nu t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2 x - 2\pi i\nu t}\, dt = e^{-\frac{\pi\nu^2}{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x\left(t+\frac{i\nu}{x}\right)^2} dt = \frac{e^{-\frac{\pi\nu^2}{x}}}{\sqrt{x}},$$

weil $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz$ längs einer Parallelen $\Im z = \frac{\nu}{x}$ zur reellen Achse denselben Wert $\sqrt{\pi}$ wie auf dieser selbst hat. (Denn wendet man auf die Funktion e^{-z^2} und das Rechteck mit den Ecken $-T$, $+T$, $+T+i\frac{\nu}{x}$, $-T+i\frac{\nu}{x}$ den Cauchyschen Lehrsatz an und läßt sodann T ins Un-

endliche wachsen, so konvergieren die Integrale auf den vertikalen Strecken gegen 0, da der Integrand gleichmäßig gegen 0 strebt und die Länge des Integrationsweges konstant gleich $\frac{\nu}{x}$ ist.) Wir bekommen also

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi\nu^2}{x}} e^{2\pi i\nu y}$$

und hieraus für $y = 0$

$$\vartheta(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\nu^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi\nu^2}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\vartheta\left(\frac{1}{x}\right).$$

Die hier in einem speziellen Falle durchgeführte Heranziehung der Fourierschen Entwicklung zur Umformung unendlicher Reihen ist nur ein Beispiel für ein Verfahren, das sich in neuester Zeit für die Behandlung gewisser in der höheren Arithmetik vorkommender analytischer Funktionen als sehr fruchtbringend erwiesen hat.

13. Die Poissonsche Formel. Die in 12. benutzte Überlegung führt zu einer allgemeinen und sehr wichtigen Transformationsformel für unendliche Reihen, der *Poissonschen Summationsformel.* Es sei $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n)$ eine unendliche Reihe, in der $\varphi(x)$ eine solche stetige und stetig differenzierbare Funktion von x bedeutet, daß gleichmäßig für alle t aus dem Intervall $0 \leqq t < 2\pi$ die Reihen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n + t)$ und $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi'(2\pi n + t)$ absolut konvergieren. Dann ist die zweite Reihe die Ableitung der ersten nach t, und diese kann daher im Intervall $0 \leqq t < 2\pi$ in eine konvergente Fouriersche Reihe entwickelt werden. Es gilt also die Entwicklung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n + t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu t} \int_0^{2\pi} e^{-i\nu\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n + \tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \varphi(2\pi n + \tau)\, e^{-i\nu\tau} d\tau.$$

Die innere Summe läßt sich so umformen:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \varphi(2\pi n + \tau)\, e^{-i\nu\tau} d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \varphi(\tau)\, e^{-i\nu\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\, e^{-i\nu\tau} d\tau,$$

und es entsteht

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n + t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu t} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\, e^{-i\nu\tau} d\tau.$$

Setzt man hier $t = 0$, dann folgt schließlich

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\, e^{-i\nu\tau}\, d\tau,$$

und dies ist die Poissonsche Formel. Für ihre Gültigkeit ist offenbar nur erforderlich, daß alle vorkommenden Integrale existieren, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n + t)$ gleichmäßig in t für $0 \leqq t < 2\pi$ konvergiert und eine in eine Fouriersche Reihe entwickelbare Funktion darstellt.

14. Für das Intervall $0 \leqq t \leqq \pi$ bilden bereits die Funktionen

$$\sin \nu t \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

bzw.

$$\cos \nu t \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

allein je ein vollständiges Orthogonalsystem, wie man so überlegt: Eine für $0 \leqq t \leqq \pi$ gegebene stückweise glatte Funktion läßt sich in das ganze Intervall $-\pi \leqq t \leqq \pi$ so fortsetzen, daß sie in diesem Intervall stückweise glatt und ungerade bzw. gerade ist. Im ersten Fall erhalten wir ihre Entwicklung nach $\sin \nu t$, im zweiten Falle nach $\cos \nu t$, woraus ohne Schwierigkeit die behauptete Vollständigkeit der beiden Orthogonalsysteme für das Intervall $0 \leqq t \leqq \pi$ folgt.

15. Mehrfache Fouriersche Reihen. Auch für mehrdimensionale würfelähnliche Gebiete kann man mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen Orthogonalsysteme bilden. Wir beschränken uns, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, auf den „ebenen" Fall von zwei Variablen, bemerken aber, daß alles genau ebenso für beliebig viele Variable gültig bleibt.

Für das Quadrat $0 \leqq s \leqq 2\pi$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$ bilden die Funktionen

$$\begin{aligned}
&\cos \mu s \cos \nu t && (\mu = 0, 1, \ldots;\ \nu = 0, 1, \ldots)\\
&\sin \mu s \cos \nu t && (\mu = 1, 2, \ldots;\ \nu = 0, 1, \ldots)\\
&\cos \mu s \sin \nu t && (\mu = 0, 1, \ldots;\ \nu = 1, 2, \ldots)\\
&\sin \mu s \sin \nu t && (\mu = 1, 2, \ldots;\ \nu = 1, 2, \ldots)
\end{aligned}$$

ein orthogonales System. Die Entwicklungsformeln schreiben sich am einfachsten, wenn man die komplexe Schreibweise benutzt. Ist $F(s, t)$ in eine gleichmäßig konvergente doppelte Fouriersche Reihe entwickelbar, so gilt

$$F(s,t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\mu\nu}\, e^{-i(\mu s + \nu t)}, \qquad a_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} ds \int_0^{2\pi} dt\, F(s,t)\, e^{-i(\mu s + \nu t)}.$$

Die Vollständigkeitsrelation für eine stetige Funktion $F(s, t)$ und damit die Vollständigkeit des Funktionensystems ergibt sich sehr leicht

durch wiederholte Anwendung der alten Vollständigkeitsrelation für einfache Fouriersche Reihen. Bildet man nämlich die Fourierschen Koeffizienten $A_\nu(t)$ von $F(s,t)$ in bezug auf s, so gilt für sie die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |A_\nu(t)|^2 = \int_0^{2\pi} |F(s,t)|^2 ds .$$

Wendet man hierin auf jedes einzelne $A_\nu(t)$, das auch stetig in t ist, die Vollständigkeitsrelation an, wobei die gliedweise Integration wegen der gleichmäßigen Konvergenz[1]) erlaubt ist, so gewinnt man die gewünschte Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{\nu,\mu=-\infty}^{\infty} |a_{\mu\nu}|^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(s,t)|^2 ds\, dt .$$

Endlich ergibt sich, ebenso wie auf S. 51, die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Fourierschen Reihe von $F(s,t)$, wenn $\frac{\partial^2 F(s,t)}{\partial s\, \partial t}$ existiert und stetig ist.

Ebenso gilt ein Analogon der Poissonschen Summationsformel unter analogen Voraussetzungen wie im Falle einer Variablen.

§ 6. Das Fouriersche Integral.

1. Plausibilitätsbetrachtungen. Es liegt nahe, in der Fourierschen Reihe einer im Intervall $-l < x < l$ gegebenen Funktion $f(x)$

$$(28) \qquad f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu e^{i\nu\frac{\pi}{l}x}, \qquad \alpha_\nu = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, e^{-i\nu\frac{\pi}{l}t}\, dt$$

den Grenzübergang $l \to \infty$ zu versuchen, um sich von dem lästigen Zwange der periodischen Fortsetzung von $f(x)$ zu befreien und eine Darstellung einer für alle reellen x definierten, nicht periodischen Funktion

[1]) Diese folgt aus dem *Satze von Dini:* Wenn eine in einem abgeschlossenen Gebiete G konvergente Reihe *positiver* Funktionen $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(t)$ eine stetige Funktion $S(t)$ darstellt, so konvergiert sie gleichmäßig. In aller Kürze sei der Beweis skizziert. Wir setzen $S_n(t) = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(t)$, $S(t) = S_n(t) + R_n(t)$. Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es eine positive Zahl α, eine ins Unendliche wachsende Nummernfolge $n_1, n_2, n_3, \ldots$ und zugehörige Werte $t_1, t_2, t_3, \ldots$ in G, so daß $R_{n_i}(t_i) \geqq \alpha$, also $S_{n_i}(t_i) \leqq S(t_i) - \alpha$ ist. Wir können dabei annehmen, daß die Werte t_i gegen einen Grenzwert t aus G konvergieren. Nun sei N eine fest gewählte Nummer; dann ist für $n_i \geqq N$ auch $S_{n_i}(t_i) \geqq S_N(t_i)$, also $S_N(t_i) \leqq S(t_i) - \alpha$. Hier lassen wir i über alle Grenzen wachsen und erhalten wegen der Stetigkeitsvoraussetzungen $S_N(t) \leqq S(t) - \alpha$, was sicherlich bei hinreichend großem N unmöglich ist.

zu gewinnen. Wir wollen dabei die Voraussetzung aufrecht erhalten, daß $f(x)$ in jedem endlichen Intervall stückweise glatt und an den Sprungstellen gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Grenzwerte von rechts und von links ist, und die weitere Voraussetzung hinzufügen, daß das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ existiert.

Setzen wir $\frac{\pi}{l} = \delta$, so entsteht

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta \int_{-l}^{l} f(t)\, e^{-i\nu\delta(t-x)}\, dt,$$

woraus wir durch den Grenzübergang $l \to \infty$, d. h. $\delta \to 0$, die Formel

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iu(t-x)}\, dt \tag{29}$$

als plausibel entnehmen; für reelle Funktionen $f(x)$ können wir sie auch in der Gestalt

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t-x)\, dt \tag{30}$$

schreiben.

2. Beweis des Fourierschen Integraltheorems. Den strengen Beweis für die Gültigkeit dieser *„Fourierschen Integralformel"* führen wir am besten nicht durch Rechtfertigung des Grenzüberganges, sondern durch unmittelbare Bestätigung der Gleichungen (29) bzw. (30).

Aus dem Dirichletschen Integral (26)

$$\lim_{v \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} f(x+t) \frac{\sin vt}{t}\, dt = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = f(x),$$

wobei a eine beliebige positive Zahl bedeutet, folgt

$$\pi f(x) = \lim_{v \to \infty} \int_{-a}^{a} f(x+t)\, dt \int_{0}^{v} \cos ut\, du = \lim_{v \to \infty} \int_{0}^{v} du \int_{-a}^{a} f(x+t) \cos ut\, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} du \int_{-a}^{a} f(x+t) \cos ut\, dt.$$

Wir behaupten, daß auch im inneren Integral die Integration von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt werden darf. Ist nämlich $A > a$, so wird

$$\int_{0}^{v} \int_{-A}^{A} - \int_{0}^{v} \int_{-a}^{a} = \int_{0}^{v} \int_{-A}^{-a} + \int_{0}^{v} \int_{a}^{A} = \int_{-A}^{-a} \int_{0}^{v} + \int_{a}^{A} \int_{0}^{v},$$

also, da nach Voraussetzung $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ existiert,

$$\left|\int_0^v\int_{-A}^{A} - \int_0^v\int_{-a}^{a}\right| \leqq \left|\int_{-A}^{-a} f(x+t)\frac{\sin vt}{t}\,dt\right| + \left|\int_a^A f(x+t)\frac{\sin vt}{t}\,dt\right|$$

$$\leqq \frac{1}{a}\left(\int_{-A}^{-a}|f(x+t)|\,dt + \int_a^A |f(x+t)|\,dt\right)$$

$$\leqq \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)|\,dt = \frac{\text{konst.}}{a}.$$

Läßt man hierin A bei festem v ins Unendliche wachsen, so folgt

$$\left|\int_0^v\int_{-\infty}^{\infty} - \int_0^v\int_{-a}^{a}\right| \leqq \frac{\text{konst.}}{a},$$

wonach der Grenzübergang $v \to \infty$ zu

$$\left|\lim_{v\to\infty}\int_0^v\int_{-\infty}^{\infty} - \pi f(x)\right| < \frac{\text{konst.}}{a}$$

führt. Durch passende Wahl von a kann die rechte Seite beliebig klein gemacht werden, womit die Behauptung und damit die gewünschte Formel (30) bewiesen ist.

Da $\cos u(t-x)$ eine gerade Funktion von u ist, läßt sich die obige Gleichung auch in die Form

$$\frac{\pi}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt$$

bringen; andererseits ist $\sin u(t-x)$ eine ungerade Funktion von u, also

$$0 = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin u(t-x)\,dt,$$

falls das Integral konvergiert. Durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen erhält man

$$\frac{\pi}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-iu(t-x)}\,dt,$$

d. h. die Formel (29).

Durch wiederholte Anwendung der Formel (29) entstehen *analoge Formeln für stetige Funktionen in mehreren Variablen* bzw. für stückweise stetige Funktionen, gültig an den Stetigkeitsstellen, z. B.

$$4\pi^2 F(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int du\, dv \int_{-\infty}^{\infty}\int F(t,s)\, e^{-i[u(t-x)+v(s-y)]}\, dt\, ds$$

unter der Voraussetzung der Existenz von

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int |F(s,t)|\, ds\, dt.$$

3. Reziprozitätsformeln. Das Fouriersche Integraltheorem (29) nimmt eine besonders elegante Gestalt an, wenn man

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iut}\, dt$$

setzt. Dann besagt es nämlich, daß sich die Gleichungen

$$(31) \qquad \begin{cases} g(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iut}\, dt, \\ f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, e^{iut}\, du \end{cases}$$

gegenseitig bedingen. Man hat in diesen Gleichungen, wenn man die linken Seiten als bekannt annimmt, ein Paar von sogenannten Integralgleichungen vor sich, von denen jede die Auflösung der anderen liefert und die vollständige Reziprozität zeigen. Es entsprechen ihnen die reellen Gleichungen (vgl. § 7, 1) für gerade bzw. ungerade Funktionen

$$(32) \qquad \begin{cases} g(u) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_{0}^{\infty} f(t) \cos ut\, dt, \\ f(t) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_{0}^{\infty} g(u) \cos ut\, du \end{cases}$$

$$(32') \qquad \begin{cases} g(u) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_{0}^{\infty} f(t) \sin ut\, dt, \\ f(t) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_{0}^{\infty} g(u) \sin ut\, du \end{cases}$$

§ 7. Beispiele für das Fouriersche Integral.

1. Die Fouriersche Integralformel

$$(30)\quad \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt \\ \quad = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \cos u x\,du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u t\,dt + \dfrac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin u x\,du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin u t\,dt \end{cases}$$

vereinfacht sich, wenn $f(x)$ eine gerade Funktion ist, zu

$$(30')\qquad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos u x\,du \int_0^\infty f(t)\cos u t\,dt,$$

wenn $f(x)$ ungerade ist, hingegen zu

$$(30'')\qquad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin u x\,du \int_0^\infty f(t)\sin u t\,dt.$$

2. Der Dirichletsche diskontinuierliche Faktor. Es sei $f(x)$ gerade und

$$(33)\qquad \begin{cases} f(x) = 1 & \text{für} \quad 0 \leqq x < 1, \\ f(x) = \frac{1}{2} & \text{für} \quad x = 1, \\ f(x) = 0 & \text{für} \quad x > 1. \end{cases}$$

Dann erhält man

$$(33')\qquad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos u x\,du \int_0^1 \cos u t\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u \cos u x}{u}\,du.$$

Den rechtsstehenden Ausdruck nennt man den „Dirichletschen diskontinuierlichen Faktor"; er kann bei vielen Problemen mit großem Nutzen angewandt werden.

3. Wählen wir für $x > 0$

$$f(x) = e^{-\beta x} \quad \text{(} \beta > 0\text{)},$$

so ergibt sich entweder

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos u x\,du \int_0^\infty e^{-\beta t}\cos u t\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\beta \cos u x}{\beta^2 + u^2}\,du$$

oder

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin u x\,du \int_0^\infty e^{-\beta t}\sin u t\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{u \sin u x}{\beta^2 + u^2}\,du,$$

je nachdem wir $f(x)$ für negative Werte von x als gerade oder ungerade Funktion fortzusetzen wünschen; im zweiten Falle haben wir $f(0) = 0$ zu setzen. Das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos u x}{\beta^2 + u^2}\, du = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-\beta x}}{\beta} \qquad (\beta > 0)$$

wird auch als Laplacesches Integral bezeichnet.

4. Ein besonders interessantes Beispiel liefert die Funktion

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Wegen

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\cos u t\, dt = e^{-\frac{u^2}{2}}\ ^{1})$$

stimmen hier nämlich die beiden sich gegenseitig auflösenden Integralgleichungen

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos u t\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\cos u t\, dt = e^{-\frac{u^2}{2}},$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(u)\cos u t\, du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}\cos u t\, du = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

völlig überein.

Weitere wichtige Anwendungen des Fourierschen Integrals werden wir bei der Lösung partieller Differentialgleichungen kennen lernen.

§ 8. Die Polynome von Legendre.

1. Erzeugung durch Orthogonalisierung der Potenzen $1, x, x^2, \ldots$. Ein in mancher Beziehung noch einfacheres Beispiel eines orthogonalen Funktionensystems als die trigonometrischen Funktionen erhalten wir, wenn wir die Potenzen $1, x, x^2, \ldots$ für ein gegebenes Grundgebiet G, z. B. die Strecke $-1 \leqq x \leqq +1$, nach dem Verfahren von § 1 orthogonalisieren. Dabei entsteht eine Folge von zueinander orthogonalen, normierten Polynomen, die eindeutig bestimmt sind, wenn wir z. B. noch verlangen, daß der Koeffizient der höchsten Potenz von x positiv werden soll.

Wir behaupten, daß sie bis auf konstante Faktoren mit den Polynomen

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n (x^2-1)^n}{d x^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{34}$$

[1]) Diese Gleichung stellt im wesentlichen den reellen Teil einer auf S. 58 mit Hilfe des Cauchyschen Satzes bewiesenen Relation dar.

übereinstimmen, welche als *Legendresche Polynome oder Kugelfunktionen*[1]) bezeichnet werden. Da der Orthogonalisierungsprozeß zeigt, daß es bis auf konstante Faktoren nur ein System von orthogonalen Polynomen gibt, bei denen jeder Grad vertreten ist, braucht nur bewiesen zu werden, daß $P_n(x)$ ein Polynom n^{ten} Grades ist und das System der $P_n(x)$ die Orthogonalitätseigenschaft besitzt. Nun ist offenbar $P_n(x)$ wirklich ein Polynom n^{ten} Grades; man erhält z. B.

$$(34') \quad \begin{cases} P_1(x) = x, & P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \\ P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, & P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} \end{cases}$$

und allgemein

$$(34'') \quad P_n(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} + - \cdots \right\},$$

wobei das letzte Glied in der Klammer lautet

$$+ (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{2 \cdot 4 \cdots n (2n-1)(2n-3) \cdots (n+1)} \quad \text{für gerades } n,$$

$$+ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n!}{2 \cdot 4 \cdots (n-1)(2n-1)(2n-3) \cdots (n+2)} x \quad \text{für ungerades } n.$$

Für den Beweis, daß die $P_n(x)$ ein Orthogonalsystem bilden, werde zur Abkürzung $(x^2-1)^n = u_n(x)$ gesetzt; dann gilt für jede ganze nicht negative Zahl $m < n$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^m\, dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} u_n^{(n)}(x)\, x^m\, dx = 0 \qquad (m < n),$$

wie man bestätigt, wenn man durch wiederholte Teilintegration allmählich x^m beseitigt und dabei beachtet, daß alle Ableitungen von $u_n(x)$ bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ an den Grenzen des Integrationsintervalls verschwinden. Daraus folgt aber, daß auch

$$(35) \qquad \int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = 0 \qquad (m < n)$$

ist, daß also wirklich zwei verschiedene der Polynome zueinander ortho-

[1]) *Legendre, A. M.*: Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes. Mém. math. phys., prés. à l'Acad. sc. par divers sav., Bd. 10, S. 411—434. 1785. — Recherches sur la figure des planètes. Mém. math. phys., tirés des reg. de l'Acad. sc., S. 370—389. 1784 (1787).

gonal sind. Zur Normierung berechnen wir durch fortgesetzte Teilintegration $\int_{-1}^{1} [u_n^{(n)}(x)]^2 dx$:

$$\int_{-1}^{1} u_n^{(n)} u_n^{(n)} dx = -\int_{-1}^{1} u_n^{(n-1)} u_n^{(n+1)} dx = \int_{-1}^{1} u_n^{(n-2)} u_n^{(n+2)} dx = \dots$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} u_n u_n^{(2n)} dx = (2n)! \int_{-1}^{1} (1-x)^n (1+x)^n dx;$$

da

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^n (1+x)^n dx = \frac{n}{n+1} \int_{-1}^{1} (1-x)^{n-1} (1+x)^{n+1} dx = \dots$$

$$= \frac{n(n-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots 2n} \int_{-1}^{1} (1+x)^{2n} dx = \frac{(n!)^2}{(2n)!(2n+1)} 2^{2n+1}$$

ist, wird also

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}, \tag{36}$$

und die gesuchten normierten Polynome erhalten die Gestalt

$$\begin{cases} \varphi_\nu(x) = \sqrt{\dfrac{2\nu-1}{2}} P_{\nu-1}(x) \\ \qquad = \sqrt{\dfrac{2\nu-1}{2}} \dfrac{1}{2^{\nu-1}(\nu-1)!} \dfrac{d^{\nu-1}(x^2-1)^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}} \end{cases} \quad (\nu = 1, 2, \dots). \tag{37}$$

2. Differentialgleichung und erzeugende Funktion. Die Legendreschen Polynome genügen der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$[y'(x^2-1)]' - n(n+1)y = 0 \tag{38}$$

oder

$$y''(x^2-1) + 2xy' - n(n+1)y = 0. \tag{38'}$$

Dies erkennt man durch $(n+1)$ malige Differentiation der Gleichung

$$(x^2-1)u' = 2nxu,$$

wobei man im Ergebnis $u^{(n)} = 2^n n! y$ zu setzen hat[1]).

[1]) Aus dieser Differentialgleichung geht z. B. hervor, daß alle Nullstellen von $P_n(x)$, die zufolge der Definition (34) wegen des Rolleschen Satzes sämtlich reell sind und dem Intervall $-1 < x < 1$ angehören, verschieden sind, weil in einer mehrfachen Nullstelle vermöge der Differentialgleichung die zweite und alle höheren Ableitungen von $P_n(x)$ verschwinden müßten.

Von Wichtigkeit sind die Kugelfunktionen namentlich für die Potentialtheorie, in der sie als Entwicklungskoeffizienten einer *„erzeugenden Funktion"* auftreten. Entwickelt man nämlich den reziproken Abstand zweier in den Entfernungen 1 und $t < 1$ vom Nullpunkte gelegenen Punkte, deren Radienvektoren den Winkel arccos x einschließen, also die Größe $\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$, nach Potenzen von t, so findet man gerade

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n. \tag{39}$$

Aus dieser Darstellung lassen sich viele Eigenschaften der Legendreschen Polynome besonders einfach ablesen, z. B. entnimmt man ihr unmittelbar — ebenso leicht übrigens aus (34) —, daß

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad P_n(1) = 1 \tag{40}$$

ist, während man durch partielle Differentiation der erzeugenden Funktion nach t als Rekursionsformel für drei aufeinander folgende Kugelfunktionen die Gleichung

$$(n+1)\, P_{n+1}(x) - x(2n+1)\, P_n(x) + n\, P_{n-1}(x) = 0 \tag{41}$$

gewinnt.

3. Vollständigkeit. Daß das aus den Polynomen $\varphi_\nu(x)$ der Formel (37) gebildete normierte Orthogonalsystem die Vollständigkeitseigenschaft besitzt, folgt aus dem Weierstraßschen Approximationssatz, den wir im nächsten Paragraphen beweisen werden. Dieser wichtige Satz sagt aus, *daß jede in einem abgeschlossenen Intervall* $a \leqq x \leqq b$, *z. B. dem Intervall* $-1 \leqq x \leqq +1$, *stetige Funktion* $f(x)$ *im ganzen Intervall gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.* Andererseits läßt sich jedes derartige Approximationspolynom, da es zu jedem $\nu \geqq 1$ ein Polynom φ_ν vom Grade $\nu - 1$ gibt, als lineare Kombination der φ_ν ausdrücken, womit der Beweis erbracht ist.

§ 9. Der Approximationssatz von Weierstraß.

Für den eben benutzten *Weierstraßschen Approximationssatz*[1]) wollen wir in diesem Paragraphen zwei Beweise geben. Der erste folgt fast unmittelbar aus dem Fejérschen Satz über die arithmetischen Mittel der Partialsummen der Fourierschen Reihe; der zweite bietet den Vorteil, sich besonders leicht auch auf Funktionen von mehreren Veränderlichen übertragen zu lassen.

---

[1]) *Weierstraß, K.:* Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente. Sitzungsber. Akad. Berlin, 1885, S. 633—639, S. 789—805, sowie auch Werke Bd. 3, S. 1—37, Berlin 1903.

1. Erster Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß das betrachtete Intervall $a \leqq x \leqq b$ ganz dem Intervall $0 < x < 2\pi$ eingebettet, also $0 < a < b < 2\pi$ ist; denn durch eine lineare Transformation der Veränderlichen x von der Gestalt $y = px + q$, die Polynome in Polynome überführt, läßt sich diese Lage immer erreichen. Wir erklären dann die Funktion $f(x)$ über das ursprüngliche Intervall $a \leqq x \leqq b$ hinaus für alle x als stetige Funktion, indem wir zunächst $f(x)$ irgendwie stetig bis zu $x = 0$ und $x = 2\pi$ mit $f(0) = f(2\pi)$ und nachher durch die Funktionalgleichung $f(x + 2\pi) = f(x)$ überallhin fortsetzen. Nach § 4 gilt dann bei beliebig klein vorgegebenem $\delta > 0$ für die dort eingeführten arithmetischen Mittel $S_n(x)$ bei $n > n_0(\delta)$ gleichmäßig in x, insbesondere für $a \leqq x \leqq b$

$$|f(x) - S_n(x)| < \frac{\delta}{2}. \tag{42'}$$

$S_n(x)$ läßt sich als trigonometrisches Polynom in eine beständig konvergente Potenzreihe entwickeln, die in $a \leqq x \leqq b$ gleichmäßig konvergiert, so daß man in ihr einen Abschnitt, d. h. ein Polynom $P(x)$ mit

$$|S_n(x) - P(x)| < \frac{\delta}{2} \tag{42''}$$

für $a \leqq x \leqq b$ bestimmen kann. Die aus (42') und (42'') folgende Ungleichung

$$|f(x) - P(x)| < \delta \tag{43}$$

bildet aber gerade den Inhalt des Weierstraßschen Satzes.

2. Zweiter Beweis. Für den zweiten Beweis nehmen wir an, daß das Intervall $a \leqq x \leqq b$ ganz im Inneren des Intervalls $0 < x < 1$ gelegen ist, so daß also zwei die Ungleichungen $0 < \alpha < a < b < \beta < 1$ befriedigende Zahlen α und β gefunden werden können, und denken uns die im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktion $f(x)$ irgendwie stetig bis an die Grenzen des Intervalls $\alpha \leqq x \leqq \beta$ fortgesetzt.

Zunächst betrachten wir das Integral

$$J_n = \int_0^1 (1 - v^2)^n \, dv. \tag{44}$$

Wie man sogleich erkennt, konvergiert J_n mit wachsendem n gegen Null. Ist δ eine feste positive Zahl des Intervalls $0 < \delta < 1$ und

$$J_n^* = \int_\delta^1 (1 - v^2)^n \, dv, \tag{45}$$

so behaupten wir, daß

$$\lim_{n \to \infty} \frac{J_n^*}{J_n} = 0 \tag{46}$$

ist, daß also, wie ohne weiteres plausibel erscheint, bei hinreichend großem n das Integral von 0 bis δ für den Wert des ganzen Integrals von 0 bis 1 ausschlaggebend ist. In der Tat gilt

$$J_n = \int_0^1 (1+v)^n (1-v)^n \, dv > \int_0^1 (1-v)^n \, dv = \frac{1}{n+1},$$

$$J_n^* = \int_\delta^1 (1-v^2)^n \, dv < (1-\delta^2)^n (1-\delta) < (1-\delta^2)^n,$$

$$\frac{J_n^*}{J_n} < (n+1)(1-\delta^2)^n, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{J_n^*}{J_n} = 0.$$

Nunmehr bilden wir unter der Voraussetzung $a \leqq x \leqq b$ die Ausdrücke

$$P_n(x) = \frac{\int_\alpha^\beta f(u)\,[1-(u-x)^2]^n \, du}{\int_{-1}^1 (1-u^2)^n \, du} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{47}$$

Sie sind offenbar Polynome in x vom Grade $2n$, deren Koeffizienten Quotienten bestimmter Integrale sind, und leisten, wie wir zeigen wollen, die geforderte Approximation.

Für den Zähler erhalten wir durch die Substitution $u = v + x$

$$\int_\alpha^\beta f(u)\,[1-(u-x)^2]^n \, du = \int_{\alpha-x}^{\beta-x} f(v+x)\,(1-v^2)^n \, dv = \int_{\alpha-x}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\beta-x} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3,$$

worin die positive Zahl δ des Intervalls $0 < \delta < 1$ noch geeignet festgelegt werden wird. I_2 läßt sich umformen zu

$$\mathrm{I}_2 = f(x)\int_{-\delta}^{\delta} (1-v^2)^n \, dv + \int_{-\delta}^{\delta} [f(v+x) - f(x)]\,(1-v^2)^n \, dv$$

$$= 2f(x)\,(J_n - J_n^*) + \int_{-\delta}^{\delta} [f(v+x) - f(x)]\,(1-v^2)^n \, dv.$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f(x)$ im Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ kann zu beliebig klein vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein nur von ε abhängiges $\delta = \delta(\varepsilon)$ des Intervalls $0 < \delta < 1$ derart ermittelt werden, daß für $|v| \leqq \delta$ und $a \leqq x \leqq b$ die Beziehung $|f(v+x) - f(x)| \leqq \varepsilon$ besteht; dann folgt

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta} [f(v+x) - f(x)]\,(1-v^2)^n \, dv\right| \leqq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} (1-v^2)^n \, dv < \varepsilon \int_{-1}^{1} (1-v^2)^n \, dv = 2\varepsilon J_n.$$

Ist ferner M das Maximum von $f(x)$ für $\alpha \leqq x \leqq \beta$, so bekommen wir

$$|\mathrm{I}_1| < M\int_{-1}^{-\delta}(1-v^2)^n\,dv = M\,J_n^*, \qquad |\mathrm{I}_3| < M\int_{\delta}^{1}(1-v^2)^n\,dv = M\,J_n^*,$$

insgesamt also, da der Nenner in $P_n(x)$ gleich $2J_n$ ist,

$$|P_n(x) - f(x)| < 3M\,\frac{J_n^*}{J_n} + 2\varepsilon.$$

Durch passende Wahl von n kann wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{J_n^*}{J_n} = 0$ die rechte Seite kleiner als 3ε gemacht werden; es wird also wirklich $f(x)$ durch die Polynome $P_n(x)$ in $a \leqq x \leqq b$ gleichmäßig approximiert.

3. Ausdehnung des Ergebnisses auf Funktionen von mehreren Veränderlichen. Ebenso zeigt man, daß eine für $a_i \leqq x_i \leqq b_i$ $(i = 1, \ldots, m;\ 0 < a_i,\ b_i < 1)$ stetige Funktion $f(x_1, \ldots, x_m)$ von m Veränderlichen $x_1, \ldots, x_m$ durch die Polynome

$$P_n(x_1,\ldots,x_m) = \frac{\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_m}^{\beta_m} f(u_1,\ldots,u_n)\,[1-(u_1-x_1)^2]^n\ldots[1-(u_m-x_m)^2]^n\,du_1\ldots du_m}{\Big[\int_{-1}^{1}(1-u^2)^n\,du\Big]^m}$$

gleichmäßig approximiert wird; diese Verallgemeinerung auf Funktionen von mehreren Veränderlichen wird uns in der Theorie der Integralgleichungen von Nutzen sein.

§ 10. Beispiele anderer Orthogonalsysteme.

1. Verallgemeinerung der zu den Legendreschen Polynomen führenden Fragestellung. Das Problem, von dem wir bei der Einführung der Legendreschen Polynome ausgingen, läßt sich folgendermaßen verallgemeinern:

Im Intervall $a \leqq x \leqq b$ sei eine nicht negative „Belegungsfunktion" $p(x)$ gegeben; es sollen die Funktionensysteme untersucht werden, die durch Orthogonalisierung der Funktionen $\sqrt{p(x)},\ x\sqrt{p(x)},\ x^2\sqrt{p(x)}, \ldots$ für das Intervall $a \leqq x \leqq b$ entstehen. Offenbar werden im orthogonalisierten System die Faktoren von $\sqrt{p(x)}$ Polynome $Q_0(x),\ Q_1(x) \ldots$ vom Grade 0, 1, ..., die durch geeignete Nebenbedingungen eindeutig festgelegt werden können und als *„die zur Belegung $p(x)$ gehörigen orthogonalen Polynome"* bezeichnet werden.

Beispielsweise ergeben sich

für $a = -1,\ b = 1$ und $p(x) = 1$

die Legendreschen Polynome $P_n(x)$,

für $a = -1$, $b = 1$ und $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

die *Tschebyscheffschen Polynome*

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x),$$

für $a = -1$, $b = 1$ und $p(x) = \sqrt{1-x^2}$

die Polynome

$$Q_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}},$$

für $a = 0$, $b = 1$ und $p(x) = (1-x)^p (1+x)^q$ $(p > -1, q > -1)$

die *Jacobischen oder hypergeometrischen Polynome*,

für $a = -\infty$, $b = \infty$ und $p(x) = e^{-x^2}$

die *Hermiteschen Polynome*,

für $a = 0$, $b = \infty$ und $p(x) = e^{-x}$

die *Laguerreschen Polynome*.

Die Tschebyscheffschen, Jacobischen, Hermiteschen und Laguerreschen Polynome wollen wir etwas eingehender betrachten.

2. Die Tschebyscheffschen Polynome[1]). Die Tschebyscheffschen Polynome

$$T_0(x) = 1\,,\quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) \quad [2] \qquad (n \geqq 1) \tag{48}$$

bilden wegen

$$2\int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{1}{2^{n+m-2}} \int_0^{2\pi} \cos n\vartheta \cos m\vartheta \, d\vartheta = 0 \tag{49}$$

für $n \neq m$

offenbar ein Orthogonalsystem von Polynomen zur Belegung $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für das Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$. Sie sind dadurch ausgezeichnet, daß bei ihnen die Abweichung von Null, d. h. das Maximum des absoluten Betrages, im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ den kleinsten Wert annimmt, der bei einem Polynom n^{ten} Grades mit reellen Koeffi-

[1]) *Tschebyscheff, P. L.:* Sur les questions de minima, qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions. Mém. Acad. sc. Pétersb., Serie 6, Bd. 7, S. 199—291. 1859. — Œuvres, Bd. 1, S. 271—378, insb. S. 295—301. St. Petersburg 1899.

[2]) Zufolge der bekannten Formel

$$\cos n\vartheta = \cos^n \vartheta - \binom{n}{2} \cos^{n-2}\vartheta \sin^2\vartheta + \binom{n}{4} \cos^{n-4}\vartheta \sin^4\vartheta - \cdots$$

sind diese Ausdrücke Polynome in x.

zienten und höchstem Koeffizienten 1, wie es die $T_n(x)$ sind, überhaupt möglich ist. Setzen wir nämlich zur Abkürzung $\arccos x = \vartheta$ und $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, so ist für

$$\begin{array}{lccccc} \vartheta = 0\,, & \frac{\pi}{n}\,, & \frac{2\pi}{n}\,, & \ldots\,, & \pi: \\ T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\,, & \frac{-1}{2^{n-1}}\,, & \frac{1}{2^{n-1}}\,, & \ldots\,, & \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\,, \end{array}$$

allgemein

$$T_n(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}\,.$$

Würde nun ein Polynom $R_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ mit reellen Koeffizienten im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ weniger von Null abweichen als $T_n(x)$, so müßte

$$T_n(x_0) - R_n(x_0) > 0\,, \quad T_n(x_1) - R_n(x_1) < 0\,, \quad T_n(x_2) - R_n(x_2) > 0\,, \ldots$$

sein. Die ganze rationale Funktion $T_n(x) - R_n(x)$ hätte also im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ mindestens n Wurzeln; dies ist aber ausgeschlossen, da sie höchstens den Grad $n-1$ besitzt. Normierte Polynome erhält man aus den $T_n(x)$ durch Division mit $\sqrt{\int_{-1}^{1} T_n^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2^{2n-1}}}$.

Die Tschebyscheffschen Polynome treten auch als Entwicklungskoeffizienten der erzeugenden Funktion

$$\psi(x, t) = \frac{1 - t^2}{1 - 2tx + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\,(2t)^n \tag{50}$$

auf; drei aufeinander folgende unter ihnen sind durch die Relation

$$T_{n+1}(x) - x\,T_n(x) + \frac{1}{4}\,T_{n-1}(x) = 0 \tag{51}$$

verknüpft, während sie selbst der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1 - x^2)\,y'' - x\,y' + n^2 y = 0 \tag{52}$$

Genüge leisten.

3. Die Jacobischen Polynome[1]. Die Jacobischen Polynome $G_n(p, q, x)$ entstehen für $a = 0$, $b = 1$ und die Belegungsfunktion

$$p(x) = (1 - x)^p\,(1 + x)^q \quad \text{mit} \quad p > -1, q > -1.$$

[1]) *Jacobi, C. G. J.:* Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe. J. reine angew. Math. Bd. 56, S. 149—165. 1859. — Werke Bd. 6, S. 184—202. Berlin 1891.

Sie lassen sich auch aus der hypergeometrischen Reihe

$$(53) \qquad F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots$$

gewinnen, wenn man in dieser β durch die negative ganze Zahl $-n$, α durch $p+n$ und γ durch q ersetzt, und genügen daher der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$(54) \qquad x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

oder speziell

$$(54') \qquad x(1-x)G_n''(x) + [q-(p+1)x]G_n'(x) + (p+n)nG_n(x) = 0,$$

für welche sie die einzigen ganzen rationalen Lösungen darstellen. Die ersten unter ihnen lauten

$$(55) \quad \begin{cases} G_0(p,q,x) = 1, \\ G_1(p,q,x) = 1 - \binom{1}{1}\dfrac{p+1}{q}x, \\ G_2(p,q,x) = 1 - \binom{2}{1}\dfrac{p+2}{q}x + \binom{2}{2}\dfrac{(p+2)(p+3)}{q(q+1)}x^2, \\ G_3(p,q,x) = 1 - \binom{3}{1}\dfrac{p+3}{q}x + \binom{3}{2}\dfrac{(p+3)(p+4)}{q(q+1)}x^2 \\ \qquad\qquad - \binom{3}{3}\dfrac{(p+3)(p+4)(p+5)}{q(q+1)(q+2)}x^3; \end{cases}$$

allgemein gestatten sie die Darstellung

$$(55') \qquad G_n(p,q,x) = \frac{x^{1-q}(1-x)^{q-p}}{q(q+1)\cdots(q+n-1)}\frac{d^n}{dx^n}[x^{q+n-1}(1-x)^{p+n-q}].$$

Aus ihr erschließt man, daß sie auch vermöge einer erzeugenden Funktion durch die Beziehung

$$(56) \quad \begin{cases} \dfrac{(1-x)^{1-q}(1+x)^{q-p}\left(t-1+\sqrt{1-2tx+t^2}\right)^{q-1}\left(t+1-\sqrt{1-2tx+t^2}\right)^{p-q}}{t^{p-1}\sqrt{1-2tx+t^2}} \\ \quad = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{q+n-1}{n}G_n\left(p,q,\frac{1-x}{2}\right)t^n \end{cases}$$

definiert werden können. Für $p=q=1$ erhält man die Kugelfunktionen

$$(57') \qquad \frac{t}{2^n}\cdot P_n(x) = G_n\left(1,1,\frac{1-x}{2}\right) = F\left(n+1,-n,1,\frac{1-x}{2}\right),$$

während sich für $p=0$, $q=\frac{1}{2}$ im wesentlichen die Tschebyscheffschen Polynome ergeben

$$(57'') \qquad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}G_n\left(0,\frac{1}{2},\frac{1+x}{2}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}F\left(n,-n,\frac{1}{2},\frac{1-x}{2}\right).$$

4. Die Hermiteschen Polynome[1]. Die Hermiteschen Polynome $H_n(x)$, für welche $a = -\infty$, $b = \infty$ und $p(x) = e^{-x^2}$ ist, definiert man zweckmäßig mit Hilfe einer erzeugenden Funktion, indem man

$$\psi(x,t) = e^{-t^2+2tx} = e^{x^2} e^{-(t-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \tag{58}$$

setzt, woraus man sofort

$$H_n(x) = \left(\frac{d^n \psi(x,t)}{dt^n}\right)_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \tag{59}$$

entnimmt; es ist also das n^{te} Hermitesche Polynom $H_n(x)$ der mit dem Faktor $(-1)^n e^{x^2}$ multiplizierte n^{te} Differentialquotient der Funktion e^{-x^2}. Aus $\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = 2t\psi(x,t)$ ergibt sich

$$H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x), \qquad n \geqq 1 \tag{60}$$

aus $\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + 2(t-x)\psi(x,t) = 0$

$$H_{n+1}(x) - 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) = 0, \qquad n \geqq 1 \tag{61}$$

und durch Kombination der beiden letzten Formeln

$$H_n''(x) - 2x H_n'(x) + 2n H_n(x) = 0, \qquad n \geqq 0 \tag{62}$$

als lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung für die $H_n(x)$. Die ersten Hermiteschen Polynome lauten

$$\begin{cases} H_0(x) = 1, & H_1(x) = 2x, \\ H_2(x) = 4x^2 - 2, & H_3(x) = 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12; \end{cases} \tag{63}$$

man kann natürlich auch einen expliziten Ausdruck für das allgemeine Hermitesche Polynom $H_n(x)$ angeben:

$$\begin{cases} H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} \\ \qquad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} + \cdots. \\ \text{Das letzte Glied ist} \\ \qquad + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \qquad \text{für gerade } n, \\ \qquad + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!} 2x \qquad \text{für ungerade } n. \end{cases} \tag{63'}$$

[1] *Hermite, Ch.:* Sur un nouveau développement en série de fonctions. C. R. Acad. sc. Paris Bd. 58, S. 93—100, S. 266—273. — Œuvres, Bd. 2, S. 293—312. Paris 1908. — Sur quelques développements en série de fonctions de plusieurs variables. Ib. Bd. 60, S. 370—377, S. 432—440, S. 461—466, S. 512—518. 1865. — Ib. S. 319—346.

Die Orthogonalitätseigenschaft der Hermiteschen Polynome erschließt man aus

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\, H_n(x)\, e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\, \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\, dx$$

für $n > m$ durch wiederholte Teilintegration unter Beachtung der Formel (60) und der Tatsache, daß für unendlich große Werte von x^2 alle Ableitungen von e^{-x^2} verschwinden:

$$(64)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\, H_n(x)\, e^{-x^2} dx = (-1)^{n-1}\, 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}\, \frac{d^{n-1} e^{-x^2}}{dx^{n-1}}\, dx = \cdots \\ \qquad = (-1)^{n-m} 2^m m! \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} H_0(x)\, \frac{d^{n-m} e^{-x^2}}{dx^{n-m}}\, dx = 0; \end{cases}$$

zur Normierung kann man für $n = m$ ebenso

$$(65)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x)\, e^{-x^2} dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} H_0(x)\, e^{-x^2} dx = 2^n n!\, \sqrt{\pi}$$

berechnen; die Funktionen des normierten Orthogonalsystems sind dann

$$(66)\qquad \varphi_\nu(x) = \frac{H_{\nu-1}(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^{\nu-1}(\nu-1)!\,\sqrt{\pi}}}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots.$$

5. Die Laguerreschen Polynome[1]**.** Das Laguerresche Polynom $L_n(x)$ $(a = 0,\ b = +\infty,\ p(x) = e^{-x})$ tritt als Faktor von e^{-x} in der n^{ten} Ableitung der Funktion $x^n e^{-x}$ auf:

$$(67)\quad \begin{cases} L_n(x) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \\ \qquad = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} n(n-1)\ldots(k+1)\, x^k \\ \qquad = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} n(n-1)\ldots(n-k+1)\, x^{n-k} \\ \qquad = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{[n(n-1)\ldots(n-k+1)]^2}{k!}\, x^{n-k} \\ \qquad = (-1)^n \left(x^n - \dfrac{n^2}{1!}\, x^{n-1} + \dfrac{n^2(n-1)^2}{2!}\, x^{n-2} + \cdots + (-1)^n n!\right); \end{cases}$$

[1]) *Laguerre, E.:* Sur l'intégrale $\displaystyle\int_x^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x}$, Bull. Soc. math. France Bd. 7, S. 72—81. 1879. — Œuvres, Bd. 1, S. 428—437. Paris 1898.

man erhält beispielsweise

$$(67') \quad \begin{cases} L_0(x) = 1, & L_1(x) = -x+1, \\ L_2(x) = x^2 - 4x + 2, & L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6, \\ L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24. \end{cases}$$

Da

$$(68) \quad \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k!} x^k t^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} t^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} t^{n-k} \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \frac{t^k}{(1-t)^{k+1}} = \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} \end{cases}$$

ist, besitzen auch die Laguerreschen Polynome eine einfache erzeugende Funktion, nämlich $\psi(x,t) = \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t}$. Die Beziehung

$$(1-t)^2 \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = (1-t-x)\,\psi(x,t)$$

liefert die Rekursionsformel

$$(69) \qquad L_{n+1}(x) - (2n+1-x) L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0.$$

Zusammen mit der aus $(1-t)\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = -t\,\psi(x,t)$ entspringenden Relation

$$(70) \qquad L_n'(x) - n L_{n-1}'(x) = -n L_{n-1}(x), \qquad n \geqq 1$$

führt sie zu der Formel wegen $x \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial t}(1-t) + \psi(x-1)$

$$(71) \qquad x L_n'(x) = n L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \qquad n \geqq 1$$

und zu der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(72) \qquad x y'' + (1-x) y' + n y = 0$$

für das Laguerresche Polynom $L_n(x)$.

Die Orthogonalitätseigenschaft

$$(73) \qquad \int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x)\, dx = 0 \qquad (n > m)$$

erkennt man aus der Gleichung

$$(73') \quad \int_0^{\infty} e^{-x} x^k L_n(x)\, dx = \int_0^{\infty} x^k \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})\, dx = -k \int_0^{\infty} x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x})\, dx$$

$$= k(k-1) \int_0^{\infty} x^{k-2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^n e^{-x})\, dx = \ldots$$

$$= (-1)^k k! \int_0^{\infty} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^n e^{-x})\, dx = 0 \quad \text{für} \quad n > k,$$

während man zur Normierung das Integral

$$(74) \qquad \int_0^\infty e^{-x} L_n^2(x)\,dx = \int_0^\infty (-1)^n x^n \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})\,dx = n! \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = (n!)^2$$

auszurechnen hat; die Funktionen

$$(75) \qquad \varphi_\nu(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} L_{\nu-1}(x)}{(\nu-1)!} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

liefern dann das normierte Orthogonalsystem.

§ 11. Die zu einem Orthogonalsystem gehörigen Integralgleichungen.

Wie schon früher erwähnt, kann man bei einem beliebig vorgegebenen Orthogonalsystem aus der Vollständigkeit allein keineswegs auf die Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen schließen, sondern muß für die Untersuchung dieser bei vielen Problemen der mathematischen Physik wichtigen Frage die besondere Natur des jeweils vorliegenden Orthogonalsystems ausnutzen, wie wir dies z. B. bei den trigonometrischen Funktionen getan haben und wie es auch bei späteren Betrachtungen geschehen soll. Jetzt jedoch wollen wir umgekehrt die Frage aufwerfen, wie sich allgemeine Klassen solcher Funktionen angeben lassen, die eine Entwicklung nach einem vorgegebenen Orthogonalsystem $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$[1]) gestatten. Es sei also

$$(76) \qquad f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(s), \qquad c_\nu = (f\varphi_\nu) = \int f(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds.$$

Schreiben wir

$$(77) \qquad f(s) = \lim_{n\to\infty} s_n(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu(s) = \lim_{n\to\infty} \int f(t) \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)\,dt,$$

so dürfen wir rechts Grenzübergang und Integration im allgemeinen nicht vertauschen; vielmehr wird die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)$ sicher nicht gleichmäßig konvergieren[2]). Während bei den Fourierschen Reihen die Diskussion trotzdem vollständig gelang, müssen wir uns im allgemeinen Falle mit einem bescheideneren Ergebnis begnügen. Wir wählen

[1]) Aus historischen Gründen bezeichnen wir hier und im nächsten Kapitel die unabhängigen Veränderlichen mit s und t.

[2]) Für $t = s$ kann nämlich das allgemeine Glied der Reihe wegen $\int \varphi_\nu^2(s)\,ds = 1$ nicht gleichmäßig in s beliebig klein werden.

irgendeine Folge dem absoluten Betrage nach monoton wachsender Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ derart, daß die Reihe

$$(78) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} = K(s,t)$$

in den Variablen s und t gleichmäßig konvergiert. Dies ist sicher möglich; denn bedeutet M_ν die obere Grenze von $|\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)|$ im Grundgebiet, so wird die gleichmäßige Konvergenz z. B. für $|\lambda_\nu| \geqq \nu^2 M_\nu$ erreicht. Eine so definierte Funktion $K(s,t)$, welche offenbar die Symmetriebedingung $K(t,s) = K(s,t)$ erfüllt, wollen wir einen zu den Funktionen φ_ν als *„Eigenfunktionen"* gehörigen *„symmetrischen Kern"* nennen; die Eigenfunktionen genügen wegen ihrer Orthogonalität der Gleichung

$$(79) \qquad \varphi_\nu(s) = \lambda_\nu \int K(s,t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \lambda_\nu \int K(t,s)\,\varphi_\nu(t)\,dt\,.$$

Ist nun $g(t)$ irgend eine im Grundgebiet stückweise stetige Funktion, so können wir den Ausdruck

$$(80) \qquad K(s,t)\,g(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}\,g(t)$$

gliedweise nach t integrieren und erhalten für die Funktion

$$(81) \qquad f(s) = \int K(s,t)\,g(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(s) \int \frac{\varphi_\nu(t)\,g(t)}{\lambda_\nu}\,dt$$

die Entwicklung

$$(82) \qquad f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(s)$$

mit

$$(82') \qquad c_\nu = \int \frac{\varphi_\nu(t)\,g(t)}{\lambda_\nu}\,dt = \int \left[\int K(s,t)\,\varphi_\nu(s)\,g(t)\,ds\right] dt = \int f(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds = (f, \varphi_\nu)\,.$$

Diese Entwicklung konvergiert gleichmäßig in s; sie konvergiert auch absolut, wenn wir die absolute Konvergenz der Reihe (78) voraussetzen, was wir nötigenfalls tun wollen.

Wir können also das Ergebnis aussprechen:

Jede Funktion $f(s)$, die durch einen zu dem orthogonalen Funktionensystem $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ gehörigen Kern $K(s,t)$ in der Form $f(s) = \int K(s,t)\,g(t)\,dt$ darstellbar ist, wobei $g(t)$ irgendeine stückweise stetige *„Belegungsfunktion"* bedeutet, läßt sich in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach den φ_ν entwickeln.

Es liegt nun nahe, für spezielle vorgegebene Funktionensysteme $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ die Frage der Entwickelbarkeit dadurch anzugreifen, daß

man geeignete zugehörige Kerne $K(s,t)$ bildet und die Lösbarkeit der Gleichung (81) nach $g(t)$ bei bekanntem $f(s)$ ins Auge faßt. Wir nennen diese Gleichung eine zum Kern $K(s,t)$ gehörige *„Integralgleichung erster Art"*.

Man kann aber auch die Problemstellung umkehren, indem man statt von einem vorgelegten Orthogonalsystem von einem gegebenen Kern, d. h. irgend einer stetigen symmetrischen Funktion $K(s,t)$ von s und t, ausgeht und sich die Frage stellt, ob sich dazu ein System von orthogonalen Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ auffinden läßt, für welches dann der obige Satz gelten würde. Durch diese Frage werden wir zu der eigentlichen Theorie der Integralgleichungen geführt.

Die Werte λ_ν und die zugehörigen Funktionen φ_ν lösen die Funktionalgleichung

$$\varphi(s) = \lambda \int K(s,t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{83}$$

Diese *homogene Integralgleichung* läßt sich als Grenzfall eines linearen Gleichungssystems auffassen. Nehmen wir als Grundgebiet $0 \leqq s \leqq 1$ und setzen für irgend ein positives ganzzahliges n

$$\varphi\left(\frac{p}{n}\right) = \varphi_p; \qquad \frac{1}{n} K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) = k_{pq}, \qquad (p,q = 1, \ldots, n) \tag{84}$$

so gehen die Gleichungen

$$\varphi_p = \lambda \sum_{q=1}^{n} k_{pq}\varphi_q \qquad (p = 1, \ldots, n) \tag{85}$$

für $n \to \infty$ und $\frac{p}{n} \to s$ in die Gleichung

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^1 K(s,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{85'}$$

über. Die endlichen Gleichungen (85) haben gerade den Typus der im ersten Kapitel öfters aufgetretenen Gleichungen.

Es liegt nahe, zugleich mit ihnen die unhomogenen Gleichungen

$$f_p = \varphi_p - \lambda \sum_{q=1}^{n} k_{pq}\varphi_q, \quad f_p = f\left(\frac{p}{n}\right) \qquad (p = 1, \ldots, n) \tag{86}$$

zu betrachten und zudem auf die Voraussetzung der Symmetrie $k_{pq} = k_{qp}$ zu verzichten. Auf diese Weise erkennen wir, daß zu den Problemen in § 2 des ersten Kapitels die Auflösung der *inhomogenen Integralgleichung*

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{87}$$

in Parallele steht, wobei der Kern $K(s,t)$ irgendeine stetige Funktion von s und t, $f(s)$ eine gegebene stetige Funktion von s und λ ein Para-

meter ist. Diese Gleichung nennt man eine *Integralgleichung zweiter Art* oder *Fredholmsche Integralgleichung*, auch Integralgleichung schlechthin, wenn eine Verwechslung ausgeschlossen ist. Ihre allgemeine Theorie soll im folgenden Kapitel behandelt werden, wobei wir die erforderlichen Grenzübergänge auf eine von der eben angedeuteten verschiedene Art vornehmen werden.

§ 12. Ergänzungen und Aufgaben zum zweiten Kapitel.

1. Die Hurwitzsche Lösung des isoperimetrischen Problems. Als *„isoperimetrisches Problem"* bezeichnet man die Aufgabe, unter allen einfachen, geschlossenen, ebenen Kurven von gegebenem Umfang diejenige zu ermitteln, welche den größten Flächeninhalt umschließt. Bekanntlich liefert der Kreis die Lösung; zum Beweise gehen wir unter Beschränkung auf stückweise glatte Kurven mit *A. Hurwitz*[1]) so vor.

Es sei

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad 0 \leqq s \leqq L$$

die Parameterdarstellung einer geschlossenen stetigen, stückweise glatten Kurve vom Umfang L und Flächeninhalt F mit der Bogenlänge s als Parameter. Wir führen an Stelle von s die dazu proportionale Größe $t = \frac{2\pi s}{L}$ als Parameter ein, die von 0 bis 2π läuft, wenn s zwischen 0 und L variiert, und bezeichnen die Fourierschen Konstanten von x und y mit a_ν, b_ν und c_ν, d_ν; diejenigen von $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ ergeben sich dann nach (21) zu $\nu b_\nu, -\nu a_\nu, \nu d_\nu, -\nu c_\nu$. Wegen

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2,$$

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) dt$$

gewinnt man aus der Vollständigkeitsrelation (9) bzw. (9')

$$2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\} dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 (a_\nu^2 + b_\nu^2 + c_\nu^2 + d_\nu^2),$$

$$\frac{F}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\frac{dy}{dt}\, dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu (a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu).$$

Aus den letzten beiden Formeln folgt

$$L^2 - 4\pi F = 2\pi^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} [(\nu a_\nu - d_\nu)^2 + (\nu b_\nu + c_\nu)^2 + (\nu^2 - 1)(c_\nu^2 + d_\nu^2)] \geqq 0.$$

[1]) *Hurwitz, A.*: Quelques applications géométriques des séries de Fourier. Ann. Ec. Norm. Serie 3, Bd. 19, S. 357—408, insb. S. 392—397.

Gleichheit kann offenbar nur dann eintreten, wenn

$$b_1 + c_1 = 0\,, \quad a_1 - d_1 = 0\,, \quad a_\nu = b_\nu = c_\nu = d_\nu = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 2, 3, \ldots,$$

ist, wenn also

$$x = \tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t\,,$$
$$y = \tfrac{1}{2} b_0 - b_1 \cos t + a_1 \sin t$$

und die Kurve demnach ein Kreis ist. Mithin besteht für alle geschlossenen, stetigen, stückweise glatten ebenen Kurven zwischen Umfang L und Flächeninhalt F die „isoperimetrische Ungleichheit"

$$L^2 - 4\pi F \geqq 0\,, \tag{88}$$

und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn die Kurve ein Kreis ist. Damit ist die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises bewiesen.

2. Gauß' Anwendung der Kugelfunktionen zur numerischen Berechnung von bestimmten Integralen[1]. Von Gauß rührt der folgende wichtige Satz über die numerische Berechnung bestimmter Integrale her:

Ein Polynom $f(x)$ von höherem als n^{tem}, aber höchstens $(2n+1)^{\text{tem}}$ Grade läßt sich für die Ermittlung des bestimmten Integrals $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ immer durch ein Polynom $h(x)$ von höchstens n^{tem} Grade ersetzen, und zwar ist $h(x)$ das eindeutig bestimmte Polynom, das in den $n+1$ Nullstellen der $(n+1)^{\text{ten}}$ Kugelfunktion $P_{n+1}(x)$ mit $f(x)$ übereinstimmt. Stellt man nämlich $f(x)$ in der Form

$$f(x) = P_{n+1}(x)\, g(x) + h(x)$$

dar, wobei $g(x)$ und $h(x)$ Polynome höchstens n^{ten} Grades sind, so ist nach der Orthogonalitätseigenschaft der Kugelfunktionen

$$\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)\, g(x)\, dx = 0\,,$$

also

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} h(x)\, dx\,.$$

Hierbei ist $h(x)$ als Rest der Division von $f(x)$ durch $P_{n+1}(x)$ gewonnen. Andererseits ist aber nach der Lagrangeschen Interpolationsformel allgemein

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)} \frac{\varphi(x)}{x - x_k} + \varphi(x)\,\psi(x)\,,$$

[1] *Gauß, C. F.:* Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. Comment. Soc. sc. Gottingensis Bd. 3. 1816. — Werke Bd. 3, S. 163—196. Göttingen 1876.

wobei $x_0, x_1, \ldots, x_n$ die Interpolationsstellen sind, $\varphi(x)$ das Polynom

$$\varphi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

vom Grade $n + 1$ und $\psi(x)$ ein Polynom höchstens n^{ten} Grades ist. Wählt man $\varphi(x) = P_{n+1}(x)$, also als Interpolationsstellen die Nullstellen der $(n + 1)^{\text{ten}}$ Kugelfunktion $P_{n+1}(x)$, so wird daher

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{P_{n+1}(x)}{P'_{n+1}(x_k)(x - x_k)}$$

und, wenn man noch zur Abkürzung

$$p_k = \frac{1}{P'_{n+1}(x_k)} \int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_k} dx$$

schreibt und diese „Gewichte" p_k ein für allemal ausrechnet,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} p_k f(x_k).$$

Für die ersten n erhält man[1])

n	x_k	p_k
0	$x_0 = 0$	$p_0 = 2$
1	$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$p_0 = 1$
	$x_1 = +\frac{\sqrt{3}}{3}$	$p_1 = 1$
2	$x_0 = -\frac{\sqrt{15}}{5}$	$p_0 = \frac{5}{18}$
	$x_1 = 0$	$p_1 = \frac{4}{9}$
	$x_2 = +\frac{\sqrt{15}}{5}$	$p_2 = \frac{5}{18}$

Beispielsweise kann man auf die Gaußsche Weise ein Polynom fünften Grades für die Integration genau durch das quadratische Polynom ersetzen, das durch die Werte des Polynoms fünften Grades an den Stellen x_0, x_1, x_2 bestimmt ist.

Wenn allgemein eine beliebige Funktion über das Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ integriert werden soll, so wird das Integral, wenn man die Gaußsche Methode benutzt und den Funktionswert an $n + 1$

[1]) Für weitergehende numerische Angaben vgl. *Gauß, C. F.:* a. a. O.

entsprechenden Stellen berechnet, ebenso gut approximiert, wie sonst bei Approximation der Funktion durch ein Polynom $(2n+1)^{\text{ten}}$ Grades.

3. Reziprozitätsformeln. Man beweise die Äquivalenz der beiden Formeln[1])

$$f(t) = \int_0^1 g(u) \cot \pi (t-u)\, du\,,$$

$$-g(u) = \int_0^1 f(t) \cot \pi (u-t)\, dt\,,$$

wobei

$$\int_0^1 g(u)\, du = 0, \quad \int_0^1 f(t)\, dt = 0,$$

$$g(t) = g(t+1)\,, \quad f(t) = f(t+1)$$

vorausgesetzt ist und bei den Integralen der „Cauchysche Hauptwert" zu nehmen ist, einmal mit Hilfe der Theorie der Fourierschen Reihen, dann mittels des Cauchyschen Integralsatzes.

4. Einiges über die Bernoullischen Polynome und Zahlen[2]). Die *Bernoullischen Polynome* $B_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, welche in vielen Zweigen der Analysis eine wichtige Rolle spielen, lassen sich besonders einfach mit Hilfe einer erzeugenden Funktion $\psi(x, t)$ durch die Beziehung

$$\psi(x,t) = \frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n$$

definieren. Ihre Anfangswerte $B_n(0) = B_n$ werden *Bernoullische Zahlen* genannt. Die Relationen

$$\psi(1-x, t) = \psi(x, -t)\,,$$

$$\psi(x,t) + \psi\left(x+\tfrac{1}{k}, t\right) + \psi\left(x+\tfrac{2}{k}, t\right) + \ldots + \psi\left(x+\tfrac{k-1}{k}, t\right) = k\psi\left(kx, \tfrac{t}{k}\right),$$

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = t\psi(x,t)\,,$$

$$\psi(x+1, t) - \psi(x,t) = te^{xt}$$

führen zum *Ergänzungssatz*

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)\,,$$

---

[1]) Vgl. *Hilbert, D.:* Integralgleichungen. S. 75.

[2]) Vgl. *Nörlund, N. E.:* Vorlesungen über Differenzenrechnung. Berlin 1924.

zum *Multiplikationstheorem*

$$B_n(kx) = k^{n-1} \sum_{r=0}^{k-1} B_n\left(x + \frac{r}{k}\right),$$

zur *Differentiationsformel*

$$B_n'(x) = n B_{n-1}(x) \qquad (n > 0)$$

und zur *Differenzengleichung*

$$B_n(x+1) - B_n(x) = n x^{n-1}. \qquad (n > 0)$$

Unter Heranziehung der Differentiationsformel liefert der Taylorsche Satz

$$B_n(x+h) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} B_{n-r}(x) h^r,$$

$$B_n(x) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} B_{n-r}(0) x^r,$$

woraus sich in Verbindung mit der Differenzengleichung die Rekursionsformeln

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} B_r(x) = n x^{n-1}, \qquad (n > 0)$$

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} B_r =$$

ergeben. Die ersten Bernoullischen Zahlen und Polynome lauten folgendermaßen:

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\tfrac{1}{2},\ B_2 = \tfrac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\tfrac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \tfrac{1}{42}, \ldots,$$

$$B_0(x) = 1,\ B_1(x) = x - \tfrac{1}{2},\ B_2(x) = x^2 - x + \tfrac{1}{6},\ B_3(x) = x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x, \ldots.$$

Der Ergänzungssatz und die Differenzengleichung für $x = 0$ lehren, daß alle Bernoullischen Zahlen mit ungeradem Index > 1 verschwinden und daß daher die Bernoullischen Polynome von ungeradem Index > 1 Nullstellen in den Punkten $x = 0$ und $x = 1$ haben; zu ihnen tritt, wie man vermöge des Multiplikationstheorems für $k = 2$ erkennt, noch eine weitere Nullstelle im Punkte $x = \frac{1}{2}$. Andererseits entspringt aus der Differentiationsformel und der Differenzengleichung die Beziehung

$$\int_x^{x+1} B_n(z)\, dz = x^n,$$

so daß durch die Bernoullischen Polynome, wie zuerst *Jakob Bernoulli*

bemerkt hat, die Summation der Potenzen der natürlichen Zahlen mit positivem ganzen Exponenten

$$1^n + 2^n + \cdots + (k-1)^n = \int_0^k B_n(z)\,dz = \frac{B_{n+1}(k) - B_{n+1}}{n+1} \qquad (n > 0)$$

geleistet wird.

Offenbar sind die Bernoullischen Polynome Polynomlösungen der Differenzengleichung

$$f(x+1) - f(x) = n x^{n-1}; \qquad (n > 0)$$

die allgemeine Differenzengleichung

$$f(x+1) - f(x) = \sum_{n=0}^{s} a_n x^n,$$

in welcher die rechte Seite ein Polynom ist, besitzt daher die Polynomlösung

$$\sum_{n=0}^{s} \frac{a_n}{n+1} B_{n+1}(x).$$

Im Intervall $0 < x < 1$ lassen sich die Bernoullischen Polynome in Fouriersche Reihen entwickeln. Man kommt am raschesten zum Ziele, wenn man zunächst die Entwicklung der erzeugenden Funktion aufstellt, dann die Koeffizienten nach Potenzen von t entwickelt und das Ganze nach diesen Potenzen ordnet. Es sei etwa

$$\psi(x,t) = \frac{t\,e^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, e^{2\pi i k x};$$

dann erhält man[1])

$$A_k = \int_0^1 \frac{t\,e^{x(t-2\pi i k)}}{e^t - 1}\,dx = \frac{t}{t - 2\pi i k},$$

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n = 1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{t}{t - 2\pi i k} e^{2\pi i k x}$$

$$= 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2\pi i k}\right)^{l+1} e^{2\pi i k x} = 1 - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{t}{2\pi i k}\right)^{l+1} e^{2\pi i k x},$$

also im Intervall $0 < x < 1$

$$B_0(x) = 1, \qquad B_n(x) = -n! \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi i k x}}{(2\pi i k)^n}. \qquad (n > 0)$$

---

[1]) Der Strich am Summenzeichen soll darauf hinweisen, daß der Wert $k = 0$ fortzulassen ist.

Faßt man die Glieder mit positivem und negativem k vom selben Absolutbetrage zusammen, so ergibt sich

$$B_{2m}(x) = (-1)^{m+1} 2(2m)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi k x}{(2\pi k)^{2m}},$$

$$B_{2m+1}(x) = (-1)^{m+1} 2(2m+1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k x}{(2\pi k)^{2m+1}}.$$

Für $m > 0$ sind die rechts stehenden Reihen im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gleichmäßig konvergent und stellen periodische Funktionen $\bar{B}_n(x)$ mit der Periode 1 dar, die in diesem Intervall mit dem entsprechenden Bernoullischen Polynom $B_n(x)$ übereinstimmen; für $m = 0$ hingegen weist die Funktion $\bar{B}_1(x)$ Sprungstellen in den Punkten $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ auf. Diese Funktionen $\bar{B}_n(x)$ sind für die Theorie der *Euler-Maclaurinschen Summenformel*[1]) von hervorragender Bedeutung.

5. Beispiele Fourierscher Reihen von Funktionen mit Unendlichkeitsstellen. Die Funktion $f(x) = \log \sin \frac{x}{2}$, die an den Stellen $x = 0$ und $x = 2\pi$ je eine logarithmische Unendlichkeitsstelle besitzt, gestattet für $0 < x < 2\pi$ die Fouriersche Entwicklung

$$\log \sin \frac{x}{2} = -\log 2 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu}.$$

Für den Logarithmus der Gammafunktion hat *Kummer*[2]) eine berühmte, im Intervall $0 < x < 1$ gültige Reihe aufgestellt:

$$\log \Gamma(x) = (\tfrac{1}{2} - x)(C + \log 2) + (1 - x) \log \pi - \tfrac{1}{2} \log \sin \pi x + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu \pi} \sin (2\nu \pi x),$$

aus der man, wenn man für x der Reihe nach x, $x + \frac{1}{k}$, $x + \frac{2}{k}$, $\ldots$, $x + \frac{k-1}{k}$ einsetzt und die entstehenden Gleichungen addiert, das Multiplikationstheorem der Gammafunktion

$$\Gamma(kx) = \frac{k^{kx}}{\sqrt{k}\,(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}} \prod_{r=0}^{k-1} \Gamma\left(x + \frac{r}{k}\right)$$

bekommt.

6. Spektrale Zerlegung durch Fouriersche Reihe und Fouriersches Integral. Die Fouriersche Reihe und das Fouriersche Integral treten überall da auf, wo es sich darum handelt, einen gegebenen

[1]) *Nörlund, N. E.*: a. a. O.

[2]) *Kummer, E. E.*: Beitrag zur Theorie der Funktion $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-v} v^{x-1} dv$. J. reine angew. Math. Bd. 35, S. 1—4. 184 ff.

Vorgang oder Funktionsverlauf als Superposition periodischer Vorgänge oder Funktionsverläufe darzustellen oder, wie man sagt, spektral zu zerlegen. Ist $f(x)$ die im Intervall $-l \leqq x < l$ vorgelegte Funktion, $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu e^{\frac{i\pi\nu x}{l}}$ ihre Fouriersche Reihe, so sagt man, man habe die Funktion in periodische Funktionen von den „diskreten Frequenzen" $\frac{\nu\pi}{l}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ mit den „Amplituden" $|\alpha_\nu| = \left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-\frac{i\pi\nu x}{l}}\, dx\right|$ zerlegt. Betrachtet man hingegen das unendliche Gebiet $-\infty < x < \infty$, so spricht man von Zerlegung von $f(x)$ in ein *kontinuierliches Spektrum*, wobei zur Frequenz u die *Spektraldichte* $g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iux}\, dx$ gehört.

Ein für die Physik prinzipiell interessantes Beispiel[1]) ist die Funktion

$$f(x) = e^{i\omega x} \text{ für } |x| < l,$$
$$f(x) = 0 \quad \text{für } |x| > l,$$

welche einem endlich abbrechenden sinusförmigen Wellenzuge aus $n = \left[\frac{l\omega}{2\pi}\right]$ Wellen entspricht. Ihre Spektraldichte wird durch

$$g(u) = \int_{-l}^{l} e^{i(\omega-u)x}\, dx = \frac{2\sin(\omega-u)\, l}{\omega-u}$$

gegeben. Als Funktion von u betrachtet, hat $|g(u)|$ für $u = \omega$ ein Maximum, das um so mehr ausgeprägt ist, je größer die Anzahl n der Wellenzüge wird. Bei großem n wird die Spektraldichte in allen außerhalb des beliebig kleinen Intervalls $\omega - \delta \leqq u \leqq \omega + \delta$ liegenden Punkten u vergleichsweise beliebig klein werden.

7. Man beweise die **Vollständigkeit des Systems der trigonometrischen Funktionen,** indem man einerseits die Vollständigkeit jedes Systems von Polynomen, bei denen jeder Grad vertreten ist, benutzt, andererseits die trigonometrische Entwicklung von $\frac{\pi - x}{2}$ direkt beweist und dann gliedweise integriert.

8. Erzeugung vollständiger Funktionensysteme in mehreren Variablen durch solche in einer Veränderlichen. Es gilt folgender allgemeiner Satz: Ist

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$$

ein im Intervall $a \leqq s \leqq b$ vollständiges orthogonales normiertes Funk-

[1]) Dieses Beispiel illustriert die Tatsache, daß einem endlich abbrechenden sinusförmigen Wellenzuge in der Optik niemals eine scharfe Spektrallinie, sondern ein Spektrum endlicher Breite entspricht, das um so schmaler und intensiver wird, je länger der Wellenzug ist.

tionensystem und ist für jedes $i = 1, 2, \ldots$ und das Intervall $c \leqq t \leqq d$

$$\psi_{1i}(t),\ \psi_{2i}(t), \ldots$$

ein ebensolches Funktionensystem, dann bilden die Funktionen

$$\omega_{ik}(s,t) = \varphi_i(s)\,\psi_{ki}(t)$$

ein vollständiges orthogonales Funktionensystem in s und t für das Rechteck $a \leqq s \leqq b$, $c \leqq t \leqq d$. Ist nämlich $f(s,t)$ eine in diesem Rechteck stetige Funktion von s und t, so besteht die Vollständigkeitsrelation

$$\int\int f^2(s,t)\,ds\,dt = \sum_{i,k=1}^{\infty}\left(\int\int f(s,t)\,\omega_{ik}(s,t)\,ds\,dt\right)^2.$$

Zum Beweise gehen wir von der Beziehung

$$\int f^2(s,t)\,ds = \sum_{i=1}^{\infty} g_i^2(t)$$

aus, mit $g_i(t) = \int f(s,t)\,\varphi_i(s)\,ds$, welche die Vollständigkeit des Funktionensystems der φ_i ausdrückt. Da die Reihe rechts gleichmäßig konvergiert, können wir gliedweise nach t integrieren und erhalten:

$$\int\int f^2(s,t)\,ds\,dt = \sum_{i=1}^{\infty}\int g_i^2(t)\,dt.$$

Hier wenden wir rechts auf das i^{te} Glied die Vollständigkeitsrelation in bezug auf das Funktionensystem der $\psi_{ki}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ an und bekommen dann unmittelbar die oben behauptete Vollständigkeitsrelation.

9. Die Mellinschen Umkehrformeln[1]. Satz 1. Es sei $s = \sigma + ti$ eine komplexe Variable. Im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ sei die Funktion $f(s)$ regulär und daselbst $\int_{-\infty}^{\infty}|f(\sigma + ti)|\,dt$ konvergent; ferner strebe in dem schmaleren Streifen $\alpha + \delta \leqq \sigma \leqq \beta - \delta$ $(\delta > 0$ beliebig fest) die Funktion $f(s)$ mit zunehmendem Absolutbetrag der Ordinate t gleichmäßig gegen Null. Setzt man dann für reelle positive x und festes σ

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} x^{-s} f(s)\,ds, \tag{89}$$

[1]) *Mellin, H.:* Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen. Acta math. Bd. 25, S. 139—164, insb. S. 156–162. 1902.

Fujiwara, M.: Über Abelsche erzeugende Funktion und Darstellbarkeitsbedingungen von Funktionen durch Dirichletsche Reihen. Tôhoku math. J. Bd. 17, S. 363—383, insb. S. 379—383. 1920.

Hamburger, H.: Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion. (Erste Mitteilung.) Math. Ztschr., Bd. 10, S. 240—254, insb. S. 242—247. 1921.

so ist im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$

$$f(s) = \int_0^\infty x^{s-1} g(x)\, dx . \tag{90}$$

Beweis. Zufolge der Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz von $f(s)$ gegen Null für $\alpha + \delta \leqq \sigma \leqq \beta - \delta$ und $|t| \to \infty$ darf in (89) die Integrationsgerade verschoben werden; es hängt also $g(x)$ nicht von σ ab. Wählt man demnach zwei Abszissen σ_1 und σ_2, die der Bedingung $\alpha < \sigma_1 < \sigma < \sigma_2 < \beta$ genügen, so ist

$$\int_0^\infty x^{s-1} g(x)\, dx = \int_0^1 x^{s-1} dx \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - \infty i}^{\sigma_1 + \infty i} x^{-s_1} f(s_1)\, ds_1$$

$$+ \int_1^\infty x^{s-1} dx \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2 - \infty i}^{\sigma_2 + \infty i} x^{-s_2} f(s_2)\, ds_2 = J_1 + J_2 .$$

In den Integralen darf die Reihenfolge der Integration vertauscht werden, da nach den Abschätzungen

$$|J_1| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma_1 + ti)|\, dt \int_0^1 x^{-1+(\sigma-\sigma_1)}\, dx ,$$

$$|J_2| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma_2 + ti)|\, dt \int_1^\infty x^{-1-(\sigma_2-\sigma)}\, dx$$

absolute Konvergenz vorhanden ist. Dadurch entsteht

$$\int_0^\infty x^{s-1} g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2 - \infty i}^{\sigma_2 + \infty i} \frac{f(s_2)}{s_2 - s}\, ds_2 - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - \infty i}^{\sigma_1 + \infty i} \frac{f(s_1)}{s_1 - s}\, ds_1 .$$

Die rechts stehende Differenz ist nach der Cauchyschen Integralformel gerade gleich $f(s)$. Denn die Integrale über horizontale Strecken zwischen den beiden Geraden $s = \sigma_1$ und $s = \sigma_2$ verschwinden für $|t| \to \infty$ wegen $f(s) \to 0$.

Satz 2. Für $x > 0$ sei $g(x)$ stückweise glatt, und für $\alpha < \sigma < \beta$ sei $\int_0^\infty x^{\sigma-1} g(x)\, dx$ absolut konvergent. Dann ergibt sich aus (90) die Umkehrung (89).

Beweis: Setzt man $x = e^u$, so wird

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} x^{-s} f(s)\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u(\sigma+ti)}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{v(\sigma+ti)}\, g(e^v)\, dv$$

$$= \frac{e^{-u\sigma}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(v-u)}\, e^{v\sigma}\, g(e^v)\, dv .$$

Nach dem Fourierschen Integraltheorem (29) hat der letzte Ausdruck den Wert $e^{-u\sigma} e^{u\sigma} g(e^u) = g(x)$, womit alles bewiesen ist.

Beispiele zur Mellinschen Integraltransformation.

a) Es sei

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2} & ,, \quad x = 1, \\ 0 & ,, \quad x > 1. \end{cases}$$

Da das Integral $\int_0^\infty x^{\sigma-1} g(x)\, dx$ für $\sigma > 0$ absolut konvergiert, folgt aus

$$f(s) = \int_0^\infty x^{s-1} g(x)\, dx = \frac{1}{s} \qquad (\sigma > 0)$$

umgekehrt

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} \frac{x^{-s}}{s}\, ds \qquad (\sigma > 0).$$

Diese Formel ist von Bedeutung für die Theorie der Dirichletschen Reihe.

b) Aus

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx \qquad (\sigma > 0)$$

erhält man

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} x^{-s}\, \Gamma(s)\, ds \qquad (\sigma > 0).$$

c) Die Formel

$$\Gamma(s)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx \qquad (\sigma > 1),$$

wobei $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion bedeutet, liefert

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} x^{-s}\, \Gamma(s)\, \zeta(s)\, ds \qquad (\sigma > 1).$$

d) Die Umkehrung zu

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\pi\nu^2 x}\,dx = \int_0^\infty x^{s-1}\,\frac{\vartheta(x)-1}{2}\,dx \qquad (\sigma>1)$$

lautet

$$\vartheta(x) = 1 + \frac{1}{\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} x^{-s}\,\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\,ds\,. \qquad (\sigma>1)$$

Die Mellinsche Integraltransformation ist eins der wichtigsten Hilfsmittel der modernen analytischen Zahlentheorie und tritt auch sonst in der Analysis oft auf.

10. Das Gibbssche Phänomen. Zeichnet man für eine stückweise glatte Funktion $f(x)$ die durch die Partialsummen ihrer Fourierschen Reihe gelieferten wellenlinienartig verlaufenden Approximationskurven auf, so zeigt sich, daß diese sich zwar in jedem die Sprungstellen von $f(x)$ ausschließenden Intervall, in dem die Fouriersche Reihe gleichmäßig konvergiert, mehr und mehr an die Kurve für $f(x)$ anschmiegen, daß aber in der unmittelbaren Umgebung der Sprungstellen, wo die Konvergenz nicht mehr gleichmäßig ist, Wellen vorhanden sind, welche der Sprungstelle näher und näher rücken und immer schmäler werden, für welche jedoch die Abweichung von der Kurve für $f(x)$ nicht nach Null konvergiert. Diese Erscheinung nennt man das *Gibbssche Phänomen*[1]). Um es genauer zu untersuchen, kann man sich nach den Ausführungen am Schlusse von § 4 auf die spezielle Fouriersche Reihe

$$\frac{\pi-x}{2} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\nu} \qquad (0<x<2\pi)$$

beschränken. Mit Hilfe der Formel

$$s_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu} = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

läßt sich der Rest dieser Reihe in die Gestalt

$$r_n(x) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\nu} = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

bringen. Die Approximation wird am schlechtesten in den Punkten

$$x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

[1]) Diese Tatsache wurde von Gibbs ursprünglich auf rein empirischem Wege gefunden. *Gibbs, J. W.:* Fourier's series, Nature Bd. 59, S. 200, S. 606. 1898/99. — Papers Bd. 2, S. 258—260, London, New York und Bombay 1906.

in denen sie ein Maximum oder Minimum vom Betrage

$$r_n(x_k) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{k\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + \varrho_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$$

erreicht, wobei zur Abkürzung

$$\varrho_n(x) = \int_0^x \frac{2\sin\frac{t}{2} - t}{2t\sin\frac{t}{2}} \sin(n+\tfrac{1}{2})t\, dt$$

geschrieben ist; dieses Glied tritt auf, wenn man den Nenner $2\sin\frac{t}{2}$ durch t ersetzt. Mit wachsendem n strebt $\varrho_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$ für festes k nach Null. Es nähert sich also der Rest $r_n(x_k)$, d. h. die Abweichung der Approximationskurve von der Kurve für $\frac{\pi - x}{2}$, in dem immer näher an die Sprungstelle heranrückenden Punkte x_k dem Werte

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x_k) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{k\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx\,.$$

Beispielsweise wird $\lim_{n\to\infty} r_n(x_1) \approx -0{,}2811$, d. h. die Approximationskurve schlägt über die darzustellende Kurve um etwa 9% der Sprunghöhe hinaus[1]).

Ausdrücklich sei noch darauf hingewiesen, daß bei Approximation durch Fejérsche Mittel die Gibbssche Erscheinung nicht auftritt.

11. Sätze über die Gramsche Determinante. Ist G' ein Teilgebiet des Grundgebietes G, sind $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ stückweise stetige Funktionen in G und ist Γ ihre Gramsche Determinante für G, Γ' die für G', so ist

$$\Gamma' \leqq \Gamma\,.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Maximum-Minimumeigenschaft der Eigenwerte. Es ist nämlich Γ das Produkt der charakteristischen Zahlen der quadratischen Form

$$K(t,t) = \int_G (t_1\varphi_1 + \cdots + t_n\varphi_n)^2\, dG\,,$$

---

[1]) *Bôcher, M.:* Introduction to the theory of Fourier's series, Annals of math. Serie 2, Band 7, S. 81—152, insb. S. 123—132. 1906. — *Runge, C.:* Theorie und Praxis der Reihen, S. 170—182. Leipzig 1904. Für Verallgemeinerungen der Gibbsschen Erscheinung auf andere Orthogonalsysteme und insbesondere solche von mehreren Variablen vgl. *Weyl, H:* Die Gibbssche Erscheinung in der Theorie der Kugelfunktionen. Rend. Circ. mat. Palermo Bd. 29, S. 308—323. 1910. — Über die Gibbssche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene. Ib. Bd. 30, S. 377—407. 1910.

Γ' das entsprechende Produkt für

$$K'(t,t) = \int_{G'} (t_1 \varphi_1 + \cdots + t_n \varphi_n)^2 \, dG',$$

und es ist offenbar

$$K'(t,t) \leqq K(t,t),$$

also auch jede charakteristische Zahl von $K'(t,t)$ nicht größer als die entsprechende bei $K(t,t)$.

Einen anderen Beweis kann man der folgenden Darstellung der Gramschen Determinante entnehmen, wobei wir der Kürze halber eine einzige unabhängige Veränderliche x im Grundgebiet $0 \leqq x \leqq 1$ voraussetzen:

$$\Gamma = \left| \int_0^1 \varphi_i \varphi_k \, dx \right|$$

$$= \frac{1}{n!} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) \cdots \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) \cdots \varphi_2(x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(x_1) & \varphi_n(x_2) \cdots \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}^2 dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n,$$

eine Darstellung, welche der Formel (38) aus Kap. 1 genau entspricht[1]).

12. Anwendung des Lebesgueschen Integralbegriffes. Viele der Tatsachen und Zusammenhänge dieses Kapitels gewinnen wesentlich an Abrundung, wenn man statt des elementaren Riemannschen Integralbegriffes den modernen, von Lebesgue formulierten zugrunde legt. Dazu hat man den vorliegenden Funktionenbereich zu dem aller im Lebesgueschen Sinne integrierbaren, oder wie man sagt, *„summablen"* Funktionen zu erweitern und die Grundtatsachen der Lebesgueschen Theorie anzuwenden. Die Lebesguesche Theorie geht aus vom Begriffe des Maßes einer Punktmenge $\mathfrak{M}$, die in einem endlichen Intervalle liegen möge. Man denke sich sämtliche Punkte von $\mathfrak{M}$ irgendwie in eine abzählbare Reihe von Intervallen eingebettet, wobei diese Intervalle einander teilweise überdecken dürfen. Es sei m die untere Grenze der Gesamtlänge solcher Intervalle; es sei ferner m' die entsprechende untere Grenze für die Punkte der Komplementärmenge $\mathfrak{M}'$, d. h. die Menge aller Punkte des gegebenen Intervalls, die nicht zu $\mathfrak{M}$ gehören. Falls $m + m'$ gleich der Länge des Intervalls ist, heißt die Menge $\mathfrak{M}$ *meßbar* und m ihr *Maß*. Nach dieser Definition hat jede abzählbare Menge das Maß Null (ist eine „Nullmenge"). Ist nun $f(x)$ eine im Intervall G $(a \leqq x \leqq b)$ definierte Funktion, deren Funktionswerte einem Intervall J angehören, so teilen wir J in Teilintervalle $J_1, J_2, \ldots, J_n$ ein; es sei m_j das als

[1]) Vgl. *Kneser, A.:* Zur Theorie der Determinanten. Festschr. H. A. Schwarz, S. 177—191. Berlin 1914, sowie *Kowalewski, G.:* Determinanten.

vorhanden vorausgesetzte Maß der Punktmenge von G, in welcher $f(x)$ Werte aus J_j annimmt, und f_j ein Wert von f aus J_j; falls dann $\sum_{j=1}^{n} m_j f_j$ gegen einen bestimmten, von der speziellen Wahl des Grenzüberganges unabhängigen Grenzwert konvergiert, sobald nur die Längen der Teilintervalle J_j gleichmäßig gegen Null streben, so heißt dieser Grenzwert das *(Lebesguesche) Integral* der Funktion $f(x)$ und wird ebenso wie das gewöhnliche Riemannsche Integral geschrieben, dessen naturgemäße Verallgemeinerung er ist. Für eine nur in einer Nullmenge von Null verschiedene Funktion ist das Integral stets Null. Wir können uns also in einer beliebigen Nullmenge, z. B. allen rationalen Punkten, den Funktionswert beliebig abgeändert denken, ohne den Wert des Integrals zu beeinflussen; dies zeigt, daß wir den Bereich der integrierbaren Funktionen mit der neuen Definition wesentlich erweitert haben. Eine im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion bezeichnet man als *summabel*.

Der Lebesguesche Integralbegriff läßt sich auch auf Funktionen ausdehnen, die in dem betrachteten Gebiet nicht beschränkt sind. Hierzu erstrecke man die Integration zunächst auf diejenigen Teilgebiete, in denen $|f(x)| < N$ ist, und lasse sodann N über alle Grenzen wachsen. Wenn dabei der Grenzwert des Integrales existiert, so heißt er das Lebesguesche Integral über das Gesamtgebiet.

Für unsere Theorien sind folgende Konsequenzen von Wichtigkeit, die man auf der neugewonnenen Basis unschwer ziehen kann:

a) Lebesguesche Konvergenzsätze. Ist eine Folge $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... von im Intervall $a \ldots b$ summablen Funktionen gegeben und konvergieren für jedes x des Intervalls die Funktionen $f_n(x)$ bei zunehmendem n gegen eine Funktion $F(x)$, so kann auch dann, wenn die Konvergenz nicht gleichmäßig ist, auf die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = \int F(x)\,dx,$$

geschlossen werden, sofern sämtliche Funktionen $f_n(x)$ absolut unterhalb einer festen, von n unabhängigen Schranke liegen.

Es genügt übrigens sogar, wenn die Ungleichung

$$|f_n(x)| < \varphi(x),$$

besteht, wobei $\varphi(x)$ eine feste von n unabhängige integrierbare Funktion ist.

Diese Sätze gestatten in vielen Fällen ungleichmäßiger Konvergenz, gliedweise Integration unendlicher Reihen zu rechtfertigen.

b) Begriff der mittleren Konvergenz. Sind $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... summable Funktionen, für welche $\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)^2\,dx = 0$ ist, so gilt bis auf eine Nullmenge auch $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Ist $\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \int (f_n - f_m)^2\,dx = 0$,

so gibt es eine summable Funktion $f(x)$ derart, daß bis auf eine Nullmenge $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ gilt. Man sagt dann, daß die Funktionen $f_n(x)$ im Sinne *mittlerer Konvergenz* gegen Null bzw. gegen $f(x)$ konvergieren.

c) Satz von Fischer-Riesz[1]). Ist $\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x), \ldots$ ein beliebiges vorgegebenes orthogonales Funktionensystem und sind $a_1, a_2, a_3, \ldots$ beliebige reelle Zahlen, für welche $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2$ konvergiert, so gibt es eine summable Funktion $f(x)$ mit summablem Quadrat, für welche $a_\nu = (f, \omega_\nu)$ ist. Durch diesen Satz werden die Zusammenhänge von § 1 als umkehrbar festgestellt, sobald man nur den Funktionsbereich und den Integralbegriff in unserem Sinne erweitert.

d) Vollständigkeit und Abgeschlossenheit von Funktionensystemen. Man nennt ein Funktionensystem *abgeschlossen*, wenn es keine zu allen Funktionen des Systems orthogonale normierte Funktion gibt; dabei wollen wir ein für allemal die Summierbarkeit der auftretenden Funktionen und ihrer Quadrate voraussetzen. Es gilt nun der Satz: Jedes abgeschlossene Funktionensystem ist vollständig und umgekehrt. In der Tat, ist etwa $f(x)$ bis auf eine Nullmenge nicht gleich Null und orthogonal auf allen Funktionen des orthogonalen Systems $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots$, so ist $0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} (f, \omega_\nu)^2 < \int f^2\, dx$; also ist das Funktionensystem nicht vollständig. Ist umgekehrt das Funktionensystem unvollständig, so gibt es eine Funktion $f(x)$, so daß $\int f^2\, dx - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2 > 0$ für $a_\nu = (f, \omega_\nu)$ ist; die Funktionen $f_n = f - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \omega_\nu$ konvergieren dann, wie man leicht sieht, im Sinne mittlerer Konvergenz gegen eine Funktion $\varphi(x)$, die auf allen ω_ν orthogonal ist. Somit kann das System dann auch nicht abgeschlossen sein.

Man überzeuge sich davon, daß jede Funktionenfolge summabler Funktionen mit endlicher asymptotischer Dimensionenzahl eine lineare Grenzschar bestimmt, wobei alle auftretenden Funktionen nur bis auf Nullmengen bestimmt sind.

e) Endlich erwähnen wir noch die beiden folgenden, oft nützlichen Sätze:

Besitzen in einer Gesamtheit von meßbaren Punktmengen $E_1, E_2, \ldots$ im Intervall $a \ldots b$ unendlich viele das Lebesguesche Maß $\geqq k$, so ist das Maß der (meßbaren) Punktmenge, die von allen in unendlich vielen der $E_1, E_2, \ldots$ liegenden Punkten gebildet wird, auch $\geqq k$.

---

[1]) *Rieß, F.:* Sur les systèmes orthogonaux de fonctions. C. R. Acad. sc. Paris Bd. 144, S. 615—619. 1907. — Über orthogonale Funktionensysteme. Nachr. Ges. Göttingen (math.-phys.), S. 116—122. 1907.

Fischer, E.: Sur la convergence en moyenne, C. R. Acad. sc. Paris. Bd. 144, S. 1022—1024. 1907.

Gibt es unter den meßbaren Punktmengen $E_1, E_2, \ldots$ im Intervall $a \ldots b$ unendlich viele mit dem Maß $\leqq k$, so bilden diejenigen Punkte, die in allen $E_1, E_2, \ldots$ bis auf endlich viele enthalten sind, eine (meßbare) Punktmenge vom Maße $\leqq k$.

Literatur zum zweiten Kapitel.

Lehrbücher:

Borel, E.: Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes. Paris 1905.

Carslaw, H. S.: Introduction to the theory of Fourier's series and integrals. 2. Aufl. London 1921.

Heine, E.: Handbuch der Kugelfunktionen 1 und 2. 2. Aufl., Berlin 1878 und 1881.

Hilbert, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig 1912. (Als „Integralgleichungen" zitiert.)

Hobson, E. W.: The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. Cambridge 1907.

Lebesgue, H.: Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Paris 1904. Leçons sur les séries trigonométriques. Paris 1906.

Whittaker, E. T. and *Watson, G. N.*: A course of modern analysis. 3. Aufl. Cambridge 1920.

Monographien und Abhandlungen:

Bôcher, M.: Introduction to the theory of Fourier's series. Annals of math. Serie 2, Bd. 7, S. 81—152. 1906.

Courant, R.: Über die Lösungen der Differentialgleichungen der Physik. Math. Ann. Bd. 85, S. 280—325. 1922. — Zur Theorie der linearen Integralgleichungen. Ib. Bd. 89, S. 161—178. 1923.

Geiringer, H.: Trigonometrische Doppelreihen. Monatsh. f. Math. u. Phys. Bd. 29, S. 65—144. 1918.

Hilbert, D.: Über das Dirichletsche Prinzip. Festschr. Ges. Göttingen 1901, Berlin 1901; wieder abgedruckt Math. Ann. Bd. 59, S. 161—186. 1904.

Montel, P.: Sur les suites infinies de fonctions. Ann. Éc. Norm Serie 3, Bd. 24, S. 233—334. 1907.

Neumann, E. R.: Beiträge zur Kenntnis der Laguerreschen Polynome. Jahresb. deutsch. Math. Ver. Bd. 30, S. 15—35. 1921.

Szegö, G.: Beitrag zur Theorie der Polynome von Laguerre und Jacobi, Math. Zeitschr., Ib. Bd. 1, S. 341 — 356. 1918. — Über Orthogonalsysteme von Polynomen. Ib. Bd. 4, S. 139—157. 1919. — Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems. Ib. Bd. 12, S. 61—94. 1922.

Wigert, S.: Contributions à la théorie des polynomes d'Abel-Laguerre. Arkiv Mat. Astr. och Fys., Bd. 15, Nr. 25. 1921.

Drittes Kapitel.

Theorie der linearen Integralgleichungen.

§ 1. Vorbereitende Betrachtungen.

1. Bezeichnungen und Grundbegriffe. Es sei $K(s,t)$ eine im Gebiete $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definierte und dort stetige Funktion der beiden Variablen s und t, und es sei λ ein Parameter; ferner sollen $f(s)$ und $\varphi(s)$ zwei im Intervalle $a \leqq s \leqq b$ stetige Funktionen der Variablen sein, welche durch die Funktionalgleichung

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s,t)\, \varphi(t)\, dt \tag{1}$$

verknüpft sind. (In der Schreibweise wollen wir ein für allemal daran festhalten, daß Integrale ohne weitere Bezeichnung des Integrationsgebietes immer über das oben gekennzeichnete „Grundgebiet" der Variablen zu erstrecken sind.) Durch die Funktionalgleichung (1), welche wir eine *lineare Integralgleichung zweiter Art* mit dem *Kern* $K(s,t)$ nennen wollen[1]), wird jeder stetigen Funktion $\varphi(s)$ eine andere $f(s)$ zugeordnet, und zwar in linearer Weise, so daß einer linearen Kombination $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ die entsprechende Kombination $c_1 f_1 + c_2 f_2$ zugehört. Wir werden uns hier vorzugsweise mit der Auflösung der Integralgleichung beschäftigen, d. h. mit der Frage nach der Bestimmung von $\varphi(s)$, wenn $f(s)$ gegeben ist.

Wenn die Funktion $f(s)$ identisch verschwindet, so sprechen wir von einer *homogenen Integralgleichung;* falls diese außer der trivialen Lösung $\varphi = 0$ noch eine andere Lösung φ besitzt, kann man diese nicht triviale Lösung mit einem beliebigen konstanten Faktor multiplizieren und also auch normiert annehmen. Mit verschiedenen Lösungen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ der homogenen Gleichung sind zugleich alle linearen Kombinationen $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots$ Lösungen. Mehrere voneinander linear unabhängige solche Lösungen dürfen und wollen wir uns daher stets als normiert und orthogonal zueinander vorstellen, da wir sie sonst vorher dem im vorigen Kapitel beschriebenen Orthogonalisierungsverfahren unterwerfen können, ohne daß sie aufhören, Lösungen zu bleiben. Einen Wert λ, für welchen die homogene Integralgleichung von Null verschiedene Lösungen besitzt, nennen wir einen *Eigenwert*

[1]) Vgl. Kap. II, § 11.

des Kernes, zugehörige, als zueinander orthogonal anzunehmende Lösungen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *Nullösungen* oder *Eigenfunktionen* des Kernes für den Eigenwert λ. Ihre Anzahl ist beschränkt. Denn nach der Besselschen Ungleichung (Kap. II, § 1, 3), angewandt auf den Kern $K(s,t)$ und die orthogonalen Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_h$, gilt

$$\lambda^2 \int K(s,t)^2 dt \geqq \lambda^2 \sum_{i=1}^{h} \left[\int K(s,t)\, \varphi_i(t)\, dt \right]^2 = \sum_{i=1}^{h} \varphi_i(s)^2 ,$$

also nach Integration über s:

$$\lambda^2 \iint K(s,t)^2\, ds\, dt \geqq h ,$$

womit für h eine Schranke gewonnen ist. Wir können sagen: *Jeder Eigenwert besitzt eine endliche Vielfachheit* (d. h. eine endliche Anzahl von linear unabhängigen Lösungen).

Unsere Integralgleichung stellt sich, wie schon in Kap. II, § 11 bemerkt wurde, als sinngemäße Verallgemeinerung des Problems der linearen Algebra dar, welches wir in Kap. I, § 2 behandelt haben. Ihre Bedeutung für die mathematische Analysis besteht darin, daß viele sonst getrennte Betrachtungen durch sie unter einen einheitlichen Gesichtspunkt gebracht werden.

2. Ausgeartete Kerne. Einen Kern, welcher sich als eine endliche Summe von Produkten je einer Funktion von s mit einer Funktion von t darstellen läßt:

$$A(s,t) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(s)\, \beta_i(t) , \tag{2}$$

nennen wir einen *ausgearteten Kern*. Dabei können wir annehmen, daß die Funktionen $\alpha_i(s)$ und die Funktionen $\beta_i(t)$ je voneinander linear unabhängig sind, weil wir sonst eine dieser Funktionen durch die anderen linear ausdrücken und dann aus der Darstellung des Kernes vertreiben könnten, wodurch die Anzahl der Glieder der Summe rechts in (2) verringert wird. Der Satz von der Möglichkeit der gleichmäßigen Approximation einer stetigen Funktion $K(s,t)$ durch Polynome lehrt uns, daß wir den Kern $K(s,t)$ durch einen ausgearteten Kern gleichmäßig beliebig genau approximieren können; denn jedes Polynom in s und t stellt offenbar einen ausgearteten Kern dar.

Ein ausgearteter Kern $A(s,t)$ läßt sich folgendermaßen noch in eine andere, oft bequeme Gestalt umformen. Wir denken uns die $2p$ Funktionen von s: $\alpha_1(s), \alpha_2(s), \ldots, \alpha_p(s)$; $\beta_1(s), \beta_2(s), \ldots, \beta_p(s)$ durch ein System von normierten orthogonalen Funktionen $\omega_1(s), \omega_2(s), \ldots, \omega_q(s)$ linear ausgedrückt, was wir stets durch Orthogonalisieren der gegebenen Funktionen erreichen können. Dann erscheint $A(s,t)$ in Form einer Doppelsumme

$$A(s,t) = \sum_{i,j=1}^{q} c_{ij}\, \omega_i(s)\, \omega_j(t) . \tag{3}$$

Die Produkte $\omega_i(s)\,\omega_j(t)$ bilden ein System von q^2 Funktionen von s und t im Quadrat $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$, welche ebenfalls alle zueinander orthogonal, also linear unabhängig sind. Ist $A(s,t)$ *symmetrisch*, d. h. gilt identisch $A(s,t) = A(t,s)$, so ist $\sum_{i,j=1}^{q}(c_{ij} - c_{ji})\,\omega_i(s)\,\omega_j(t) = 0$, was wegen der linearen Unabhängigkeit der Produkte $\omega_i(s)\omega_j(t)$ bedeutet $c_{ij} = c_{ji}$.

Ein symmetrischer Kern $K(s,t)$ läßt sich immer durch symmetrische ausgeartete Kerne $A(s,t)$ gleichmäßig approximieren. Um das einzusehen, braucht man nur $A(s,t)$ nötigenfalls durch die Funktion $\frac{1}{2}[A(s,t) + A(t,s)]$ zu ersetzen, welche zugleich mit $A(s,t)$ den symmetrischen Kern $K(s,t)$ gleichmäßig approximiert.

3. Quellenmäßig dargestellte Funktionen. Zum Schluß unserer vorbereitenden Überlegungen machen wir noch einige Bemerkungen über die Funktionen $g(s)$, die sich durch den Kern $K(s,t)$ vermöge einer stetigen oder stückweise stetigen Funktion $h(t)$ *„quellenmäßig"* in der Form

$$g(s) = \int K(s,t)\,h(t)\,dt \tag{4}$$

darstellen lassen. Sicherlich ist auch $g(s)$ stetig; es gilt aber noch mehr. Ist nämlich $Nh = (h,h) = \int h(t)^2\,dt \leqq M$, wo M eine feste Schranke bedeutet, so sind die durch (4) ausgedrückten Funktionen in ihrer Gesamtheit gleichmäßig stetig, d. h. es gibt unabhängig von der speziellen Funktion $h(t)$ zu jedem positiven ε eine positive Zahl $\delta(\varepsilon)$ derart, daß aus $|\eta| < \delta$ die Beziehung $|g(s+\eta) - g(s)| < \varepsilon$ folgt. (Vgl. Kap. II, § 2.) In der Tat wird infolge der Schwarzschen Ungleichung

$$|g(s+\eta) - g(s)|^2 \leqq M\int [K(s+\eta,t) - K(s,t)]^2\,dt,$$

woraus sich wegen der Stetigkeit des Kernes sofort die Behauptung ergibt; denn es besteht sicher unabhängig von t die Ungleichung

$$|K(s+\eta,t) - K(s,t)| < \sigma$$

mit beliebig kleinem σ, sobald nur η hinreichend klein ist.

Ferner gilt bei gegebenem $h(t)$, wenn gleichmäßig

$$\lim_{n\to\infty} K_n(s,t) = K(s,t)$$

ist, die Relation

$$g(s) = \lim_{n\to\infty} \int K_n(s,t)\,h(t)\,dt$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz in s, da man den Grenzübergang unter dem Integralzeichen machen kann. Also folgt nunmehr, daß alle Funktionen der Form

$$g_n(s) = \int K_n(s,t)\,h(t)\,dt, \qquad g(s) = \int K(s,t)\,h(t)\,dt$$

für alle betrachteten Funktionen $h(t)$ gleichmäßig stetig sind, sobald $Nh \leqq M$ bleibt. Ebenso sind alle diese Funktionen gleichmäßig beschränkt, d. h. sie liegen alle absolut genommen unterhalb einer festen Schranke. Dies sieht man sofort vermöge der Schwarzschen Ungleichung ein:

$$g_n(s)^2 \leqq M \int [K_n(s,t)]^2 \, dt \qquad \text{bzw.} \qquad g(s)^2 \leqq M \int [K(s,t)]^2 \, dt.$$

§ 2. Die Fredholmschen Sätze für ausgeartete Kerne.

Die Hauptsätze der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen, welche zuerst von *Fredholm*[1]) bewiesen worden sind, entsprechen völlig den Hauptsätzen aus der Theorie der linearen Gleichungen und lassen sich folgendermaßen aussprechen:

Die Integralgleichung

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s,t)\, \varphi(t)\, dt \tag{5}$$

besitzt bei festem λ entweder für jede beliebige stetige Funktion $f(s)$ eine und nur eine stetige Lösung $\varphi(s)$, insbesondere die Lösung $\varphi = 0$ für $f = 0$; oder aber die zugehörige homogene Gleichung

$$\varphi(s) = \lambda \int K(s,t)\, \varphi(t)\, dt \tag{6}$$

besitzt eine positive endliche Anzahl r voneinander linear unabhängiger Lösungen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$. Im ersten Falle hat auch die zu (5) gehörige „transponierte" Integralgleichung

$$g(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(t,s)\, \varphi(t)\, dt \tag{7}$$

stets eine eindeutig bestimmte Lösung; im zweiten Falle hat die transponierte homogene Gleichung

$$\chi(s) = \lambda \int K(t,s)\, \chi(t)\, dt \tag{8}$$

ebenfalls r voneinander linear unabhängige Lösungen $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_r$, und die unhomogene Integralgleichung (5) ist dann und nur dann lösbar, wenn die gegebene Funktion $f(s)$ den r Bedingungen

$$(f, \chi_i) = \int f(s) \chi_i(s)\, ds = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{9}$$

genügt. Die allgemeine Lösung von (5) ist dann nur bis auf eine willkürliche additive lineare Kombination $c_1\psi_1 + \cdots + c_r\psi_r$ bestimmt; sie kann und soll durch die Forderungen

$$(\varphi, \psi_i) = \int \varphi(s)\, \psi_i(s)\, ds = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots, r)$$

eindeutig festgelegt werden.

[1]) *Fredholm, I.*: Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta math. Bd. 27, S. 365—390. 1903.

Wir wollen diese Sätze zunächst für den Fall beweisen, daß der Kern $K(s,t) = A(s,t)$ ausgeartet ist und durch die Gleichung (2) dargestellt wird. In diesem Fall reduziert sich die Theorie unserer Integralgleichung fast unmittelbar auf die eines linearen Gleichungssystems von p Gleichungen mit p Unbekannten. Schreiben wir nämlich die Integralgleichung in der Form

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(s) \int \beta_i(t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{10}$$

setzen $x_i = (\beta_i, \varphi)$, multiplizieren sodann (10) mit $\beta_j(s)$ und integrieren nach s, so erhalten wir für die Größen x_i das Gleichungssystem

$$f_j = x_j - \lambda \sum_{i=1}^{p} c_{ji} x_i, \qquad (j = 1, 2, \ldots, p) \tag{11}$$

wobei $f_j = (\beta_j, f)$ und $c_{ji} = (\beta_j, \alpha_i)$ gesetzt ist. Besitzt dieses Gleichungssystem eine, und zwar die allgemeinste Lösung $x_1, x_2, \ldots, x_p$, so ist die Funktion $\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i \alpha_i(s)$ sicher eine Lösung der Integralgleichung, wie man unmittelbar bestätigt, wenn man diese Funktion in die Integralgleichung einträgt und die Gleichungen (11) berücksichtigt. Ist dagegen $x_1, x_2, \ldots, x_p$ eine nicht triviale Lösung des homogenen Gleichungssystems

$$0 = x_j - \lambda \sum_{i=1}^{p} c_{ji} x_i, \qquad (j = 1, 2, \ldots, p), \tag{12}$$

so erhalten wir in $\psi(s) = \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i \alpha_i(s)$ eine nicht triviale Lösung der homogenen Integralgleichung (6). Zwei linear unabhängige Lösungen $x_1, x_2, \ldots, x_p$ und $x'_1, x'_2, \ldots, x'_p$ der homogenen Gleichungen (12) ergeben zwei linear unabhängige Lösungen $\psi(s) = \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i \alpha_i(s)$ und $\psi'(s) = \lambda \sum_{i=1}^{p} x'_i \alpha_i(s)$ und umgekehrt. In der Tat würde z. B. eine lineare Beziehung $c x_i + c' x'_i = 0$ zwischen den Lösungen von (12) gleichbedeutend mit der linearen Beziehung $c\psi(s) + c'\psi'(s) = 0$ zwischen den Funktionen $\psi(s)$ und $\psi'(s)$ sein, welche als voneinander linear unabhängig vorausgesetzt wurden. Das Vorhandensein von r linear unabhängigen Lösungen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ von (6) und somit von r unabhängigen Lösungssystemen von (12) ist aber gleichbedeutend mit dem Vorhandensein von ebenso vielen linear unabhängigen Lösungen $y_{l1}, y_{l2}, \ldots, y_{lp}$ $(l = 1, 2, \ldots, r)$ des transponierten Gleichungssystems

$$g_j = y_j - \lambda \sum_{i=1}^{p} c_{ij} y_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, p) \tag{13}$$

für $g_j = 0$ und somit von r linear unabhängigen Lösungen

$$\chi_1(s), \chi_2(s), \ldots, \chi_r(s)$$

der transponierten homogenen Integralgleichung (8), wobei

$$\chi_l(s) = \lambda \sum_{j=1}^{p} \gamma_{lj} \beta_j(s)$$

ist. Nun lehren die Sätze der Gleichungstheorie, daß im Fall $r = 0$ die Gleichungen (11), also auch (13) und (7), stets eindeutig lösbar sind, daß aber im Falle $r > 0$ zur Lösbarkeit der unhomogenen Gleichung (11) für die f_j die Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{p} f_j \gamma_{lj} = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, r) \tag{14}$$

hinreichend und notwendig sind. Vermöge der Definition von γ_{lj} und f_j gehen diese Bedingungen sofort über in

$$(f, \chi_l) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, r). \tag{15}$$

Damit sind die Fredholmschen Sätze für unseren Fall vollständig bewiesen.

§ 3. Die Fredholmschen Sätze für einen beliebigen Kern.

Um auf Grund der letzten Ergebnisse die Integralgleichung mit einem beliebigen Kern $K(s,t)$ behandeln zu können, benutzen wir den Konvergenzsatz aus § 2 des vorigen Kapitels.

Wir denken uns $K(s,t)$ gleichmäßig durch eine Folge $A_1(s,t)$, $A_2(s,t)$, ..., $A_n(s,t)$, ... von ausgearteten Kernen approximiert und betrachten zugleich mit der Integralgleichung (1) die approximierenden Integralgleichungen

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int A_n(s,t)\, \varphi(t)\, dt\,. \tag{16}$$

Dann sind (bei festem λ) zwei Fälle möglich.

Fall I: Die Gleichung (16) besitzt für unendlich viele n (wir dürfen dann übrigens unter Weglassung nicht passender Approximationsgleichungen und Umnumerierung sogar annehmen: für alle n) eine Lösung $\varrho_n(s)$, so daß $N\varrho_n = (\varrho_n, \varrho_n) = c_n^2 \leqq M$ bleibt, unter M eine feste Schranke verstanden.

Fall II: Die obige Annahme ist nicht richtig. Dann ist entweder

a) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n^2 = \infty$ oder

b) für unendlich viele n (wir dürfen wieder annehmen: für alle n) hat — auf Grund der für ausgeartete Kerne gültigen Fredholmschen Sätze — die homogene Integralgleichung

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int A_n(s,t)\, \varphi(t)\, dt \tag{17}$$

eine normierte Lösung $\sigma_n(s)$.

Im Falle I werden die Funktionen $\varrho_n(s) - f(s)$ quellenmäßig durch die Kerne $A_n(s,t)$ dargestellt; dabei sind die dargestellten Funktionen

nach § 1 gleichmäßig beschränkt und gleichmäßig stetig und definieren daher nach unserem Konvergenzprinzip als Limes einer gleichmäßig konvergenten Teilfolge eine stetige Grenzfunktion $\varphi(s)$. Indem wir erlaubterweise den Grenzübergang in der Integralgleichung (16) direkt vornehmen, erkennen wir für diese Grenzfunktion $\varphi(s)$ das Bestehen der Integralgleichung (1); diese Integralgleichung ist also im Falle I auflösbar.

Im Falle II a) dividieren wir die Integralgleichung (16) für $\varphi = \varrho_n$ durch c_n und setzen $\frac{\varrho_n}{c_n} = \sigma_n$, so daß die Gleichung

$$\frac{f(s)}{c_n} = \sigma_n(s) - \lambda \int A_n(s,t)\, \sigma_n(t)\, dt$$

gilt; im Falle II b) beachten wir das Bestehen der Gleichung (17) für $\varphi = \sigma_n$. Beide Male ist jedenfalls σ_n normiert; somit sind wiederum die quellenmäßig dargestellten Funktionen $\sigma_n(s) - \frac{f(s)}{c_n}$ bzw. $\sigma_n(s)$ gleichmäßig stetig und beschränkt, definieren mithin als gleichmäßigen Limes einer Teilfolge eine Grenzfunktion $\psi(s)$, welche notwendigerweise der homogenen Integralgleichung

$$\psi(s) = \lambda \int K(s,t)\, \psi(t)\, dt \tag{18}$$

genügt und normiert ist. Im Falle II besitzt also die homogene Integralgleichung nicht triviale Lösungen, die wir gemäß der Festsetzung auf S. 100 als Nullösungen oder Eigenfunktionen bezeichnen.

Um hieraus die Fredholmschen Sätze abzuleiten, erinnern wir uns an die in § 1 gemachte Bemerkung, daß es zu jedem Wert von λ nur eine endliche Anzahl r von linear unabhängigen Nullösungen geben kann. Für $r = 0$ kann offenbar der obige Fall II nicht eintreten, da er stets zu einer normierten Lösung von (18) führt; also befinden wir uns im Falle I, d. h. für jede linke Seite $f(s)$ besitzt die Integralgleichung (1) eine Lösung; diese Lösung ist eindeutig bestimmt, weil eine nicht verschwindende Differenz zweier Lösungen eine nicht triviale Lösung von (18) gegen die Voraussetzung ergeben würde. Damit ist der erste Fredholmsche Satz bewiesen.

Ist zweitens $r \geqq 0$, so gilt wegen $A_n \to K$ [1]) für die Funktionen

$$\delta_{n,i}(s) = \psi_i(s) - \lambda \int A_n(s,t)\, \psi_i(t)\, dt,$$
$$(i = 1, 2, \ldots r;\ n = 1, 2, 3 \ldots)$$

die Relation $\delta_{n,i}(s) \rightrightarrows 0$ bei $n \to \infty$.

[1]) Wir benutzen gelegentlich das Zeichen $\to$ als Abkürzung für Konvergenz. Soll die Gleichmäßigkeit des Grenzüberganges zum Ausdruck gebracht werden, so bedienen wir uns des Doppelpfeiles $\rightrightarrows$.

Setzen wir nun

$$A'_n(s,t) = A_n(s,t) + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{r} \delta_{n,i}(s)\,\psi_i(t)\,,$$

so sind die $A'_n(s,t)$ ausgeartete Kerne, welche den Kern $K(s,t)$ gleichmäßig approximieren. Diese Kerne $A'_n(s,t)$ besitzen, wie man sofort sieht, sämtlich die r Funktionen $\psi_i(s)$ zu Nullösungen.

Mehr linear unabhängige Nullösungen können bei hinreichend großem n nicht auftreten; denn wäre $\psi_{r+1,n}(s)$ eine Folge solcher Nullösungen, die wir als normiert und auf $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ orthogonal annehmen dürfen, so würden wir auf Grund unseres Konvergenzprinzipes eine auf $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ orthogonale, also von diesen Funktionen linear unabhängige Nullösung von (18) erhalten, entgegen der Voraussetzung, daß r die genaue Anzahl der linear unabhängigen Nullösungen sein sollte.

Zufolge der Gültigkeit der Fredholmschen Sätze für ausgeartete Kerne besitzen auch die homogenen transponierten Integralgleichungen

$$\chi(s) = \lambda \int A'_n(t,s)\,\chi(t)\,dt \tag{19}$$

für hinreichend große n ebenfalls genau r linear unabhängige, als normiert und zueinander orthogonal wählbare Nullösungen $\chi_{i,n}(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Da die ausgearteten Kerne $A'_n(t,s)$ gleichmäßig gegen den Kern $K(t,s)$ konvergieren, so erhalten wir auch für diesen r zueinander orthogonale Nullösungen $\chi_1(s), \chi_2(s), \ldots$, indem wir auf Grund unseres Konvergenzprinzips den Grenzübergang mit Hilfe der gleichmäßig stetigen und beschränkten Funktionen $\chi_{i,n}(s)$ vornehmen. Mehr als r unabhängige Lösungen kann die transponierte Integralgleichung

$$\chi(s) = \lambda \int K(t,s)\,\chi(t)\,dt \tag{20}$$

jedoch nicht haben, da sonst rückwärts auch die Existenz von mehr als r Lösungen von (18) folgen würde.

Endlich beachten wir, daß für die Lösbarkeit der Integralgleichung (1) im Falle $r > 0$ sicherlich die Bedingungen

$$(f, \chi_i) = \int f(s)\,\chi_i(s)\,ds = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{21}$$

notwendig sind, wie man unmittelbar einsieht, wenn man (1) mit $\chi_i(s)$ multipliziert, integriert und dann rechts unter Beachtung von (20) die Integrationsfolge umkehrt. Um die Bedingungen (21) als hinreichend zu erkennen, beschränken wir uns — sofern dies nötig ist — auf solche Indizes n, für welche $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{i,n}(s) = \chi_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ gilt, und bilden mit den wegen (21) mit wachsendem n sicher gegen Null konvergierenden Zahlen $\varepsilon_{i,n} = (f, \chi_{i,n})$ die Funktionen $f_n(s) = f(s) - \sum\limits_{i=1}^{r} \varepsilon_{i,n}\,\chi_{i,n}(s)$.

Es ist $(f_n, \chi_{i,n}) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Also besitzt die Integralgleichung

$$f_n(s) = \varphi(s) - \lambda \int A'_n(s,t)\, \varphi(t)\, dt \tag{22}$$

wegen der Gültigkeit der Fredholmschen Sätze für ausgeartete Kerne sicher eine zu $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, ..., $\psi_r(s)$ orthogonale Lösung $\varrho_n(s)$. Mit diesen Lösungen $\varrho_n(s)$ müssen wir uns im Falle I befinden, weil sie andernfalls zu einer auf $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, ..., $\psi_r(s)$ orthogonalen Lösung von (18) führen würden, was nach Voraussetzung unmöglich ist. Also können wir auf Grund des Konvergenzprinzips wieder den Grenzübergang in der Integralgleichung ausführen und wegen $f_n(s) \to f(s)$ auf die Lösbarkeit von (1) schließen. Hiermit sind die sämtlichen Fredholmschen Sätze für unseren Kern $K(s,t)$ bewiesen.

Später werden wir übrigens durch eine genauere Betrachtung erkennen, daß in Wirklichkeit die nötigen Grenzübergänge einen einfacheren Charakter haben, als die Formulierung des allgemeinen Konvergenzprinzipes vermuten läßt.

§ 4. Die symmetrischen Kerne und ihre Eigenwerte.

Entsprechend den Verhältnissen bei den bilinearen Formen in Kap. I ist auch bei den Integralgleichungen der Fall einer weitergehenden Behandlung zugänglich, daß der Kern $K(s,t)$ symmetrisch ist, d. h. der Relation

$$K(s,t) = K(t,s) \tag{23}$$

genügt. Die Integralgleichung wird dann mit ihrer transponierten identisch. Bei einer derartigen symmetrischen Integralgleichung werden wir uns vor allem die Frage stellen, für welche Werte des Parameters λ die homogene Integralgleichung (6) eine nicht triviale (normierte) Lösung besitzt. Diese Parameterwerte $\lambda = \lambda_i$ und die zugehörigen Funktionen heißen, wie schon erwähnt, die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen des Kernes $K(s,t)$. Analog zu den Entwicklungen von Kap. I, § 3 wollen wir nun den Satz beweisen: *Jeder symmetrische, nicht identisch verschwindende Kern besitzt Eigenwerte und Eigenfunktionen; diese sind dann und nur dann in unendlicher, und zwar abzählbarer Anzahl vorhanden, wenn der Kern nicht ausgeartet ist. Alle Eigenwerte eines reellen symmetrischen Kernes sind selbst reell.*

1. Existenz eines Eigenwertes bei einem symmetrischen Kern. Wir beweisen zunächst die Existenz eines Eigenwertes. Zu diesem Zwecke betrachten wir die *„quadratische Integralform"*

$$J(\varphi, \varphi) = \iint K(s,t)\, \varphi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt, \tag{24}$$

welche hier die Stelle der quadratischen Form von Kap. I vertritt; φ bedeutet dabei irgend eine im Grundgebiet stetige oder stückweise

stetige Funktion. Wegen der Schwarzschen Ungleichung haben wir

$$J(\varphi, \varphi)^2 \leqq \iint K^2(s,t)\, ds\, dt\, (\varphi, \varphi)^2 .$$

Also ist $J(\varphi, \varphi)$ selbst absolut genommen beschränkt, wenn wir fordern, daß

$$N\varphi = (\varphi, \varphi) \leqq 1 \tag{25}$$

ist. Die Integralform ist dann und nur dann für alle zugelassenen Funktionen φ Null, wenn der Kern selbst identisch verschwindet. Führen wir nämlich die *„bilineare Integralform"*

$$J(\varphi, \psi) = J(\psi, \varphi) = \iint K(s,t)\, \varphi(s)\, \psi(t)\, ds\, dt \tag{26}$$

ein und beachten wir, daß immer die Umformung

$$J(\varphi + \psi,\ \varphi + \psi) = J(\varphi, \varphi) + 2J(\varphi, \psi) + J(\psi, \psi) \tag{27}$$

gilt, so folgt zunächst aus dem identischen Verschwinden der quadratischen auch das der bilinearen Integralform. Setzen wir nun in (26) speziell $\psi(t) = \int K(s,t)\, \varphi(s)\, ds$, so ergibt sich $\int K(s,t)\, \varphi(s)\, ds = 0$ bei beliebigem $\varphi(s)$, und wenn wir $\varphi(s)$ für ein bestimmtes t gleich $K(s,t)$ wählen, bekommen wir die gewünschte identische Gleichung $K(s,t) = 0$.

Bei nicht identisch verschwindendem Kern kann also unsere Integralform (24) nur positive oder nur negative Werte oder Werte beiderlei Vorzeichens annehmen, wenn wir $\varphi(s)$ geeignet wählen; in den ersten beiden Fällen heißt der Kern *positiv oder negativ definit*, im letzteren Falle *indefinit*.

Unter der Voraussetzung, daß J positiver Werte fähig ist, stellen wir uns jetzt die Aufgabe, eine normierte Funktion $\varphi(s)$ zu finden, für welche $J(\varphi, \varphi)$ einen möglichst großen Wert annimmt. Wegen der Beschränktheit der Werte von $J(\varphi, \varphi)$ gibt es sicher eine obere Grenze $\varkappa_1 = \frac{1}{\lambda_1}$ für die Werte der Integralform $J(\varphi, \varphi)$; gezeigt werden soll, daß diese positive obere Grenze für eine geeignete Funktion $\varphi(s)$ wirklich erreicht wird. Dazu denken wir uns den Kern $K(s,t)$ durch ausgeartete symmetrische Kerne

$$A_n(s,t) = \sum_{i,k=1}^{q_n} c_{ik}^{(n)}\, \omega_i(s)\, \omega_k(t), \qquad c_{ik}^{(n)} = c_{ki}^{(n)}$$

der am Schluß von § 1 beschriebenen Gestalt gleichmäßig approximiert. Das dem obigen entsprechende Maximumproblem für die Integralformen $J_n(\varphi, \varphi) = \int\int A_n(s,t)\, \varphi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt$ unter der Nebenbedingung (25) erweist sich als gleichbedeutend mit dem entsprechenden Problem für eine quadratische Form von q_n Veränderlichen. Setzen wir nämlich $(\varphi, \omega_i) = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, q_n)$, so wird

$$J_n(\varphi, \varphi) = \sum_{i,k=1}^{q_n} c_{ik}^{(n)}\, x_i\, x_k \tag{28}$$

eine quadratische Form von $x_1, x_2, \ldots, x_{q_n}$, welche zu einem Maximum zu machen ist, während die Nebenbedingung (25) besteht. Nun ist nach der Besselschen Ungleichung in Kap. II, § 1,3, wenn wir sie auf $\varphi(s)$ und das orthogonale Funktionensystem $\omega_1(s), \omega_2(s), \ldots, \omega_{q_n}(s)$ anwenden,

$$(\varphi, \varphi) \geqq \sum_{i=1}^{q_n} x_i^2;$$

die Variablen in der Form (28) sind also sicherlich der Bedingung $\sum_{i=1}^{q_n} x_i^2 \leqq 1$ unterworfen, und daher wird das Maximum der Form angenommen, wenn $\sum_{i=1}^{q_n} x_i^2 = 1$ ist, da man sonst durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor den Wert von $J_n(\varphi, \varphi)$ vergrößern könnte. Wir sehen also, daß wir genau die Fragestellung der Hauptachsentransformation aus Kap. I vor uns haben. Das Maximum der Form wird angenommen für ein Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_{q_n}$, für welches die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{q_n} c_{ik}^{(n)} x_k = \varkappa_{1n} x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, q_n) \tag{29}$$

bestehen. Dabei wird der Proportionalitätsfaktor $\varkappa_{1n}$ gerade gleich $J_n(\varphi, \varphi)$. Dies bestätigt man, wenn man (29) mit x_i multipliziert, nach i summiert und berücksichtigt, daß dann die rechte Seite wegen $\sum_{i=1}^{q_n} x_i^2 = 1$ gleich $\varkappa_{1n}$ wird, während die linke Seite die Form $J_n(\varphi, \varphi)$ ergibt. Verstehen wir unter $x_1, x_2, \ldots, x_{q_n}$ von jetzt ab dieses Wertsystem und setzen

$$\varphi_n(s) = x_1 \omega_1(s) + x_2 \omega_2(s) + \cdots + x_{q_n} \omega_{q_n}(s),$$

wobei wegen der Orthogonalität der ω_ν und wegen $\sum x_\nu^2 = 1$ die Relation $N\varphi_n = 1$ gilt, so besagen die Gleichungen (29) das Bestehen der Relation

$$\varphi_n(s) = \frac{1}{\varkappa_{1n}} \int A_n(s, t)\, \varphi_n(t)\, dt \tag{30}$$

und umgekehrt. Denn aus (29) folgt (30), indem wir mit $\omega_i(s)$ multiplizieren, summieren und die Definition $x_i = (\varphi_n, \omega_i)$ der x_i beachten, aus (30) aber folgt (29) durch Multiplikation mit $\omega_i(s)$ und Integration. Die Funktion $\varphi_n(s)$ ist also eine Eigenfunktion von $A_n(s, t)$, welche zum Eigenwerte $\mu_{1n} = \frac{1}{\varkappa_{1n}}$ gehört:

$$\varphi_n(s) = \mu_{1n} \int A_n(s, t)\, \varphi_n(t)\, dt. \tag{31}$$

Nunmehr lassen wir n unbegrenzt zunehmen. Dabei muß $\varkappa_{1n}$ gegen $\varkappa_1$ konvergieren; denn aus der Relation

$$|K(s, t) - A_n(s, t)| < \varepsilon$$

folgt wegen der Schwarzschen Ungleichung, wenn $(\varphi, \varphi) \leqq 1$ ist und a und b die Integrationsgrenzen sind,

$$[J(\varphi, \varphi) - J_n(\varphi, \varphi)]^2 \leqq \varepsilon^2 (b-a)^2.$$

Also stimmt bei hinreichend großem n der Wertevorrat von $J_n(\varphi, \varphi)$ mit dem von $J(\varphi, \varphi)$ beliebig genau überein, und dasselbe muß daher für die oberen Grenzen dieser beiden Wertevorräte gelten. Es existiert mithin auch $\lim_{n \to \infty} \mu_{1n} = \mu_1$, so daß die μ_{1n} alle unterhalb einer festen Schranke liegen und wegen (31) nach § 1 die Funktionen $\varphi_n(s)$ für alle n gleichmäßig beschränkt und gleichmäßig stetig sind. Nach unserem Konvergenzsatz können wir also eine Teilfolge $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots$ auswählen, welche gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $\psi_1(s)$ konvergiert. In $J_n(\varphi_n, \varphi_n) = \varkappa_{1n}$ und $(\varphi_n, \varphi_n) = 1$ ausgeführt ergibt dieser Grenzübergang die Relationen

$$\psi_1(s) = \mu_1 \int K(s,t)\, \psi_1(t)\, dt, \tag{32}$$

$$(\psi_1, \psi_1) = 1, \tag{33}$$

$$J(\psi_1, \psi_1) = \varkappa_1 = \frac{1}{\mu_1}. \tag{34}$$

Die Funktion $\psi_1(s)$ löst also das Maximumproblem für die Form $J(\varphi, \varphi)$; sie ist eine Eigenfunktion des Kernes $K(s,t)$. Für jede beliebige (nicht normierte) Funktion ψ gilt daher die Beziehung

$$J(\psi, \psi) \leqq \varkappa_1 (\psi, \psi), \tag{35}$$

wie man durch Normierung sofort erkennt.

2. Die Gesamtheit der Eigenfunktionen und Eigenwerte. Um die weiteren Eigenwerte und Eigenfunktionen zu erhalten, verfahren wir am kürzesten folgendermaßen:

Wir bilden die Funktion

$$K_{(1)}(s,t) = K(s,t) - \frac{\psi_1(s)\,\psi_1(t)}{\mu_1} \tag{36}$$

und fassen sie wiederum als symmetrischen Kern auf. Nach dem eben erzielten Ergebnis können wir für sie das Maximumproblem

$$J_{(1)}(\varphi, \varphi) = \iint K_{(1)}(s,t)\, \varphi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt = \text{Max.} = \varkappa_2 = \frac{1}{\mu_2}$$

unter der Bedingung $(\varphi, \varphi) = 1$ durch eine Funktion $\psi_2(s)$ lösen, welche der homogenen Integralgleichung

$$\psi_2(s) = \mu_2 \int K_{(1)}(s,t)\, \psi_2(t)\, dt \tag{37}$$

genügt. Dabei setzen wir voraus, daß auch $J_{(1)}(\varphi, \varphi)$ noch positiver

Werte fähig ist, so daß $\varkappa_2 > 0$ wird. Wir schreiben die Gleichung (37) in der Form

$$\psi_2(s) = \mu_2 \int K(s,t)\,\psi_2(t)\,dt - \mu_2 \frac{\psi_1(s)}{\mu_1}(\psi_2, \psi_1),$$

multiplizieren mit $\psi_1(s)$ und integrieren nach s, kehren in dem Doppelintegral die Integrationsfolge um und beachten (33); dann steht auf der rechten Seite Null, und es ergibt sich

$$(\psi_1, \psi_2) = 0, \tag{38}$$

d. h. die Eigenfunktion $\psi_2(s)$ ist orthogonal auf der Eigenfunktion $\psi_1(s)$. Daher ist auch

$$\int K(s,t)\,\psi_2(t)\,dt = \int K_{(1)}(s,t)\,\psi_2(t)\,dt \tag{39}$$

und demnach $\psi_2(s)$ auch Eigenfunktion von $K(s,t)$ und μ_2 der zugehörige Eigenwert:

$$\psi_2(s) = \mu_2 \int K(s,t)\,\psi_2(t)\,dt. \tag{40}$$

Wir können diesen Eigenwert und diese Eigenfunktion auch durch das folgende Maximumproblem charakterisieren: Es soll die Integralform $J(\varphi, \varphi)$ zum Maximum gemacht werden, wenn die Funktion φ den Bedingungen $(\varphi, \varphi) \leqq 1$ und

$$(\varphi, \psi_1) = 0 \tag{41}$$

genügt. Da hierin durch die zweite Nebenbedingung der Wertevorrat der Integralform gegenüber dem Wertevorrat beim ersten Maximumproblem eingeschränkt ist, so kann das Maximum $\varkappa_2$ nicht größer sein, als das frühere Maximum $\varkappa_1$, d. h. es gilt $\varkappa_2 \leqq \varkappa_1$ und

$$\mu_1 \leqq \mu_2. \tag{42}$$

In derselben Weise können wir weitergehen, indem wir jetzt den Kern

$$K_{(2)}(s,t) = K_{(1)}(s,t) - \frac{\psi_2(s)\,\psi_2(t)}{\mu_2} = K(s,t) - \frac{\psi_1(s)\,\psi_1(t)}{\mu_1} - \frac{\psi_2(s)\,\psi_2(t)}{\mu_2}$$

bilden und das Maximum der Integralform

$$J_{(2)}(\varphi, \varphi) = \iint K_{(2)}(s,t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt$$

suchen, vorausgesetzt, daß diese noch positiver Werte fähig ist. Es ergibt sich dann genau wie oben als Lösung eine Funktion $\psi_3(s)$ und ein Maximalwert $\varkappa_3 = \frac{1}{\mu_3}$, für welche die homogene Integralgleichung $\psi_3(s) = \mu_3 \int K(s,t)\,\psi_3(t)\,dt$ besteht und für welche die Orthogonalitätsrelationen $(\psi_3, \psi_1) = 0$, $(\psi_3, \psi_2) = 0$ gelten. Wir könnten diese Lösung ebenso durch das Problem erhalten, die ursprüngliche Integralform durch

eine zu ψ_1 und ψ_2 orthogonale normierte Funktion zum Maximum zu machen. Ebenso wie oben folgt $\mu_2 \leqq \mu_3$.

So fahren wir fort, und zwar unbegrenzt, wenn die dabei entstehenden Kerne $K_{(1)}$, $K_{(2)}$, $K_{(3)}$, ... noch stets zu Integralformen Anlaß geben, die positiver Werte fähig sind; tritt aber in der entstehenden Reihe ein erster Kern

$$K_{(m)}(s,t) = K(s,t) - \frac{\psi_1(s)\,\psi_1(t)}{\mu_1} - \cdots - \frac{\psi_m(s)\,\psi_m(t)}{\mu_m} \tag{43}$$

auf, für welchen stets $J_{(m)}(\varphi,\varphi) \leqq 0$ ist, so brechen wir das Verfahren mit der Eigenfunktion $\psi_m(s)$ und dem Eigenwert μ_m ab.

Ebenso wie die positiven Eigenwerte und zugehörigen Eigenfunktionen können wir nun auch eine Reihe von negativen Eigenwerten und zugehörigen Eigenfunktionen: $\mu_{-1}, \mu_{-2}, \cdots$; $\psi_{-1}(s), \psi_{-2}(s), \ldots$ erhalten, falls die Integralform $J(\varphi,\varphi)$ negativer Werte fähig ist. Wir brauchen dazu nur die den oben gestellten Maximumproblemen entsprechenden Minimumprobleme zu betrachten. So gelangen wir zu einer unendlichen oder abbrechenden Folge von negativen, nie zunehmenden Eigenwerten

$$\mu_{-1} \geqq \mu_{-2} \geqq \mu_{-3} \cdots \tag{44}$$

und zugehörigen, zueinander orthogonalen Eigenfunktionen $\psi_{-1}(s)$, $\psi_{-2}(s)$, ... Die Eigenfunktionen $\psi_{-k}(s)$ sind orthogonal zu den Eigenfunktionen $\psi_k(s)$; wir können dies direkt aus den beiden Gleichungen

$$\varkappa_k \psi_k(s) = \int K(s,t)\,\psi_k(t)\,dt,$$
$$\varkappa_{-k} \psi_{-k}(s) = \int K(s,t)\,\psi_{-k}(t)\,dt$$

schließen, indem wir die erste mit $\psi_{-k}(s)$, die zweite mit $\psi_k(s)$ multiplizieren, sodann beide voneinander abziehen und integrieren; unter Beachtung von $K(s,t) = K(t,s)$ erhalten wir

$$(\varkappa_k - \varkappa_{-k})\,(\psi_k, \psi_{-k}) = 0,$$

was wegen $\varkappa_k \neq \varkappa_{-k}$ die behauptete Orthogonalität bedeutet.

Das Ergebnis unserer Überlegungen können wir auch formulieren, indem wir die sämtlichen so gefundenen positiven und negativen Eigenwerte nach steigendem absoluten Betrage anordnen und in dieser Reihenfolge mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ bezeichnen; es wird dann

$$|\lambda_1| \leqq |\lambda_2| \leqq |\lambda_3| \leqq \cdots. \tag{45}$$

Nennen wir die zugehörigen Eigenfunktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \varphi_3(s), \ldots$, so können wir sagen: Wir erhalten den ersten Eigenwert λ_1 des Kernes $K(s,t)$ als reziproken Wert der Integralform $J(\varphi,\varphi)$ für diejenige Funktion $\varphi(s)$, für welche der Betrag $|J(\varphi,\varphi)|$ bei der Neben-

bedingung $(\varphi, \varphi) \leqq 1$ das Maximum annimmt; diese Funktion ist die erste Eigenfunktion $\varphi(s) = \varphi_1(s)$. Der n^{te} Eigenwert λ_n ist der reziproke Wert der Integralform $J(\varphi, \varphi)$ für diejenige Funktion $\varphi(s)$, für welche der Betrag $|J(\varphi, \varphi)|$ unter den Nebenbedingungen $(\varphi, \varphi) \leqq 1$, $(\varphi, \varphi_i) = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ das Maximum erreicht; diese Funktion $\varphi(s) = \varphi_n(s)$ ist die zu $\lambda_n = \frac{1}{\varkappa'_n}$ gehörige Eigenfunktion. Ebenso können wir λ_n erhalten, indem wir für die zum Kerne

$$K'_{(n-1)} = K(s, t) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varphi_i(s)\, \varphi_i(t)}{\lambda_i}$$

gehörige Integralform

$$J'_{(n-1)}(\varphi, \varphi) = \iint K'_{(n-1)}(s, t)\, \varphi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt$$

das Maximum des absoluten Betrages lediglich unter der Bedingung $(\varphi, \varphi) \leqq 1$ aufsuchen.

Die Eigenfunktionen $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ... bilden ein normiertes, orthogonales Funktionensystem. Die Reihe der Eigenwerte bricht mit dem Eigenwert $\lambda_n = \frac{1}{\varkappa'_n}$ ab, wenn von da ab die Werte $\varkappa'_{n+1}, \varkappa'_{n+2}, \ldots$ Null werden. In diesem Falle muß der Kern $K(s, t)$ ausgeartet sein und die Form haben

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\, \varphi_i(t)}{\lambda_i}. \tag{46}$$

Denn dann muß der Kern $K(s, t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\, \varphi_i(t)}{\lambda_i} = \bar{K}(s, t)$ nach der Bemerkung auf S. 108 identisch verschwinden, da das Maximum und das Minimum der zugehörigen Integralform

$$\bar{J}(\varphi, \varphi) = \iint \bar{K}(s, t)\, \varphi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt$$

beide gleich Null sind. Also: *Ein Kern, der nur endlich viele Eigenwerte und Eigenfunktionen besitzt, ist ausgeartet. Umgekehrt besitzt ein ausgearteter Kern nur endlich viele Eigenwerte und Eigenfunktionen.* Denn wir haben oben erkannt, daß das Problem der Eigenwerte eines solchen Kernes äquivalent dem Eigenwertproblem einer quadratischen Form ist, bei dem ja nur endlich viele Eigenwerte auftreten.

Wir nennen einen Eigenwert λ_i *mehrfach*, und zwar *r-fach*, wenn genau r Eigenwerte gleich λ_i, alle anderen aber von λ_i verschieden sind; jede normierte lineare Kombination von zugehörigen Eigenfunktionen ist dann wieder eine Eigenfunktion. Jeder Eigenwert kann nur eine endliche Vielfachheit haben; diesen schon im § 1 bewiesenen Satz können wir mit einer wichtigen Verfeinerung auch folgendermaßen gewinnen: Wir wenden in bezug auf das orthogonale

Funktionensystem $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ die Besselsche Relation aus Kap. II, § 1, 3 an, indem wir schreiben

$$\int K(s,t)^2\,dt \geqq \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\int K(s,t)\,\varphi_i(t)\,dt\Big)^2 \tag{47}$$

oder

$$\int K(s,t)^2\,dt \geqq \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2}. \tag{48}$$

Dies enthält einmal die Tatsache, daß die aus lauter positiven Gliedern bestehende Reihe

$$T(s) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2} \tag{49}$$

konvergiert; zweitens folgt, wenn wir die Beziehung nochmals nach s integrieren, wegen $(\varphi_i, \varphi_i) = 1$,

$$\iint K(s,t)^2\,ds\,dt \geqq \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i^2}. \tag{50}$$

Somit erkennen wir, daß *die Summe der reziproken Quadrate der Eigenwerte konvergiert*; die Eigenwerte können also im Endlichen gewiß keine Häufungsstelle besitzen und müssen, wenn sie in unendlicher Anzahl vorhanden sind, absolut genommen über alle Grenzen wachsen.

Hieraus folgt, daß wir in den oben definierten Eigenwerten λ_i und Eigenfunktionen φ_i die Gesamtheit der Eigenwerte und Eigenfunktionen vor uns haben. Es genügt, den Satz für nicht ausgeartete Kerne zu beweisen. Wäre σ ein anderer Eigenwert und χ eine zugehörige Eigenfunktion, so müßte zufolge der obigen Schlußweise χ orthogonal auf allen φ_i stehen, also insbesondere bei beliebigem n auf $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Es müßte also wegen der Maximumeigenschaft der Funktion φ_{n+1} die Beziehung $|J(\chi,\chi)| \leqq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|}$ gelten und $J(\chi,\chi) = \int K(s,t)\,\chi(s)\,\chi(t)\,ds\,dt = \frac{1}{\sigma}\int \chi(t)^2\,dt = 0$ sein, woraus $\chi(t) = 0$ folgen würde.

Wir schließen an unsere Ergebnisse noch einige später zu verwendende Bemerkungen an:

Verstehen wir unter $\eta_1(s), \eta_2(s), \ldots$; $\zeta_1(s), \zeta_2(s), \ldots$ zwei Folgen von stetigen (oder stückweise stetigen) Funktionen, deren Normen $N\eta_n$, $N\zeta_n$ unterhalb einer festen Schranke M liegen, so gilt für den Kern $K'_{(n)}(s,t) = K(s,t) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(s)\,\varphi_i(t)}{\lambda_i}$ die Relation

$$\lim_{n\to\infty} J'_{(n)}(\eta_n, \zeta_n) = \lim_{n\to\infty}\iint K'_{(n)}(s,t)\,\eta_n(s)\,\zeta_n(t)\,ds\,dt = 0 \tag{51}$$

gleichmäßig in dem Sinne, daß die Kleinheit der linken Seite außer von M nur von der Wahl von n abhängt.

In der Tat ist infolge der Maximumeigenschaft der Eigenwerte und Eigenfunktionen

$$|J'_{(n)}(\eta_n+\zeta_n,\eta_n+\zeta_n)| \leqq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} N(\eta_n+\zeta_n) \leqq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} 4M \text{ [1]},$$

$$|J'_{(n)}(\eta_n,\eta_n)| \leqq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} M, \qquad |J'_n(\zeta_n,\zeta_n)| \leqq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} M,$$

woraus sich wegen $|\lambda_n| \to \infty$ und

$$J(\eta+\zeta,\eta+\zeta) = J(\eta,\eta) + 2J(\eta,\zeta) + J(\zeta,\zeta)$$

sofort die Behauptung ergibt.

Weiter bemerken wir: *Ein Kern ist dann und nur dann positiv definit, wenn alle seine Eigenwerte positiv sind.*

Dann und nur dann besitzt nämlich die Integralform $J(\varphi,\varphi)$ kein negatives Minimum und ist somit überhaupt negativer Werte nicht fähig.

Schließlich: *Alle Eigenwerte eines reellen symmetrischen Kernes sind reell.* Der Beweis dieser Behauptung wird sich zwar in § 5 ganz von selbst ergeben; wir wollen ihn aber doch schon hier auf eine andere direkte Weise führen. Der Satz besagt mit anderen Worten, daß es keine komplexe Zahl $\lambda = p + iq$ mit zugehöriger komplexer Funktion $\varphi(s) = \psi(s) + i\chi(s)$ von s gibt (wobei ψ und χ reelle, nicht identisch verschwindende Funktionen sind), so daß $\varphi(s) = \lambda \int K(s,t)\varphi(t)\,dt$ ist. Von den konjugierten Größen $\bar{\lambda}$, $\bar{\varphi}$ müßte dann nämlich auch $\bar{\varphi} = \bar{\lambda}\int K(s,t)\bar{\varphi}(t)\,dt$ gelten. Dann aber ergibt sich wie oben, wenn $\lambda - \bar{\lambda} = 2iq \neq 0$ ist, die Orthogonalitätsrelation

$$\int \varphi(s)\bar{\varphi}(s)\,ds = \int(\psi^2+\chi^2)\,ds = 0, \text{ d. h. } \psi = 0,\ \chi = 0,$$

was $\varphi = 0$ zur Folge hat. Hierin aber liegt ein Widerspruch zu der Annahme, von der wir ausgingen.

3. Die Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte. Genau wie bei den quadratischen Formen in Kap. I können wir auch hier eine direkte Definition des Eigenwertes λ_n bzw. μ_n oder μ_{-n} und der zugehörigen Eigenfunktionen durch ein Maximum-Minimum-Problem geben.

Wir betrachten etwa die positiven Eigenwerte μ_n des Kernes $K(s,t)$ und nehmen an, daß es mindestens n gebe. Dann stellen wir das Problem, $J(\varphi,\varphi)$ zum Maximum zu machen, wenn $\varphi(s)$ außer der Bedingung $(\varphi,\varphi) = 1$ noch den $n-1$ Bedingungen

$$(52) \qquad (\varphi, v_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

genügt, wo $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ irgendwelche gegebene stetige Funktionen sind. Wir lassen es, obwohl der Beweis nach dem obigen Muster leicht zu

[1]) Daß $N(\eta_n+\zeta_n) = (\eta_n,\eta_n) + (\zeta_n,\zeta_n) + 2(\eta_n,\zeta_n) \leqq 4M$ ist, folgt unmittelbar mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung.

führen ist, dahingestellt, ob die jedenfalls vorhandene obere Grenze von $J(\varphi, \varphi)$ wirklich für eine der zugelassenen Funktionen angenommen wird. Jedenfalls ist diese obere Grenze irgendwie von der Wahl der Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ abhängig; wir bezeichnen sie deshalb mit $\varkappa_n\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$. Speziell für $v_i = \psi_i$ wird nach unseren obigen Sätzen $\varkappa_n\{v_i\} = \varkappa_n$, und diese obere Grenze wird angenommen für $\varphi = \psi_n(s)$. Wir behaupten nun, daß für jedes Funktionensystem $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ gilt

$$\varkappa_n\{v_i\} \geqq \varkappa_n .$$

Zum Beweise bilden wir durch lineare Kombination der Funktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ eine Funktion $\varphi(s) = c_1\psi_1(s) + \cdots + c_n\psi_n(s)$. Indem wir $\varphi(s)$ den Bedingungen $(\varphi, \varphi) = 1$ und (52) unterwerfen, verlangen wir

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i(\psi_i, v_h) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1) .$$

Dieses aus $n-1$ homogenen linearen Gleichungen für die n Unbekannten c_i und einer Normierungsbedingung bestehende Gleichungssystem können wir stets befriedigen. Setzen wir die so gefundene Funktion $\varphi(s)$ in $J(\varphi, \varphi)$ ein, so erhalten wir

$$J(\varphi, \varphi) = \sum_{i,k=1}^{n} c_i c_k J(\psi_i, \psi_k) ,$$

also wegen $J(\psi_i, \psi_i) = \frac{1}{\mu_i}$, $J(\psi_i, \psi_k) = 0$ für $i \neq k$

$$J(\varphi, \varphi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^2}{\mu_i} = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \varkappa_i \geqq \varkappa_n \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \varkappa_n .$$

Das Maximum von $J(\varphi, \varphi)$ ist erst recht mindestens gleich $\varkappa_n$, und wir erhalten das Resultat: *Der n^{te} positive Eigenwert von $K(s,t)$ ist der kleinste Wert, welchen das Maximum oder die obere Grenze von $J(\varphi, \varphi)$ annehmen kann, wenn die Funktion $\varphi(s)$ außer der Bedingung $(\varphi, \varphi) = 1$ noch $n-1$ Bedingungen der Form* (52) *unterworfen ist und dieses Maximum in seiner Abhängigkeit von den Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ betrachtet wird. Das Minimum dieses Maximums wird angenommen für $v_1 = \psi_1, \ldots, v_{n-1} = \psi_{n-1}$ und $\varphi = \psi_n$.*

Ganz entsprechend werden die negativen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenfunktionen ψ_{-n} durch das Maximum des Minimums von $J(\varphi, \varphi)$ bei den entsprechenden Bedingungen definiert.

Schließlich kann man auch den Eigenwert λ_n und die zugehörige Eigenfunktion φ_n durch das Minimum des Maximums des absoluten Betrages von $J(\varphi, \varphi)$ bei einer entsprechenden Anzahl von Nebenbedingungen definieren, wofür der Beweis dem Leser überlassen bleiben kann.

Aus den Maximum-Minimum-Eigenschaften der Eigenwerte folgt unmittelbar der Satz: ***Addiert man zu einem Kern $K(s,t)$ einen positiv***

definiten Kern $K^+(s,t)$ bzw. einen negativ definiten Kern $K^-(s,t)$, so ist jeder positive und negative Eigenwert des Kernes $K+K^+$ bzw. $K+K^-$ nicht kleiner bzw. nicht größer als der entsprechende Eigenwert des Kernes K[1]). Der Beweis ergibt sich durch dieselbe Überlegung wie in Kap. I; § 4.

§ 5. Der Entwicklungssatz und seine Anwendungen.

1. Der Entwicklungssatz. Wenn wir wüßten, daß der Kern, entsprechend der Hauptachsentransformation einer quadratischen Form[2]), eine Reihenentwicklung

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\,\varphi_i(t)}{\lambda_i} \tag{53}$$

zuläßt, wobei die Reihe rechts in jeder der Variablen gleichmäßig konvergiert, so wäre damit für jede Funktion $g(s)$ der Form

$$g(s) = \int K(s,t)\,h(t)\,dt, \tag{54}$$

wobei $h(t)$ irgendeine stetige oder stückweise stetige Funktion ist, die Reihenentwicklung

$$g(s) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i\,\varphi_i(s), \quad g_i = (g,\varphi_i) = (h,\varphi_i)\frac{1}{\lambda_i} \tag{55}$$

als gültig bewiesen, wie wir schon in Kap. II, § 11 sahen. Der Umstand, daß wir die Relation (53) nicht allgemein als gültig nachweisen können, nötigt uns beim Beweise der allgemeinen Gültigkeit der Entwicklung für $g(s)$ zu einem kleinen Umweg. Es seien $h_i = (h,\varphi_i)$ die Entwicklungskoeffizienten von h in bezug auf das Orthogonalsystem $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, $g(s)$ eine nach (54) durch $h(s)$ „quellenmäßig dargestellte" stetige Funktion und

$$g_i = (g,\varphi_i) = \frac{h_i}{\lambda_i} \tag{56}$$

die Entwicklungskoeffizienten von g. Wegen der Besselschen Ungleichung konvergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2$. Gemäß Gleichung (49) und (49′) in § 4, 2 konvergiert die Summe $T = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2}$ und ist gleichmäßig in s beschränkt. Nach der Schwarzschen Ungleichung ist nun

$$\left[\frac{h_n\,\varphi_n(s)}{\lambda_n} + \cdots + \frac{h_m\,\varphi_m(s)}{\lambda_m}\right]^2 \leqq (h_n^2 + \cdots + h_m^2)\left(\frac{\varphi_n(s)^2}{\lambda_n^2} + \cdots + \frac{\varphi_m(s)^2}{\lambda_m^2}\right).$$

[1]) Vgl. *Weyl, H.:* Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung) Math. Ann. Bd. 71, S. 441—479. 1912.

[2]) Vgl. Kap. I, § 3.

Also wird, da der Rest $h_n^2 + \cdots + h_m^2$ beliebig klein ist, sobald nur n hinreichend groß geworden ist, und da $\frac{\varphi_n(s)^2}{\lambda_n^2} + \cdots + \frac{\varphi_m(s)^2}{\lambda_m^2}$ unterhalb einer festen Schranke M bleibt, die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_i \varphi_i(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(s)$$

absolut und gleichmäßig konvergieren. Ihre Summe

$$\gamma(s) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} g_i \varphi_i(s) = \lim_{n \to \infty} \gamma_n(s)$$

ist eine stetige Funktion von s. Wir haben zu zeigen, daß $\gamma(s)$ mit $g(s)$ identisch ist. Zu diesem Zwecke bilden wir

$$K_{(n)}(s, t) = K(s, t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\, \varphi_i(t)}{\lambda_i} \quad [1]$$

$$g(s) - \gamma_n(s) = \int K_{(n)}(s, t)\, h(t)\, dt,$$

multiplizieren diese Gleichung mit einer willkürlichen stetigen Funktion $w(s)$ von s und integrieren nach s. Wegen der Relation (51) aus § 4, 2 wird für wachsendes n in der Relation

$$\int w(s)\,(g(s) - \gamma_n(s))\, ds = \iint K_{(n)}(s, t)\, h(t)\, w(s)\, ds\, dt$$

die rechte Seite gegen Null konvergieren, so daß wir wegen $\gamma_n(s) \to \gamma(s)$

$$\int w(s)\,(g(s) - \gamma(s))\, ds = 0$$

erhalten. Diese Gleichung soll für eine willkürliche Funktion $w(s)$ bestehen, also auch für $w(s) = g(s) - \gamma(s)$. Aus der Stetigkeit von $g(s) - \gamma(s)$ folgt aber, daß die Gleichung $(g - \gamma,\ g - \gamma) = 0$ nur dann bestehen kann, wenn $g(s) - \gamma(s)$ identisch Null ist, wie wir beweisen wollten. Damit haben wir den fundamentalen Entwicklungssatz erhalten:

Jede durch Vermittlung einer stückweise stetigen Funktion $h(t)$ in der Form (54) *quellenmäßig darstellbare stetige Funktion $g(s)$ ist nach den Eigenfunktionen von $K(s, t)$ in eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe entwickelbar.*

2. Auflösung der inhomogenen linearen Integralgleichung. Als wichtigste allgemeine Anwendung dieses Satzes leiten wir die Formel für die Auflösung der inhomogenen Integralgleichung

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s, t)\, \varphi(t)\, dt \tag{57}$$

[1]) Wir bezeichnen so von nun ab diese früher (S. 113) mit $K'_{(n)}$ bezeichnete Funktion.

ab. Dabei setzen wir zunächst voraus, daß der Parameterwert λ mit keinem der Eigenwerte λ_i identisch sei. Nehmen wir an, die stetige Funktion $\varphi(s)$ mit den Entwicklungskoeffizienten (φ, φ_i) löste die Integralgleichung, so müßte die Funktion $\varphi(s) - f(s) = g(s)$ sich nach dem Entwicklungssatze, angewandt für $h(t) = \lambda\varphi(t)$, in eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe

$$g(s) = \varphi(s) - f(s) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(s) = \lambda \int K(s,t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{58}$$

entwickeln lassen, wobei $c_i = (g, \varphi_i)$ ist. Andererseits muß zufolge (58)

$$c_i = (g, \varphi_i) = \lambda \iint K(s,t)\,\varphi_i(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda_i}(\varphi_i, \varphi) = \frac{\lambda}{\lambda_i}(\varphi_i, f) + \frac{\lambda}{\lambda_i}(\varphi_i, g)$$

sein, woraus

$$c_i = f_i \frac{\lambda}{\lambda_i - \lambda} \tag{59}$$

folgt. Wir würden also für φ die Reihenentwicklung

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(s) \tag{60}$$

erhalten, welche die Lösung von (57) darstellen muß. Daß dies wirklich so ist, erkennt man folgendermaßen: Erstens konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig, wie man genau nach dem obigen Muster beweist. Man braucht nur zu beachten, daß für hinreichend große i bei beliebigem λ jedenfalls $|\lambda_i - \lambda| > \frac{|\lambda_i|}{2}$ gilt, so daß wir, abgesehen von Anfangsgliedern, in der Reihe $2|\lambda| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|f_i|\,|\varphi_i(s)|}{|\lambda_i|}$ eine Majorante erhalten, deren gleichmäßige Konvergenz oben bewiesen ist. Setzt man dann die Reihe (60) in (57) für $\varphi(s)$ ein, so bestätigt man unmittelbar, daß die Gleichung (57) erfüllt ist.

Diese Auflösung versagt in Übereinstimmung mit der Theorie von § 3 nur dann, wenn $\lambda = \lambda_i$ ein Eigenwert ist; sie bleibt in diesem Falle noch gültig, wenn $f(s)$ die Bedingungen $f_i = (f, \varphi_i) = 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ erfüllt. Da nach den Sätzen von § 3 die Integralgleichung (57) für gewisse Funktionen $f(s)$ keine Lösung haben darf, wenn λ ein Eigenwert ist, so kann es also außer unseren Werten λ_i keine weiteren Eigenwerte des Kernes geben. Unsere Behauptung, daß alle Eigenwerte eines symmetrischen reellen Kernes reell sind, ist damit von neuem, unabhängig von den Ausführungen auf S. 115, selbstverständlich gemacht.

3. Die Bilinearformel für die iterierten Kerne. Eine weitere Anwendung des Entwicklungssatzes machen wir, indem wir $h(\sigma) = K(\sigma, t)$ setzen. Dann erhalten wir für den *„iterierten Kern"*

$$K^{(2)}(s, t) = \int K(s, \sigma)\, K(\sigma, t)\, d\sigma$$

die Entwicklung

$$K^{(2)}(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)}{\lambda_i} \int K(\sigma, t)\, \varphi_i(\sigma)\, d\sigma$$

oder

$$K^{(2)}(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\, \varphi_i(t)}{\lambda_i^2}. \tag{61}$$

Ebenso ergeben sich für die weiteren iterierten Kerne

$$\begin{aligned} K^{(3)}(s, t) &= \int K^{(2)}(s, \sigma)\, K(\sigma, t)\, d\sigma \\ &= \iint K(s, \sigma_1)\, K(\sigma_1, \sigma_2)\, K(\sigma_2, t)\, d\sigma_1\, d\sigma_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K^{(n)}(s, t) &= \int K^{(n-1)}(s, \sigma)\, K(\sigma, t)\, d\sigma \\ &= \int \cdots \int K(s, \sigma_1)\, K(\sigma_1, \sigma_2) \cdots K(\sigma_{n-1}, t)\, d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n-1} \end{aligned}$$

die Entwicklungen

$$K^{(n)}(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\, \varphi_i(t)}{\lambda_i^n} \qquad (n = 2, 3, \ldots), \tag{62}$$

welche alle absolut und gleichmäßig in s und in t und, wie sich in Nr. 4 ergeben wird, auch gleichmäßig in beiden Variablen konvergieren.

Wegen (61) gilt jedenfalls die Gleichung

$$K^{(2)}(s, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2},$$

also

$$\lim_{n \to \infty} \left(K^{(2)}(s, s) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2} \right) = 0.$$

Das heißt aber, es ist

$$\lim_{n \to \infty} \int \left[K(s, t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\, \varphi_i(t)}{\lambda_i} \right]^2 dt = 0. \tag{63}$$

Falls die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\, \varphi_i(t)}{\lambda_i}$ bei festem s gleichmäßig in t konvergiert, also bei festem s eine stetige Funktion $H(s, t)$ von t darstellt, muß daher

$K = H$ sein. Denn dann können wir in (63) den Grenzübergang unter dem Integralzeichen ausführen und erhalten $\int [K(s,t) - H(s,t)]^2 \, dt = 0$, woraus $K - H = 0$ folgt.

4. Der Mercersche Satz[1]. Es liegt in der Natur der Sache, daß man die Gültigkeit der Formel (63) als Ersatz für die Gleichung (53) betrachten muß, da man (62) erst von $n = 2$ ab allgemein beweisen kann. Dagegen können wir für einen wichtigen Sonderfall folgenden Satz aussprechen: *Wenn $K(s,t)$ ein definiter, stetiger, symmetrischer Kern ist oder nur endlich viele Eigenwerte von einem der beiden Vorzeichen hat, dann gilt die Entwicklung* (53), *und zwar konvergiert sie absolut und gleichmäßig.*

Zum Beweise nehmen wir zunächst an, $K(s,t)$ sei positiv definit, also alle Eigenwerte λ_i positiv. Ferner schicken wir die Bemerkung voraus, daß für jeden positiv definiten stetigen Kern $H(s,t)$ die Beziehung $H(s,s) \geqq 0$ gilt. Wäre nämlich $H(s_0, s_0) < 0$, so gäbe es eine Umgebung der Stelle $s = s_0$, $t = s_0$, etwa $|s - s_0| \leqq \varepsilon$, $|t - s_0| \leqq \varepsilon$, so daß in diesem Gebiete überall $H(s,t) < 0$ ist. Dann definieren wir die Funktion $\varphi(s)$ durch $\varphi(s) = 1$ für $|s - s_0| \leqq \varepsilon$, dagegen $\varphi(s) = 0$ außerhalb dieses Intervalles. Für diese Funktion gilt sicherlich

$$\iint H(s,t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt < 0$$

entgegen der Voraussetzung, daß H positiv definit ist. Wenden wir das Resultat auf den positiv definiten Kern $H = K(s,t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\,\varphi_i(t)}{\lambda_i}$ an, so erhalten wir

$$K(s,s) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i} \geqq 0 .$$

Daher konvergiert die aus lauter positiven Gliedern bestehende Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i}$ für jeden Wert von s. Wegen der Relation

$$\left(\frac{\varphi_n(s)}{\sqrt{\lambda_n}}\,\frac{\varphi_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}} + \cdots + \frac{\varphi_m(s)}{\sqrt{\lambda_m}}\,\frac{\varphi_m(t)}{\sqrt{\lambda_m}}\right)^2 \leqq \left(\frac{\varphi_n(s)^2}{\lambda_n} + \cdots + \frac{\varphi_m(s)^2}{\lambda_m}\right)\left(\frac{\varphi_n(t)^2}{\lambda_n} + \cdots + \frac{\varphi_m(t)^2}{\lambda_m}\right)$$

(Schwarzsche Ungleichung) konvergiert also auch die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\,\varphi_i(t)}{\lambda_i}$ absolut, und zwar bei festem s gleichmäßig in t und bei festem t gleichmäßig in s; die Funktion $H = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\,\varphi_i(t)}{\lambda_i}$ ist also bei festem s stetig

[1] *Mercer, T.:* Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations. Trans. London Phil. Soc. (A) Bd. 209, S. 415—446. 1909.

in t und umgekehrt. Wir haben also dem Obigen zufolge identisch $H = K$.

Schließlich überzeugen wir uns noch davon, daß diese Reihe auch in beiden Variablen zugleich gleichmäßig konvergiert; hierzu genügt es nach den oben stehenden Abschätzungen, die Gleichmäßigkeit der Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i}$ nachzuweisen. Wegen (53) ist aber $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i} = K(s,s)$, und $K(s,s)$ ist eine stetige Funktion. Nun gilt der Satz[1]): Wenn eine Reihe von positiven, stetigen Funktionen einer Variablen gegen eine stetige Funktion konvergiert, so konvergiert die Reihe in dem betreffenden Intervall gleichmäßig. Die Anwendung dieses Satzes liefert unmittelbar das behauptete Resultat.

Das Auftreten endlich vieler negativer Eigenwerte kann an der Konvergenz der Reihe (53) nichts ändern, da der Kern nach Abtrennung der zu negativen Eigenwerten gehörigen Terme $\frac{\varphi_i(s)\,\varphi_i(t)}{\lambda_i}$ positiv definit wird. Somit ist unser Konvergenztheorem in vollem Umfange bewiesen.

§ 6. Die Neumannsche Reihe und der reziproke Kern.

Die oben dargelegte Theorie der Integralgleichungen liefert uns zugleich eine Auflösungsmethode, indem sie uns einen Weg weist, die Lösungen wirklich mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen. (Siehe auch § 8.) Sie gibt uns jedoch die Lösungen nicht in einer eleganten geschlossenen Form, wie es bei der Gleichungstheorie in Kap. I ausgeführt wurde. Zu einer solchen expliziten Auflösung können wir aber auch hier ganz analog wie in Kap. I gelangen. Wir schreiben die Integralgleichung (1), indem wir rechts für $\varphi(t)$ wieder den Ausdruck aus (1) einsetzen und so fortfahren, mit Hilfe der iterierten Kerne in der Gestalt

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= f(s) + \lambda\int K(s,t)\,f(t)\,dt + \lambda^2\int K^{(2)}(s,t)\,\varphi(t)\,dt\\ &= f(s) + \lambda\int K(s,t)\,f(t)\,dt + \lambda^2\int K^{(2)}(s,t)\,f(t)\,dt + \lambda^3\int K^{(3)}(s,t)\,\varphi(t)\,dt\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

und erkennen hieraus ebenso wie in Kap. I, daß die Lösung durch die unendliche Reihe

$$(64)\qquad \varphi(s) = f(s) + \lambda\int K(s,t)\,f(t)\,dt + \lambda^2\int K^{(2)}(s,t)\,f(t)\,dt + \cdots$$

gegeben wird, falls diese Reihe gleichmäßig konvergiert. Setzen wir etwas weitergehend die gleichmäßige Konvergenz des Ausdrucks

$$(65)\qquad \mathsf{K}(s,t) = K(s,t) + \lambda K^{(2)}(s,t) + \lambda^2 K^{(3)}(s,t) + \cdots$$

[1]) Vgl. S. 61, Anm.

voraus, so stellt sich die Lösung der Integralgleichung (1)

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

durch die *„reziproke Integralgleichung"*

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int \mathsf{K}(s,t)\,f(t)\,dt \tag{66}$$

dar. Wir nennen darum die Funktion $\mathsf{K}(s,t) = \mathsf{K}(s,t;\lambda)$ auch den *lösenden Kern* oder die *Resolvente*.

Die Reihe (64) oder (65) bezeichnen wir als die *Neumannsche Reihe*. Sie konvergiert jedenfalls für hinreichend kleine Werte von λ, z. B. für $\lambda < \frac{1}{M}$, wo M eine obere Schranke für den Betrag von $K(s,t)$ ist. Der lösende Kern ist also für hinreichend kleine λ eine analytische Funktion von λ. Wie man durch Einsetzen sofort einsieht, genügt er den folgenden Relationen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathsf{K}(s,t;\lambda) &= K(s,t) + \lambda \int K(s,\sigma)\,\mathsf{K}(\sigma,t;\lambda)\,d\sigma \\ \mathsf{K}(s,t;\lambda) &= K(s,t) + \lambda \int K(\sigma,s)\,\mathsf{K}(t,\sigma;\lambda)\,d\sigma \\ \mathsf{K}(s,t;\lambda) - \mathsf{K}(s,t;\lambda') &= (\lambda-\lambda') \int \mathsf{K}(s,\sigma;\lambda)\,\mathsf{K}(\sigma,t;\lambda')\,d\sigma\,. \end{aligned}\right. \tag{67}$$

Ist der Kern $K(s,t)$ symmetrisch, so können wir dem lösenden Kern sehr leicht eine höchst bemerkenswerte Form geben, welche die Art der analytischen Abhängigkeit der Funktion K von λ in Evidenz setzt. Indem wir für die symmetrischen Kerne $K^{(2)}(s,t)$, $K^{(3)}(s,t)$, ... die Entwicklungen (62) beachten, erhalten wir nämlich durch Summation der in (65) auftretenden geometrischen Reihen sofort

$$\mathsf{K}(s,t;\lambda) = K(s,t) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\,\varphi_i(t)}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)}. \tag{68}$$

Hierbei konvergiert, wie eine Überlegung ganz analog zu der in § 5, 1 und § 5, 2 durchgeführten zeigt, die Reihe rechts für jeden Wert λ, der kein Eigenwert ist, und zwar gleichmäßig in s und t.

Die zunächst nur unter Voraussetzung der Konvergenz der Reihe (65) bewiesene Relation (68) gibt die analytische Fortsetzung der Resolvente $\mathsf{K}(s,t;\lambda)$ in die ganze λ-Ebene, wobei die Eigenwerte λ_i sämtlich als einfache Pole erscheinen. Wir haben somit in (68) die Partialbruchzerlegung der Resolvente und können unser Ergebnis so aussprechen: *Die Resolvente ist eine meromorphe Funktion von λ, die in den Eigenwerten der Integralgleichung einfache Pole besitzt.* Ihre Residuen im Pole λ_i liefern die zu diesem Werte gehörigen Eigenfunktionen.

Nach den Sätzen der allgemeinen Funktionentheorie muß sich die Resolvente $\mathsf{K}(s,t;\lambda)$ als meromorphe Funktion in Form eines Quotienten zweier ganzer transzendenter Funktionen schreiben lassen, und man

muß erwarten, daß diese ganzen transzendenten Funktionen sich durch solche überall konvergierende Potenzreihen ausdrücken lassen, deren Koeffizienten mit Hilfe des gegebenen Kernes direkt gebildet werden können. Im algebraischen Falle haben wir eine solche Darstellung in den Formeln aus Kap. I, § 2 vor uns. Die Vermutung liegt nahe, daß sich hier ganz analoge Formeln aufstellen lassen. Ferner dürfen wir erwarten, daß diese Formeln keineswegs auf den Fall symmetrischer Kerne beschränkt bleiben, sondern auch für beliebige stetige unsymmetrische Kerne gelten. Solche Formeln sind nun tatsächlich von Fredholm aufgestellt und zum Ausgangspunkt der Theorie gemacht worden. Wir wollen im nächsten Paragraphen zeigen, wie sich diese Fredholmschen Formeln naturgemäß herleiten lassen, indem wir wieder den Kern durch ausgeartete Kerne $A_n(s,t)$ gleichmäßig approximieren und dann den Grenzübergang $n \to \infty$ vollziehen[1]).

§ 7. Die Fredholmschen Formeln.

Da wir später keinen Gebrauch von den Fredholmschen Formeln machen werden, so wollen wir in den folgenden Ableitungen einige Determinantenzwischenrechnungen dem Leser überlassen[2]).

Wir benutzen wesentlich die Entwicklungen und Bezeichnungen von Kap. I, § 2. Für einen ausgearteten Kern $K(s,t) = A(s,t) = \sum_{p=1}^{n} \alpha_p(s)\,\beta_p(t)$ geht die Integralgleichung $f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$ in

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{p=1}^{n} x_p\,\alpha_p(s) = f(s) + \lambda\,E(x, \alpha(s)) \tag{69}$$

über, wenn, wie früher, $x_p = (\varphi, \beta_p)$ gesetzt wird. In den alten Bezeichnungen $y_p = (f, \beta_p)$, $k_{pq} = (\alpha_q, \beta_p)$ erhalten wir dann für die x_p das Gleichungssystem

$$y_p = x_p - \lambda \sum_{q=1}^{n} k_{pq}\,x_q\,. \tag{70}$$

Dessen Lösung lautet

$$E(x,u) = -\frac{\Delta(y,u;\lambda)}{\Delta(\lambda)}\,,$$

[1]) Diese Methode ist zuerst von *E. Goursat* angewandt worden in der Arbeit: Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm. Bull. Soc. math. France Bd. 35, S. 163—173. 1907. Vgl. auch *Lebesgue, H.:* Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm. Ib., Bd. 36. S. 3—19. 1908.

[2]) Im übrigen vgl. man *Kowalewski, G.:* Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig 1909.

wonach (69) aufgelöst wird durch

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda E(x, \alpha(s)) = f(s) - \lambda \frac{\Delta(y, \alpha(s); \lambda)}{\Delta(\lambda)} \tag{71}$$

dabei ist

$$\begin{cases} \Delta(y, u; \lambda) = \Delta_1(y, u) - \Delta_2(y, u)\lambda + \cdots + (-1)^{n-1}\Delta_n(y, u;)\lambda^{n-1}, \\ \Delta(\lambda) = 1 - \Delta_1\lambda + \cdots + (-1)^n \Delta_n \lambda^n \end{cases} \tag{71'}$$

mit

$$\begin{cases} \Delta_h(y, u) = \sum \begin{vmatrix} 0 & u_{p_1} & u_{p_2} & \cdots & u_{p_h} \\ y_{p_1} & k_{p_1 p_1} & k_{p_1 p_2} & \cdots & k_{p_1 p_h} \\ y_{p_2} & k_{p_2 p_1} & k_{p_2 p_2} & \cdots & k_{p_2 p_h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{p_h} & k_{p_h p_1} & k_{p_h p_2} & \cdots & k_{p_h p_h} \end{vmatrix}, \\ \Delta_h = \sum \begin{vmatrix} k_{p_1 p_1} & k_{p_1 p_2} & \cdots & k_{p_1 p_h} \\ k_{p_2 p_1} & k_{p_2 p_2} & \cdots & k_{p_2 p_h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{p_h p_1} & k_{p_h p_2} & \cdots & k_{p_h p_h} \end{vmatrix}, \end{cases} \tag{71''}$$

wobei $p_1, p_2, \ldots, p_h$ von 1 bis n laufen und $p_1 < p_2 < \cdots < p_h$ ist.

Offenbar kann die Determinantensumme $\Delta_h(y, \alpha(s))$ auch in der Gestalt $\int \Delta_h[\beta(t), \alpha(s)] f(t)\, dt$ geschrieben werden, so daß die Auflösung (71) der Integralgleichung die Form

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int \mathsf{K}(s, t) f(t)\, dt \tag{72}$$

mit der Resolvente

$$\mathsf{K}(s, t) = -\frac{\Delta(\beta(t), \alpha(s); \lambda)}{\Delta(\lambda)} \equiv -\frac{D(s, t; \lambda)}{D(\lambda)} \tag{72'}$$

erhält.

Man kann in den Formeln (71''), statt, wie angegeben, über die Kombinationen der Indizes 1, 2, ..., n „zur h^{ten} Klasse" zu summieren, nach Division durch $h!$ die Summe über alle Variationen, offenbar auch mit Wiederholung, bilden. Nach dieser Bemerkung ergeben sich auf Grund einfacher Determinantensätze unter Beachtung der Definition von k_{pq} die Formeln

$$\begin{cases} D(s, t; \lambda) = \Delta(\beta(t), \alpha(s); \lambda) \\ \qquad = D_0(s, t) - \frac{1}{1!} D_1(s, t)\lambda + \frac{1}{2!} D_2(s, t)\lambda^2 - \cdots \\ \qquad\qquad + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} D_{n-1}(s, t)\lambda^{n-1}, \\ D(\lambda) = \Delta(\lambda) \\ \qquad = 1 - \frac{1}{1!} D_1\lambda + \frac{1}{2!} D_2\lambda^2 - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} D_n \lambda^n \end{cases} \tag{73}$$

mit den Abkürzungen.

$$(73') \quad \begin{cases} D_h(s,t) = \int \cdots \int \begin{vmatrix} A(s,t) & A(s,s_1) & \cdots & A(s,s_h) \\ A(s_1,t) & A(s_1,s_1) & \cdots & A(s_1,s_h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A(s_h,t) & A(s_h,s_1) & \cdots & A(s_h,s_h) \end{vmatrix} ds_1\, ds_2 \cdots ds_h, \\ D_h = \int \cdots \int \begin{vmatrix} A(s_1,s_1) & A(s_1,s_2) & \cdots & A(s_1,s_h) \\ A(s_2,s_1) & A(s_2,s_2) & \cdots & A(s_2,s_h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A(s_h,s_1) & A(s_h,s_2) & \cdots & A(s_h,s_h) \end{vmatrix} ds_1\, ds_2 \cdots ds_h. \end{cases}$$

Damit sind die ganzen rationalen Funktionen $D(s,t;\lambda)$ und $D(\lambda)$ von λ explizit durch den Kern ausgedrückt. Die Darstellungen (73) können formal auch als unendliche Reihen fortgesetzt werden, da, wie man leicht sieht, für den ausgearteten Kern $A(s,t) = \sum_{p=1}^{n} \alpha_p(s)\beta_p(t)$ die Größen D_h für $h > n$ und die $D_h(s,t)$ für $h > n-1$ sämtlich verschwinden.

Wird nun der beliebige stetige Kern $K(s,t)$ durch eine Folge ausgearteter Kerne gleichmäßig approximiert, so konvergieren die zugehörigen Ausdrücke (73') gegen die entsprechenden Determinanten des Kernes $K(s,t)$. Die unendlichen Reihen

$$(74) \quad \begin{cases} D(s,t;\lambda) = D_0(s,t) - \frac{1}{1!} D_1(s,t)\,\lambda + \cdots \\ D(\lambda) = 1 - \frac{1}{1!} D_1(s,t)\,\lambda + \frac{1}{2!} D_2\,\lambda^2 - \cdots, \end{cases}$$

wobei in den Ausdrücken (73') A durch K zu ersetzen ist, stellen für den nicht ausgearteten Kern $K(s,t)$ ganze transzendente Funktionen dar. Um dies einzusehen, brauchen wir nur zu zeigen, daß sie für jeden Wert von λ konvergieren. Ist für alle s,t stets $|K(s,t)| \leqq M$, so wird nach der Determinantenabschätzung von Hadamard (vgl. Kap. I, § 6, 1).

$$|D_h(s,t)| \leqq \sqrt{(h+1)^{h+1}}\, M^{h+1}(b-a)^h$$
$$|D_h| \leqq \sqrt{h^h}\, M^h (b-a)^h.$$

Da nun die Reihen

$$\sum_{h=0}^{\infty} \sqrt{(h+1)^{h+1}}\, M^{h+1}(b-a)^h \frac{\lambda^h}{h!}, \qquad 1 + \sum_{h=1}^{\infty} \sqrt{h^h}\, M^h (b-a)^h \frac{\lambda^h}{h!}$$

für jeden Wert von λ konvergieren[1]) und Majoranten für die Reihen der

[1]) Es gilt nämlich $\frac{1}{h!} < \frac{e^h}{h^h}$, da in der Entwicklung von e^h das Glied $\frac{h^h}{h!}$ vorkommt. Daher ist die h^{te} Wurzel aus dem Koeffizienten von λ^h in der Reihe rechts kleiner als $\frac{M(b-a)e}{h^{\frac{1}{2}}}$ und konvergiert also für $h \to \infty$ gegen 0, und dasselbe gilt auch für die erste der obigen Reihen.

absoluten Beträge der obigen Reihen (74) sind, so ist die Behauptung erwiesen; aus ihr folgt sogleich, daß für jeden Wert von λ im Sinne gleichmäßiger Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} D_n(s,t;\lambda) = D(s,t;\lambda), \qquad \lim_{n\to\infty} D_n(\lambda) = D(\lambda)$$

gilt, wobei sich die Größen mit dem Index n auf den n^{ten} approximierenden ausgearteten Kern $A_n(s,t)$, die ohne Index auf $K(s,t)$ beziehen. Also wird auch, solange wir uns nicht in einer Nullstelle $\lambda = \lambda_i$ von $D(\lambda)$ befinden, die Resolvente des Kernes $K(s,t)$:

$$(75)\qquad \mathsf{K}(s,t;\lambda) = -\frac{D_0(s,t) - \frac{1}{1!}D_1(s,t)\lambda + \ldots}{1 - \frac{1}{1!}D_1\lambda + \frac{1}{2!}D_2\lambda^2 - \ldots} = \lim_{n\to\infty}\mathsf{K}_n(s,t;\lambda),$$

und wir erhalten mit ihr auch für den beliebigen Kern $K(s,t)$ die Auflösungsformel

$$(76)\qquad \varphi(s) = f(s) + \lambda\int \mathsf{K}(s,t;\lambda) f(t)\,dt.$$

Die obigen Formeln nennt man nach ihrem Entdecker die *Fredholmschen Formeln.* Es besteht offenbar die Beziehung

$$(77)\qquad D_h = \int D_{h-1}(s,s)\,ds.$$

Ferner erwähnen wir, daß[1])

$$(78)\qquad D'(\lambda) = -\int D(s,s;\lambda)\,ds,$$

und für die m^{te} Ableitung allgemein

$$(78')\qquad D^{(m)}(\lambda) = (-1)^m \int\ldots\int D\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_m \\ s_1, s_2, \ldots, s_m \end{pmatrix}\lambda\, ds_1\, ds_2 \ldots ds_m$$

gilt, wenn wir

$$(78'')\qquad D\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_m \\ t_1, t_2, \ldots, t_m \end{pmatrix}\lambda = \sum_{h=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^h}{h!} D_h\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_m \\ t_1, t_2, \ldots, t_m \end{pmatrix}$$

und

$$(78''')\qquad \left\{\begin{aligned} &D_h\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_m \\ t_1, t_2, \ldots, t_m \end{pmatrix} = \\ &= \int\ldots\int \begin{vmatrix} K(s_1,t_1)\ldots K(s_1,t_m)\; K(s_1,\sigma_1)\ldots K(s_1,\sigma_h) \\ K(s_2,t_1)\ldots K(s_2,t_m)\; K(s_2,\sigma_1)\ldots K(s_2,\sigma_h) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K(s_m,t_1)\ldots K(s_m,t_m)\; K(s_m,\sigma_1)\ldots K(s_m,\sigma_h) \\ K(\sigma_1,t_1)\ldots K(\sigma_1,t_m)\; K(\sigma_1,\sigma_1)\ldots K(\sigma_1,\sigma_h) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K(\sigma_h,t_1)\ldots K(\sigma_h,t_m)\; K(\sigma_h,\sigma_1)\ldots K(\sigma_h,\sigma_h) \end{vmatrix} d\sigma_1\, d\sigma_2 \ldots d\sigma_h \end{aligned}\right.$$

setzen.

[1]) Vgl. *Fredholm, I.:* a. a. O.

Wir fügen noch hinzu, daß man die Nullösungen für die Nullstellen $\lambda = \lambda_i$ von $D(\lambda)$ erhält, indem man an diesen Stellen die Residuen der Resolvente $K(s, t; \lambda)$ bildet. Der Beweis hierfür ist aus unseren Formeln leicht zu führen[1]).

§ 8. Neubegründung der Theorie.

Wir begnügten uns bei der Begründung der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen mit der durch das Konvergenzprinzip aus Kap. II, § 2 gegebenen Gewißheit, daß aus der Schar der Lösungen der approximierenden Integralgleichungen eine gleichmäßig gegen eine Lösung der Integralgleichung konvergierende Folge herausgegriffen werden kann. Die gleichfalls schon in Kap. II eingeführten Begriffe des Unabhängigkeitsmaßes und der asymptotischen Dimensionenzahl einer Funktionenfolge bieten jedoch die Möglichkeit, die Integralgleichungstheorie auf einem anderen Wege zu begründen und dabei die gesamte Mannigfaltigkeit der Lösungen der approximierenden Gleichungen hinsichtlich ihrer Konvergenzeigenschaften mit wachsender Approximation vollständig zu übersehen; da sich dabei auch sonst neue bemerkenswerte Gesichtspunkte und Resultate ergeben, so sollen die betreffenden Entwicklungen hier einen Platz finden.

1. Ein Hilfssatz. Die Anwendung der in Kap. II, § 3, erläuterten Begriffe in der Integralgleichungstheorie beruht auf folgendem Hilfssatz: *Es sei $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, ... eine Folge von Funktionen, deren Norm unterhalb einer festen Schranke M bleibt, und für welche im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz die Relation*

$$\psi_n(s) - \lambda \int K(s, t)\, \psi_n(t)\, dt \to 0 \tag{79}$$

gilt. Dann bilden die Funktionen $\psi_n(s)$ eine glatte Funktionenfolge von endlicher asymptotischer Dimensionenzahl r.

Zum Beweise beachten wir, daß die Relation (79) auch dann bestehen bleibt, wenn wir die Funktionen $\psi_n(s)$ durch irgendwelche Funktionen $\chi_n(s)$ ersetzen, wobei $\chi_n(s) = x_1 \psi_{n_1} + \cdots + x_p \psi_{n_p}$ eine mit absolut beschränkt bleibenden Koeffizienten $x_1, x_2, \ldots, x_p$ gebildete lineare Kombination aus irgendeiner Anzahl p von solchen Funktionen

$$\psi_{n_1}, \psi_{n_2}, \ldots, \psi_{n_p}$$

der Folge ψ_n ist derart, daß die Indizes n_i mit n zugleich ins Unendliche wachsen. Gibt es nun unter den Funktionen $\psi_n(s)$ Gruppen von je r mit beliebig großen Indizes n, so daß das Unabhängigkeitsmaß dieser Gruppe oberhalb einer festen Schranke α bleibt, ist mit anderen

[1]) Für die weiteren Einzelheiten über den formalen Apparat der Fredholmschen Theorie vgl. *Kowalewski, G.:* Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig 1909.

Worten die Dimensionenzahl der Folge mindestens gleich r, so können wir diese Gruppen jede in sich orthogonalisieren, wobei nach Kap. II, § 3, 1, die auftretenden Koeffizienten unterhalb der Schranke $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ bleiben. So erhalten wir Gruppen von je r zueinander orthogonalen normierten Funktionen $\omega_{n,i}(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, r; n = 1, 2, 3, \ldots)$, für welche die Limesgleichung

$$\lim_{n\to\infty}\left(\omega_{n,i}(s) - \lambda\int K(s,t)\,\omega_{n,i}(t)\,dt\right) = 0 \tag{80}$$

besteht. Die gewohnte Schlußweise mit der Besselschen Ungleichung[1]) liefert

$$\iint K(s,t)^2\,ds\,dt \geqq \sum_{i=1}^{r}\int\left[\int K(s,t)\,\omega_{n,i}(t)\,dt\right]^2 ds,$$

und infolge von (80) daher

$$\iint K(s,t)^2\,ds\,dt \geqq r\,\overline{\lambda^2}.$$

Damit haben wir eine Schranke für die Dimensionenzahl der Folge erhalten und diese Zahl als endlich erwiesen. Daß die Folge glatt ist, ergibt sich unmittelbar aus der gleichmäßig angenähert quellenmäßigen Darstellung (79). Erstens ist nämlich, wenn wir unter ε_n eine mit wachsendem n gegen Null strebende Zahl bezeichnen, wegen der Schwarzschen Ungleichung

$$\psi_n(s)^2 \leqq M\lambda^2\int K(s,t)^2\,dt + \varepsilon_n,$$

was die absolute Beschränktheit der $\psi_n(s)$ bedeutet. Zweitens folgt ebenso aus $\int(x_1\psi_{n_1} + \cdots + x_p\psi_{n_p})^2\,ds < \varepsilon$ die Relation

$$(x_1\psi_{n_1} + \cdots + x_p\psi_{n_p})^2 \leqq \varepsilon\lambda^2\int K(s,t)^2\,dt + \varepsilon_n,$$

womit die Funktionenfolge als glatt erwiesen ist.

2. Die Eigenfunktionen eines symmetrischen Kernes. Wir wenden den bewiesenen Hilfssatz zunächst an, um die Eigenfunktionen eines symmetrischen Kernes $K(s,t)$ zu erhalten, der durch die ausgearteten symmetrischen Kerne $A_n(s,t)$ gleichmäßig approximiert werde. Es seien wie früher $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots$ die positiven, $\mu_{-1}^{(n)}, \mu_{-2}^{(n)}, \ldots$ die negativen Eigenwerte von $A_n(s,t)$, und $\psi_1^{(n)}(s)$, $\psi_2^{(n)}(s)$, $\ldots$ bzw. $\psi_{-1}^{(n)}(s)$, $\psi_{-2}^{(n)}(s)$, $\ldots$ die zugehörigen Eigenfunktionen. Mehrfache Eigenwerte sind dabei entsprechend mehrfach angeführt. Ferner seien wieder $J_n(\varphi,\varphi) = \int\int A_n(s,t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt$ und $J(\varphi,\varphi) = \int\int K(s,t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt$ die zu den Kernen $A_n(s,t)$ bzw. $K(s,t)$ gehörigen Integralformen, und es sei, wie wir voraussetzen dürfen, $J(\varphi,\varphi)$ positiver Werte fähig. Es ist $\varkappa_1^{(n)} = \frac{1}{\mu_1^{(n)}}$ das Maximum von

[1]) Vgl. § 4, 2 dieses Kapitels, S. 114.

$J_n(\varphi, \varphi)$ für eine normierte Funktion; $\varkappa_1 = \frac{1}{\mu_1}$ sei die obere Grenze von $J(\varphi, \varphi)$ unter derselben Nebenbedingung. Da die Werte von $J(\varphi, \varphi)$ und $J_n(\varphi, \varphi)$ sich bei hinreichend großem n um weniger als eine feste beliebig kleine Zahl unterscheiden, muß $\lim_{n \to \infty} \mu_1^{(n)} = \mu_1$ sein. Es folgt also aus $\psi_1^{(n)}(s) - \mu_1^{(n)} \int A_n(s,t)\, \psi_1^{(n)}(t)\, dt = 0$ wegen $A_n(s,t) \Rightarrow K(s,t)$ die Beziehung

$$\psi_1^{(n)}(s) - \mu_1 \int (Ks, t)\, \psi_1^{(n)}(t)\, dt \to 0\,. \tag{81}$$

Mithin bilden die Funktionen $\psi_1^{(n)}$ gemäß unserem Hilfssatz eine glatte Folge von endlicher, offenbar positiver Dimensionenzahl r[1]) und definieren daher nach Kap. II, § 3, eine lineare Funktionenschar mit den normierten Komponenten $\psi_{1,1}(s), \ldots, \psi_{1,r}(s)$, welche notwendig Lösungen der homogenen Integralgleichung

$$\psi_{1,i}(s) = \mu_1 \int K(s,t)\, \psi_{1,i}(t)\, dt\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

also zum Eigenwert μ_1 gehörige Eigenfunktionen von $K(s,t)$ sind.

Genau so erhält man die übrigen Eigenwerte und Eigenfunktionen des Kernes $K(s,t)$. Es ist nämlich z. B. $\varkappa_h^{(n)} = \frac{1}{\mu_h^{(n)}}$ das durch geeignete Wahl der $v_1(s), v_2(s), \ldots, v_{h-1}(s)$ zu erreichende Minimum des Maximums von $J_n(\varphi, \varphi)$ unter der Nebenbedingung $(\varphi, \varphi) = 1$ und den weiteren Nebenbedingungen $(\varphi, v_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, h-1)$.

Definieren wir wieder $\varkappa_h = \frac{1}{\mu_h}$ als die entsprechende untere Grenze der oberen Grenze von $J(\varphi, \varphi)$, so ist wegen der Nachbarschaft des Wertevorrats von $J_n(\varphi, \varphi)$ zu dem von $J(\varphi, \varphi)$ wiederum $\lim_{n \to \infty} \mu_h^{(n)} = \mu_h$. Hieraus schließen wir auf die Relation

$$\psi_h^{(n)}(s) - \mu_h \int K(s,t)\, \psi_h^{(n)}(t)\, dt \Rightarrow 0\,,$$

wonach die weiteren Folgerungen wie oben verlaufen. Um die negativen Eigenwerte und zugehörigen Eigenfunktionen zu bekommen, haben wir die entsprechenden Minimum- bzw. Minimum-Maximum-Probleme zu betrachten. Treten nur endlich viele Eigenwerte des einen oder anderen Vorzeichens auf, so ist bei der Aufsuchung derselben an der betreffenden Stelle abzubrechen, was keiner weiteren Ausführungen bedarf.

3. Unsymmetrische Kerne. Auch im Falle der unsymmetrischen Integralgleichung (1) liefert die jetzige Methode gegenüber der früher angewandten eine Vereinfachung und Vertiefung. Es genügt hier ein kurzer Hinweis unter Benutzung der alten Bezeichnungen. Im Falle I mögen die ϱ_n und c_n so beschaffen sein, daß für alle n die

[1]) Das Verschwinden von r würde mit der Normierung der Funktionen $\psi_1^{(n)}(s)$ im Widerspruche stehen.

Norm c_n^2 unterhalb der Schranke M bleibt. Dann gilt für die Differenz $\varrho_n - \varrho_m = \zeta_{nm}$ ebenfalls, daß ihre Norm unterhalb einer Schranke, nämlich $4M$, bleibt. Ferner ist gleichmäßig

$$\lim_{n,\, m \to \infty} \left[\zeta_{n,m}(s) - \lambda \int K(s,t)\, \zeta_{n,m}(t)\, dt\right] = 0,$$

und daher besitzt nach unserem Hilfssatz jede Teilfolge der Doppelfolge $\zeta_{n,m}$, bei welcher zugleich n und m über alle Grenzen wachsen, eine beschränkte asymptotische Dimensionenzahl r, wobei diese Schranke für r nur vom Kern $K(s,t)$ und von λ abhängt. Somit definiert auch unsere Doppelfolge $\zeta_{n,m}$ eine lineare Grenzschar mit einer endlichen Anzahl r orthogonaler Komponenten $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, ..., $\psi_r(s)$, es sei denn, daß die asymptotische Dimensionenzahl jeder Teilfolge gleich Null, d. h. $\zeta_{n,m} \rightrightarrows 0$ ist. Im letzteren Fall $r = 0$ konvergieren einfach die $\varrho_n(s)$ gleichmäßig gegen eine Lösung der Integralgleichung

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s,t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Im Falle $r > 0$ sind die $\psi_i(s)$ Lösungen der homogenen Gleichung. Wir ersetzen ϱ_n durch eine Funktion

$$\eta_n(s) = \varrho_n(s) + x_1 \psi_1(s) + \cdots + x_r \psi_r(s),$$

welche orthogonal zu $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, ..., $\psi_r(s)$ ist. Für diese Funktionen gilt sicherlich

$$\left[\eta_n(s) - \lambda \int (Ks,t)\, \eta_n(t)\, dt\right] - f(s) \rightrightarrows 0.$$

Wir können dann auf die Differenzen $\eta_n - \eta_m = \zeta_{n,m}$ wieder wie oben unseren Hilfssatz anwenden und leicht schließen, daß die Dimensionenzahl jeder Teilfolge dieser Folge Null sein muß, daß also die $\eta_n(s)$ gleichmäßig gegen eine zu den $\psi_i(s)$ orthogonale Lösung der Integralgleichung konvergieren.

Im Falle II erhalten wir ebenfalls auf Grund unseres Hilfssatzes als Grenzgebilde der Funktionenfolge $\sigma_n(s) = \frac{\varrho_n(s)}{c_n}$ eine lineare Funktionenschar von Lösungen der homogenen Integralgleichung.

Auf diese Art ergibt sich nach unserer zweiten Methode ein genauerer Einblick in die Natur der hier waltenden Konvergenzverhältnisse. Dieser Einblick lehrt uns, daß und wie wir in der Tat mit beliebiger Genauigkeit zu einer Lösung der unhomogenen bzw. der homogenen Integralgleichung gelangen, wenn wir eine approximierende Integralgleichung mit dem Kerne $A_n(s,t)$ betrachten.

4. Stetige Abhängigkeit vom Kern. Hinsichtlich der Frage, inwieweit sich die Lösungen eines Integralgleichungsproblems mit dem Kern stetig ändern, beschränken wir uns auf das Eigenwertproblem bei einem symmetrischen Kerne $K(s,t)$. Der Kern $K(s,t)$ möge der gleichmäßige

Limes anderer symmetrischer Kerne $K_n(s,t)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sein. Wenn wir Funktionen $\varphi(s)$ betrachten, welche der Bedingung $(\varphi, \varphi) \leqq M$ genügen, so unterscheiden sich die Werte der zu den Kernen gehörigen Integralformen $J_n(\varphi, \varphi)$ und $J(\varphi, \varphi)$ bei hinreichend großem n um beliebig wenig. Daher gilt dies auch für die Minima oder Maxima dieser Formen unter den Nebenbedingungen $(\varphi, \varphi) = 1$, $(\varphi, v_i) = 0$, und ebenso für die Maxima der Minima oder Minima der Maxima. Mit anderen Worten: *Der h^{te} positive und der h^{te} negative Eigenwert ändert sich stetig mit dem Kern.* Hinsichtlich der Eigenfunktionen können wir mit Rücksicht auf das bei ihnen willkürliche Vorzeichen und das Auftreten mehrfacher Eigenfunktionen eine regelrechte Stetigkeit nicht erwarten. Dafür tritt hier folgendes Verhalten ein: *Es sei λ_h ein r-facher Eigenwert des Kernes $K(s,t)$, es sei also*

$$\lambda_h = \lim_{n\to\infty} \lambda_h^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \lambda_{h+1}^{(n)} = \ldots = \lim_{n\to\infty} \lambda_{h+r-1}^{(n)},$$

dagegen gelte diese Relation nicht für $\lambda_{h-1}^{(n)}$ und $\lambda_{h+r}^{(n)}$. Dann konvergiert mit wachsendem n die lineare Schar aus den Eigenfunktionen $\psi_h^{(n)}(s)$, $\psi_{h+1}^{(n)}(s)$, $\ldots$, $\psi_{h+r-1}^{(n)}(s)$ des Kernes $K_n(s,t)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen die lineare Schar der Eigenfunktionen von $K(s,t)$ für den Eigenwert λ_h[1]).

Diesen Satz, welcher ein vollständiger Ausdruck der fraglichen Stetigkeitseigenschaften der Eigenfunktionen ist, beweist man auf Grund unseres Hilfssatzes fast unmittelbar aus der Bemerkung, daß für die Folge der Eigenfunktionen $\psi_{h+k}^{(n)}(s)$ $(0 \leqq k < r)$ die Limesgleichung

$$\left[\psi_{h+k}^{(n)}(s) - \lambda_h \int K(s,t)\, \psi_{h+k}^{(n)}(t)\, dt\right] \to 0$$

besteht, und daß diese Folge gewiß die asymptotische Dimensionenzahl r besitzt.

§ 9. Erweiterung der Gültigkeitsgrenzen der Theorie.

Die Entwicklungen der Paragraphen 1 bis 6 und 8 können nach zwei Richtungen wesentlich verallgemeinert werden.

Zunächst bleiben alle Überlegungen gültig, wenn wir Integralgleichungen für Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen betrachten. Wir verstehen etwa unter $f(s)$, $\varphi(s)$, $\psi(s)$ stetige Funktionen der auf ein bestimmtes endliches Gebiet G beschränkten Variablen $s_1, s_2, \ldots, s_m$, unter $K(s,t)$ eine stetige Funktion der Variablen $s_1, s_2, \ldots, s_m$ und $t_1, t_2, \ldots, t_m$, die beide ebenfalls im Gebiete G laufen; schließlich bezeichnen wir mit ds das Inhaltselement $ds_1\, ds_2 \ldots, ds_m$ von G, setzen entsprechend $dt = dt_1\, dt_2 \ldots dt_n$ und verstehen unter

[1]) Zum Begriff der Konvergenz linearer Scharen vgl. Kap. II, § 3, 2.

allen betrachteten Integralen ein für allemal Integrale über das Integrationsgebiet G. Dann stellt die Integralgleichung

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s,t)\varphi(t)\,dt$$

eine Integralgleichung mit dem von $2m$ Variablen abhängigen Kern $K(s,t)$ für die Funktion $\varphi(s)$ von m Variablen dar, und unsere ganze Theorie bleibt Wort für Wort in Kraft.

Ferner kann auch die bisher gemachte Voraussetzung der Stetigkeit des Kernes erheblich gemildert werden, ohne daß an den erzielten Ergebnissen etwas geändert wird. Ohne auf eine möglichst weitgehende Verallgemeinerung Wert zu legen, wollen wir hier nur die für die Anwendungen wesentlichen Fälle hervorheben, indem wir zunächst wieder einen Kern $K(s,t)$ in zwei Variablen s und t betrachten. Mit unwesentlichen Modifikationen gelten unsere früheren Überlegungen, abgesehen von den Überlegungen zum Mercerschen Satz (§ 5, 4), auch für solche Kerne, die nur stückweise stetig in dem früher definierten Sinne sind, weil sich ja jede solche Funktion im Mittel mit beliebiger Genauigkeit durch eine stetige approximieren läßt, wie wir im vorigen Kapitel gesehen haben. Wir dürfen aber auch Unendlichkeitsstellen des Kernes zulassen. Dabei machen wir die Voraussetzung, daß die Integrale

$$\iint K(s,t)^2\,ds\,dt, \qquad \int K(s,t)^2\,ds, \quad \int K(s,t)^2\,dt$$

einen Sinn haben und daß die beiden letzten als Funktionen von t bzw. s unterhalb einer festen Schranke M bleiben. Diese Voraussetzung ist z. B. in dem für die Anwendungen wesentlichen Falle erfüllt, daß der Kern für $s = t$ von niedrigerer als $\frac{1}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung unendlich wird, d. h. daß $K(s,t)$ die Form $K(s,t) = H(s,t)\,|s-t|^{-\alpha}$ mit $0 \leqq \alpha < \frac{1}{2}$ hat, wobei $H(s,t)$ eine durchweg stetige Funktion ist. Für einen solchen Kern gelten die früher entwickelten Sätze. Denn er läßt sich durch stetige ausgeartete Kerne $A_n(s,t)$ jedenfalls so approximieren, daß $\int [K(s,t) - A_n(s,t)]^2\,dt$ gleichmäßig in s, $\int [A_n(s+\eta,t) - A_n(s,t)]^2\,dt$ gleichmäßig in s und n beliebig klein ausfällt, wenn η hinreichend klein genommen wird. Mehr ist aber zur Durchführung unserer Überlegungen nicht nötig. Ebenso bleiben für den Fall zweier unabhängiger Variablen die früheren Sätze gültig, wenn der Kern für $s_1 = t_1$, $s_2 = t_2$ von niedrigerer als erster Ordnung unendlich wird, weil dann das Integral $\int\int K(s_1, s_2, t_1, t_2)^2\,ds_1\,ds_2$ durch diese Singularitäten nicht beeinträchtigt wird. Bei drei unabhängigen Variablen dürfen wir ebenso beliebige Singularitäten von niedrigerer als $\frac{3}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung für K zulassen usw.

Für die Anwendungen reichen diese Fälle vollständig aus. Es ist nicht schwer, worauf hier nur hingewiesen werden soll, den Gültigkeitsbereich unserer Resultate so weit auszudehnen, daß nur noch die oben

formulierten Voraussetzungen für die Integrale über $K^2(s,t)$ gefordert werden müssen, während man im übrigen auf die Stetigkeit des Kernes usw. ganz verzichten kann.

§ 10. Ergänzungen und Aufgaben zum dritten Kapitel.

1. Beispiele zur allgemeinen Theorie.

a) Der Kern

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\,s \sin n\,t}{n} = \tfrac{1}{2} \log \left| \sin \frac{s+t}{2} : \sin \frac{s-t}{2} \right| \quad (0 \leqq s, t \leqq \pi)$$

hat die Eigenwerte $\lambda_n = \frac{2n}{\pi}$ und die Eigenfunktionen $\sin n\,t$.

b) Man zeige, daß der symmetrische Kern

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1-h^2}{1-2h\cos(s-t)+h^2} \qquad (0 \leqq s, t \leqq 2\pi)$$

für $|h| < 1$ die Funktionen 1, $\sin n\,s$, $\cos n\,s$ als Eigenfunktionen mit den Eigenwerten $1, \frac{1}{h^n}, \frac{1}{h^n}$ besitzt.

c) Für den Kern

$$K(s,t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{s^2+t^2}{2}} \int_{-\infty}^{s} e^{-\tau^2} d\tau \int_{t}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau, & (s \leqq t) \\ K(t,s) & (s \geqq t) \end{cases}$$

sind die Hermiteschen Orthogonalfunktionen $e^{\frac{s^2}{2}} \frac{d^n}{ds^n} e^{-s^2}$ Eigenfunktionen mit den Eigenwerten $\lambda_n = 2n+2$, und

d) für den Kern

$$K(s,t) = \begin{cases} e^{\frac{s+t}{2}} \int_{t}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau, & (0 \leqq s \leqq t) \\ K(t,s) & (0 \leqq t \leqq s) \end{cases}$$

die Laguerreschen Orthogonalfunktionen $e^{-\frac{s}{2}} \frac{\partial^n}{\partial h^n} \frac{e^{-\frac{s\,h}{1-h}}}{1-h}\Big|_{h=0}$ Eigenfunktionen mit den Eigenwerten $\lambda_n = n+1$ [1]).

2. Singuläre Integralgleichungen. Die Gültigkeit der allgemeinen Theorie kann aufhören, wenn der Kern zu hohe Singularitäten aufweist, oder wenn er bei unendlich ausgedehntem Grundgebiet nicht von hinreichend hoher Ordnung im Unendlichen verschwindet.

---

[1]) Vgl. *Neumann, R.:* Die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Hermiteschen und Laguerreschen Orthogonalfunktionen usw. Diss. Breslau 1912.

Wir geben einige Beispiele von Integralgleichungen mit unendlich vielfachen Eigenwerten.

Aus der Integralformel

$$\int_0^\infty \sin s t \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-at} + \frac{t}{a^2+t^2}\right) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-as} + \frac{s}{a^2+s^2}$$

folgt, da sie identisch in a gilt und in a nicht linear ist, daß für das Grundgebiet $0 \leqq s,t \leqq \infty$ der Kern $\sin st$ den unendlich vielfachen Eigenwert $\lambda = 1$ hat.

Die Hermiteschen Orthogonalfunktionen (vgl. 1 c) sind Eigenfunktionen des Kerns e^{ist} mit den Eigenwerten $\frac{i^{-n}}{\sqrt{2\pi}}$. Jeder der vier Werte $\pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \pm\frac{i}{\sqrt{2\pi}}$ ist also unendlich vielfacher Eigenwert dieses Kerns.

Beispiel einer Integralgleichung mit unendlich vielen Eigenwerten in einem endlichen Intervall: Die Gleichung

$$\varphi(s) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|s-t|} \varphi(t)\, dt$$

hat die Lösungen $e^{\pm \alpha i s}$ mit den Eigenwerten $\lambda = \frac{1+\alpha^2}{2}$. Jedes $\lambda > \frac{1}{2}$ ist also Eigenwert.

3. Methode von E. Schmidt zur Herleitung der Sätze von Fredholm[1]. Wir bringen, indem wir $\lambda = 1$ annehmen, den Kern $K(s,t)$ in die Form $K(s,t) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu(s)\,\beta_\nu(t) + k(s,t)$, wobei $\int\int k(s,t)^2\, ds\, dt < 1$ ist, also die Neumannsche Reihe des Kerns k für $\lambda = 1$ konvergiert und somit nach § 6 die zum Kern $k(s,t)$ gehörige Resolvente $\varkappa(s,t)$ liefert. Indem wir die Integralgleichung (1) in der Form

$$f_1(s) = \varphi(s) - \int k(s,t)\,\varphi(t)\, dt$$

schreiben, wobei

$$f_1(s) = f(s) + \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\, \alpha_\nu(s), \qquad x_\nu = (\varphi, \beta_\nu)$$

gesetzt ist, haben wir daher umgekehrt

$$\varphi(s) = f(s) + \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\, \alpha_\nu(s) + \int \varkappa(s,t) \left[f(t) + \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\, \alpha_\nu(t)\right] dt,$$

oder

$$f_2(s) = f(s) + \int \varkappa(s,t)\, f(t)\, dt = \varphi(s) - \int \left[\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu(s)\,\beta_\nu(t) + \gamma_\nu(s)\,\beta_\nu(t)\right] \varphi(t)\, dt$$

mit

$$\gamma_\nu(s) = \int \varkappa(s,\tau)\,\alpha_\nu(\tau)\, d\tau.$$

---

[1]) *Schmidt, E.:* Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen. Zweite Abhandlung: Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung. Math. Ann. Bd. 64. S. 161–174. 1907.

Damit ist die gegebene Integralgleichung auf eine solche mit ausgeartetem Kerne zurückgeführt.

4. Methode von Enskog zur Auflösung symmetrischer Integralgleichungen[1]. Wir betrachten einen positiv definiten Kern $K(s,t)$, dessen erster Eigenwert größer als 1 ist, bei dem also für jedes φ die Relation $\int \varphi(s)^2\, ds - \int\int K(s,t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\, ds\, dt > 0$ gilt. Die Integralgleichung (1) schreiben wir in der abgekürzten Form $f(s) = J(\varphi)$, indem wir $J(\varphi) = \varphi(s) - \int K(s,t)\,\varphi(t)\, dt$ setzen. Ferner konstruieren wir uns irgend ein „in bezug auf den Kern polares vollständiges Funktionensystem" $v_1(s), v_2(s), \ldots$, welches den Beziehungen $\int v_i J(v_k)\, ds = \delta_{ik}$ ($\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ik} = 0$ für $i \neq k$) genügt und aus einem vollständigen Funktionensystem $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, so entsteht, daß v_n eine lineare Kombination von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ist. Setzen wir $a_\nu = \int \varphi\, J(v_\nu)\, ds = \int v_\nu J(\varphi)\, ds$, so ergibt sich sofort $\varphi(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu v_\nu(s)$, vorausgesetzt, daß diese Reihe gleichmäßig konvergiert. Für die Funktionen v_ν gibt übrigens die „Vollständigkeitsrelation" $\int \varphi(s)\, J[\varphi(s)]\, ds = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2$ wie auch immer die stückweise stetige Funktion $\varphi(s)$ gewählt wird.

5. Methode von Kellogg zur Bestimmung von Eigenfunktionen[2]. Wir bestimmen, ausgehend von einer willkürlichen normierten Funktion $\varphi_0(s)$, die Funktionen $\varphi_\nu(s)$ und die Zahlen λ_ν durch die Relationen $\varphi_{\nu+1}(s) = \lambda_{\nu+1} \int K(s,t)\,\varphi_\nu(t)\, dt$, $N\varphi_\nu = 1$. Der Grenzübergang läßt sich durchführen und liefert einen Eigenwert und die zugehörige Eigenfunktion der Kerns bzw. seines iterierten Kerns.

Man bringe diesen Ansatz in Zusammenhang mit dem Begriff der asymptotischen Dimensionenzahl und führe die Betrachtung auf diesem Wege durch.

6. Beispiel eines unsymmetrischen Kerns ohne Nullösungen. Der Kern $K(s,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu s \sin (\nu+1) t}{\nu^2}$ besitzt für das Gebiet $0 \leqq s, t \leqq 2\pi$ keine Nullösungen; denn wir erhalten für die iterierten Kerne die Ausdrücke $K^{(n)}(s,t) = \pi^{n-1} \sum_{\nu} \frac{\sin \nu s \sin (\nu+n) t}{\nu^2 (\nu+1)^2 \ldots (\nu+n-1)^2}$, und daher konvergiert die Neumannsche Reihe für alle Werte von λ. Dasselbe Resultat gewinnt man durch Feststellung der Tatsache, daß die zu K gehörige Funktion $D(\lambda)$ konstant ist[3].

---

[1]) *Enskog, D.:* Kinetische Theorie der Vorgänge in mäßig verdünnten Gasen. Dissertation. Uppsala 1917.

[2]) *Kellogg, O. D.:* On the existence and closure of sets of characteristic functions. Math. Ann. Bd. 86, S. 14–17. 1922.

[3]) Ähnliche Kerne finden sich bei *Goursat:* Cours d'analyse (vgl. Literaturverzeichnis) S. 429.

7. Volterrasche Integralgleichungen[1]. Wenn $K(s,t) = 0$ für $s < t$ ist, so kann man die Integralgleichung in der Form

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^s K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

schreiben. Solche Typen von Integralgleichungen sind besonders von *Volterra* behandelt worden. Man zeige, daß die zugehörige Resolvente eine ganze transzendente Funktion von λ ist, daß also die Volterrasche Integralgleichung für jedes λ eine und nur eine Lösung und daher für kein λ eine Nullösung besitzt.

8. Die zu einem unsymmetrischen Kerne gehörigen adjungierten Orthogonalsysteme[2]. Zu einem unsymmetrischen Kerne $K(s,t)$ bilden wir die beiden symmetrischen Kerne $K'(s,t) = \int K(s,\sigma)\,K(t,\sigma)\,d\sigma$ und $'K(s,t) = \int K(\sigma,s)\,K(\sigma,t)\,d\sigma$. Es gibt eine Folge von Funktionenpaaren $\varphi_\nu(s)$, $\psi_\nu(s)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ und zugehörigen Werte λ_ν, so daß

$$\varphi_\nu(s) = \lambda_\nu \int K(s,t)\,\psi_\nu(t)\,dt, \qquad \psi_\nu(s) = \lambda_\nu \int K(t,s)\,\varphi_\nu(t)\,dt,$$

$$\varphi_\nu(s) = \lambda_\nu^2 \int K'(s,t)\,\varphi_\nu(t)\,dt, \qquad \psi_\nu(s) = \lambda_\nu^2 \int {}'K(s,t)\,\psi_\nu(t)\,dt$$

gilt. Jede in der Form $\int K(s,t)\,h(t)\,dt$ darstellbare Funktion erlaubt eine absolut und gleichmäßig konvergente Entwicklung nach dem Orthogonalsystem der φ_ν und ebenso jede Funktion der Form $\int K(t,s)\,h(t)\,dt$ eine Entwicklung nach dem Orthogonalsystem der ψ_ν. Es gilt $K(s,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\,\psi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$, falls die Reihe rechts in jeder Variablen gleichmäßig konvergiert. Der Kern K ist durch die Werte λ_ν und die beiden, an sich voneinander unabhängigen Orthogonalsysteme eindeutig festgelegt.

9. Integralgleichungen erster Art. Beispiele von Integralgleichungen erster Art der Form

$$f(s) = \int K(s,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{82}$$

sind uns mehrfach begegnet. Z. B. wurde die Entwickelbarkeit nach den Eigenfunktionen eines Kernes von der Auflösbarkeit einer Integralgleichung erster Art abhängig gemacht. Ferner sind solche Beispiele durch das Fouriersche Integral und die Mellinsche Integraltransformation (Kap. II, § 12, 9) gegeben. Die Schwierigkeit der Theorie der

---

[1] *Volterra, V.:* Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles. Kap. II. Paris 1913.

[2] *Schmidt, E.:* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Math. Ann. Bd. 63, S. 433—476. 1907.

Integralgleichungen erster Art beruht darauf, daß bei stetigem Kern $K(s,t)$ die Mannigfaltigkeit aller stückweise stetigen Funktionen $\varphi(s)$ in eine Teilmannigfaltigkeit transformiert wird, da jedenfalls alle so entstehenden Funktionen $f(s)$ stetig sind. Ist $K(s,t)$ differenzierbar, so wird jede stückweise stetige Funktion, ja jede bloß integrierbare Funktion $\varphi(s)$ in eine differenzierbare transformiert. Die Integralgleichung kann also nicht allgemein für stetiges $f(s)$ durch eine stetige Funktion φ lösbar sein. Erst in dem Maße, wie der Kern von einem regulären Verhalten abweicht, können wir eine Auflösbarkeit von (82) für allgemeinere Funktionenklassen $f(s)$ erhoffen. Man betrachte die früheren und künftigen Beispiele unter diesem Gesichtspunkte, wobei das Unendlichwerden des Grundgebietes mit einer Singularität des Kernes als äquivalent anzusehen ist.

Rein formal kann man bei symmetrischem Kern, wenn $x_\nu = (f, \varphi_\nu)$ die Entwicklungskoeffizienten von f nach dem Eigenfunktionensystem $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ des Kernes sind, eine Lösung in der Form $\varphi(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu x_\nu \varphi_\nu(s)$ ansetzen. Falls diese Reihe gleichmäßig konvergiert, was wegen des Anwachsens der λ_ν im allgemeinen Einschränkungen für $f(s)$ bedeutet, so stellt sie tatsächlich die Lösung von (82) dar.

Im allgemeinen Falle liefert ein Satz von *Picard*[1]) notwendige und hinreichende Bedingungen für die Auflösbarkeit einer Integralgleichung erster Art $f(s) = \int K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$ bei einem beliebigen (auch unsymmetrischen) Kern durch eine samt ihrem Quadrat im Lebesgueschen Sinn integrierbare Funktion $\varphi(s)$. Sind $\varphi_i, \psi_i, \lambda_i$ die Paare der zu $K(s,t)$ nach Nr. 8 gehörenden adjungierten Funktionen, bzw. die zugehörigen Eigenwerte, so ist für die Lösbarkeit der obigen Integralgleichung notwendig und hinreichend, daß die Reihe

$$\sum \lambda_i^2 \left(\int f(s)\,\varphi_i(s)\,ds \right)^2$$

konvergiert.

10. Anwendung des Integrals von Lebesgue. Die Entwicklungen des Kapitels III gewinnen an Allgemeinheit und Abrundung, wenn man den Integralbegriff von Lebesgue zugrunde legt, alle vorkommenden Integrale in dieser Weise auffaßt und die auftretenden Funktionen jeweils immer nur bis auf eine Nullmenge festgelegt denkt. Der mit diesen Begriffen vertraute Leser möge das Kapitel III unter diesem Gesichtspunkte selbst umgestalten.

11. Die Methode der unendlich vielen Variablen. Ist $\omega_1(s)$, $\omega_2(s)$, ... irgend ein vollständiges Orthogonalsystem für das Grundgebiet

---

[1]) *Picard, E.:* Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de physique mathématique. Rend. Circ. mat. Palermo Bd. 29, S. 79—97. 1910.

und setzt man $x_i = (\varphi, \omega_i)$, $f_i = (f, \omega_i)$, $k_{pq} = \int\int K(s,t)\,\omega_p(s)\,\omega_q(t)\,ds\,dt$, so führt die Integralgleichung (1) sofort auf das Gleichungssystem

$$f_i = x_i - \lambda \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

von unendlich vielen linearen Gleichungen für die unendlich vielen Unbekannten $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Dabei ist $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ und $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2$, sowie $\sum_{i,j=1}^{\infty} k_{ij}^2$ konvergent, wie aus der Besselschen Ungleichung folgt. Die Auflösungstheorie dieses Gleichungssystems (Kap. I, § 6,4) liefert uns dann die Sätze über die Integralgleichung (1).

12. Minimumseigenschaften der Eigenfunktionen. Man kann die Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ eines symmetrischen Kernes oder die zu einem unsymmetrischen Kerne gehörigen beiden Orthogonalsysteme $\varphi_i(s)$, $\psi_i(s)$ und die entsprechenden Eigenwerte λ_i durch folgendes Minimumproblem erhalten: Der Kern $K(s,t)$ soll durch einen ausgearteten Kern $A_n(s,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Phi_i(s)\,\Psi_i(t)}{\Lambda_i}$ so approximiert werden, daß $\int\int (K - A_n)^2\,ds\,dt$ möglichst klein wird. Man beweise, daß die Lösung durch $\Phi_i = \varphi_i$, $\Psi_i = \psi_i$, $\Lambda_i = \lambda_i$ gegeben wird. (Vgl. auch Kapitel IV.)

13. Polare Integralgleichungen. Auch für die Kerne von der Form $K(s,t) = A(s)\,S(s,t)$, wo $S(s,t)$ symmetrisch ist, $A(s)$ aber bis auf endlich viele Sprünge stetig, lassen sich ähnliche Ergebnisse herleiten wie für den Fall eines symmetrischen Kernes. Am eingehendsten ist bisher der Fall untersucht worden, daß $S(s,t)$ ein *definiter* Kern ist, also lauter positive Eigenwerte besitzt. In diesem Falle, den *Hilbert*[1]) und *Garbe*[2]) untersucht haben, heißt die Integralgleichung *polar* oder *von der dritten Art.* Dabei hat die Resolvente, wie für symmetrische Kerne, lauter reelle und einfache Pole, und für die zugehörigen Residuen, welche die „polare Eigenfunktionen" liefern, gilt ein analoger Entwicklungssatz wie der von *Hilbert* für symmetrische Kerne aufgestellte. Verschwindet insbesondere der iterierte Kern $K^2(s,t)$ nicht identisch, so gibt es stets wenigstens einen Eigenwert. Übrigens gilt der Satz, daß die Resolvente nur reelle und einfache Pole hat, auch dann, wenn $S(s,t)$ nur als *positiv* vorausgesetzt wird; ferner der weitere Satz, daß es wenigstens einen Eigenwert gibt, wenn $S(s,t)$ positiv ist und $K^2(s,t)$ nicht identisch verschwindet[3]).

---

[1]) *Hilbert, D.:* Integralgleichungen, Kap. 15, wo für die polare Integralgleichung eine etwas andere Gestalt zugrunde gelegt wird.

[2]) *Garbe, E.:* Zur Theorie der Integralgleichung dritter Art. Math. Ann. Bd. 76, S. 527—547. 1915.

[3]) *Marty, J.:* Sur une équation intégrale, C. R. Acad. sc. Paris Bd. 150, S. 515—518. 1910. — Développements suivant certaines solution singulières Ib. S. 603—606. — Existence de solution singulières pour certaines équations de Fredholm. Ib. S. 1031—1033.

14. Symmetrisierbare Kerne[1]). Die Kerne, für die die Resolvente nur reelle und einfache Pole hat, lassen sich sehr einfach direkt charakterisieren. Damit ein Kern $K(s,t)$ diese Eigenschaft aufweist, ist notwendig, daß es einen Kern $S(s,t)$ derart gibt, daß die Kerne $\int S(s,\tau)K(\tau,t)\,d\tau$, $\int K(s,\tau)S(\tau,t)\,d\tau$ symmetrisch sind. Solche Kerne nennt man *symmetrisierbar*. Stellt umgekehrt für einen geeigneten positiv definiten symmetrischen Kern $S(s,t)$ wenigstens eines der obigen Integrale einen symmetrischen Kern dar, so sind sämtliche Pole der Resolvente von $K(s,t)$ reell und einfach.

15. Bestimmung des lösenden Kernes durch Funktionalgleichungen. Man beweise, daß die Resolvente von $K(s,t)$ durch die Gleichungen (67) eindeutig bestimmt ist.

16. Die Stetigkeit der definiten Kerne. Man beweise, daß ein für $0 \leqq s,t \leqq 1$ stückweise stetiger definiter symmetrischer Kern $K(s,t)$, der in allen Punkten $s = t$ stetig ist und stetige Eigenfunktionen besitzt, überhaupt überall für $0 \leqq s,\ t \leqq 1$ stetig ist.

17. Satz von Hammerstein. Bei einem im Grundgebiete $0 \leqq s,t \leqq 1$ stetigen Kern $K(s,t)$, der im ganzen Gebiet $0 \leqq s,t \leqq 1$ eine gleichmäßig beschränkte Ableitung hat, besteht die Bilinearformel schon für den Kern selbst und nicht erst für den iterierten Kern $K^{(2)}(s,t)$. Die Voraussetzung der beschränkten Differenzierbarkeit läßt sich noch durch wesentlich allgemeinere ersetzen[2]).

Literatur zum dritten Kapitel.

Vor allem sei auf den demnächst erscheinenden Artikel der Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. 2, von *E. Hellinger* und *O. Toeplitz* verwiesen, der eine zuammenfassende Darstellung der Theorie der Integralgleichungen enthält und auf die tieferen Zusammenhänge dieser Theorie mit anderen Teilen der Analysis ausführlich eingeht. Ferner sei auf das übersichtliche Referat von *H. Hahn*, Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen, Jahresber. d. deutsch. Math. Ver., Bd. 20, S. 69—117, 1911, hingewiesen.

Lehrbücher:

Bôcher, M.: An introduction to the study of integral equations. Cambridge tracts Bd. 10. Cambridge 1909.

Goursat, E.: Cours d'analyse mathématique Bd. 3, 3. Aufl., S. 323—544. Paris 1923.

Kneser, A.: Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, 2. Aufl. Braunschweig 1922.

Kowalewski, G.: Einführung in die Determinantentheorie, einschließlich der unendlichen und der Fredholmschen Determinanten. Leipzig 1909.

Lalesco, T.: Introduction à la théorie des équation intégrales, Paris 1912. (Dazu eine ausführliche Bibliographie bis 1912.)

[1]) *Marty, J.:* Valeurs singulières d'une équation de Fredholm. C. R. Acad. sc. Paris, Bd. 150, S. 1499—1502. 1910.

[2]) *Hammerstein, A.:* Über die Entwickelung des Kernes linearer Integralgleichungen nach Eigenfunktionen. Sitzungsber. Akad. Berlin (phys.-math.), S. 181—184. 1923.

Vivanti, G.: Elementi della teoria delle equazioni integrali lineare. Mailand 1916.
Volterra, V.: Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles. Paris 1913.

Monographien und Abhandlungen:

Carleman, T.: Sur les équations intégrales singulières à noyau reel et symétrique. Uppsala Univ. Årsskrift 1923.
Courant, R.: Zur Theorie der linearen Integralgleichungen. Math. Ann. Bd. 89, S. 161—178. 1923.
Fredholm, I.: Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta math. Bd. 27, S. 365 bis 390. 1903.
Goursat, E.: Recherches sur les équations intégrales linéaires. Ann. Fac. sc. Toulouse, Serie 2, Band 10, S. 5—98. 1908.
Hilbert, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig und Berlin 1912. (Wiederabdruck von sechs Mitteilungen aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1904—1910.)
Landsberg, G.: Theorie der Elementarteiler linearer Integralgleichungen. Math. Ann. Bd. 69, S. 227—265. 1910.
Schmidt, E.: Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Math. Ann. Bd. 63, S. 433—476. 1907. Ib. Bd. 64, S. 161—174. 1907.
Schur, I.: Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen. Math. Ann. Bd. 66, S. 488—510. 1909.
Weyl, H.: Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems. Diss. Göttingen 1908.

Viertes Kapitel.

Die Grundtatsachen der Variationsrechnung.

Fast alle Fragen der mathematischen Physik, auf welche wir die Theorien der vorangegangenen Kapitel anwenden wollen, stehen in mehr oder weniger engen Beziehungen zur Variationsrechnung. Wir wollen in diesem Kapitel die Grundtatsachen dieser zentralen und beherrschenden Disziplin der Analysis entwickeln, um aus ihnen in naturgemäßer Weise die Differentialgleichungen der mathematischen Physik und Ansätze für die Methoden zu ihrer Lösung zu erhalten. In späteren Kapiteln des zweiten Bandes soll dann die hier dargelegte Theorie ergänzt und vertieft werden.

§ 1. Die Problemstellung der Variationsrechnung.

1. Maxima und Minima von Funktionen. Die Variationsrechnung nimmt ihren Ausgang von einer Verallgemeinerung der elementaren Theorie der Maxima und Minima. Zum besseren Verständnis des Wesens dieser Verallgemeinerung wollen wir zunächst einen Blick auf die wohlbekannte elementare Theorie werfen. In ihr handelt es sich stets darum, für eine vorgegebene stetige Funktion $f(x, y, \ldots)$ der in einem vorgegebenen abgeschlossenen Gebiete G laufenden Variablen $x, y, \ldots$ eine solche Stelle $x_0, y_0, \ldots$ im Gebiete G zu finden, an welcher die Funktion $f(x, y, \ldots)$ ein Maximum oder Minimum, einen „Extremwert", gegenüber allen der Stelle $x_0, y_0, \ldots$ in G hinreichend nahe benachbarten Stellen annimmt. Daß diese Aufgabe stets eine Lösung haben muß, lehrt der schon im ersten Kapitel benutzte, unmittelbar aus dem Begriffe der Stetigkeit folgende Satz von Weierstraß: *Jede in einem abgeschlossenen Gebiete der Variablen stetige Funktion besitzt im Innern oder auf dem Rande des Gebietes ein Maximum und ein Minimum.* Hat die Funktion $f(x, y, \ldots)$ in G Ableitungen und wird das Extremum im Inneren angenommen, so müssen an der betreffenden Stelle notwendig die Ableitungen von $f(x, y, \ldots)$ nach jeder der Variablen verschwinden oder, anders ausgedrückt, es muß das Differential df Null sein. Diese notwendige Bedingung ist aber keineswegs hinreichend, wie das Auftreten von Wendepunkten oder Sattelpunkten zeigt, z. B.

$f(x) = x^3$, $x_0 = 0$; $f(x, y) = xy$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Allgemein nennen wir Punkte, in denen die Ableitungen der Funktionen sämtlich verschwinden oder in denen $df = 0$ gilt, *stationäre Punkte.*

Sind die Variablen nicht unabhängig, sondern Bedingungsgleichungen $g_1(x, y, \ldots) = 0$, $g_2(x, y, \ldots) = 0, \ldots, g_h(x, y, \ldots) = 0$ unterworfen, so kann man sich zur Aufstellung der notwendigen Bedingungen für ein Extremum oder für den stationären Charakter einer Stelle der *Multiplikatorenmethode von Lagrange* bedienen. Diese Methode besteht in folgender Vorschrift: Um eine im Innern des Gebietes der Variablen liegende Stelle zu finden, für welche $f(x, y, \ldots)$ ein Maximum oder Minimum annimmt oder allgemeiner stationären Charakter hat, bilde man mit $h + 1$ neuen Parametern, den „Multiplikatoren" $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_h$, die Funktion $F = \lambda_0 f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_h g_h$ und bestimme sodann die Größen $x_0, y_0, \ldots$ und die Verhältnisse der Größen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_h$ aus den Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0, \ldots \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = g_1 = 0, \ldots, \qquad \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_h} = g_h = 0, \end{cases}$$

deren Anzahl mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmt. Diese Gleichungen stellen die gesuchten Bedingungen für das stationäre Verhalten von $f(x, y, \ldots)$ bzw. für das Extremum von f bei den gegebenen Bindungen dar.

Sobald nicht $\lambda_0 = 0$ ist, dürfen und wollen wir wegen der Homogenität von F in den λ_i die Größe $\lambda_0 = 1$ setzen. Die Lagrangesche Methode ist nichts als eine besonders elegante Umgehung der lästigen, zur Unsymmetrie zwingenden Forderung, mit Hilfe der Nebenbedingungen h der Variablen aus der Funktion $f(x, y, \ldots)$ zu eliminieren.

Wir betrachten einige typische Beispiele, die uns trotz ihrem elementaren Charakter als Hilfsmittel zur Orientierung nützlich sein werden.

a) *Unter allen Dreiecken mit gegebener Grundlinie und gegebenem Umfang hat das gleichschenklige den größten Inhalt; bei gegebener Grundlinie und gegebenem Inhalt hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang.* Schon bei diesem einfachen Beispiel, das sich ohne jede Rechnung durch Betrachtung der Ellipsen mit der gegebenen Grundlinie als Verbindungsstrecke der Brennpunkte unmittelbar durchschauen läßt, erkennen wir eine eigentümliche *Reziprozität*, die uns später noch öfters begegnen wird.

b) Brechung und Reflexion des Lichtes. Das sogenannte Fermatsche *Prinzip der kürzesten Lichtzeit* besagt, daß ein Lichtstrahl auf seiner wirklichen Bahn zwischen zwei Punkten eine kürzere Zeit braucht, als er auf jeder anderen den vorliegenden Bedingungen genügenden denkbaren („virtuellen") Bahn brauchen würde. Hieraus

ergibt sich die Geradlinigkeit der Lichtausbreitung in einem homogenen Medium unmittelbar. Wird von dem Lichtstrahl verlangt, daß er eine gegebene Kurve (Spiegel) treffen, aber nicht durchschneiden soll, so müssen, wie sich aus der Bedingung für den Differentialquotienten sehr leicht ergibt, die beiden die Bahn bildenden geradlinigen Strecken sich auf der Kurve so treffen, daß sie mit der Kurventangente gleiche Winkel bilden (*Reflexionsgesetz*). Trennt dagegen die vorgegebene Kurve zwei Gebiete, in denen verschiedene Lichtgeschwindigkeiten c_1, c_2 herrschen, und soll der Lichtstrahl von dem einen Gebiet ins andere führen, so muß er aus zwei geradlinigen Stücken bestehen, welche dem bekannten *Brechungsgesetz* $\sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 = c_1 : c_2$ genügen, wobei α_1 und α_2 die Winkel der beiden Strecken mit der Kurvennormale im Durchschnittspunkte von Bahn und Kurve sind.

c) Ein Problem von Steiner. Zu drei Punkten A_1, A_2, A_3, die ein spitzwinkliges Dreieck bilden, soll ein vierter Punkt P so gefunden werden, daß die Summe der Entfernungen $PA_1 + PA_2 + PA_3$ möglichst klein wird. Denken wir uns mit der Strecke PA_3 um A_3 den Kreis geschlagen, so muß P auf diesem Kreise so liegen, daß die Summe $PA_1 + PA_2$ möglichst klein ist, d. h. nach b) müssen die Geraden PA_1 und PA_2 mit der Kreistangente in P gleiche Winkel bilden. Da dasselbe bei Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 gilt, so müssen alle drei Winkel A_1PA_2, A_2PA_3, A_3PA_1 einander gleich, d. h. gleich $\frac{2\pi}{3}$ sein, womit die Aufgabe gelöst ist.

d) Isoperimetrisches Problem für Polygone. Unter allen sich nicht überschlagenden Polygonen gegebener gerader Seitenzahl $2n$ und gegebenen Umfanges $2l$ soll dasjenige mit größtem Inhalt gefunden werden. Das gesuchte Polygon $\Pi(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n})$ ist das reguläre $2n$-Eck. Um dies zu beweisen, überzeugen wir uns zunächst davon, daß Π konvex ist. Gäbe es nämlich eine Stützgerade, welche zwei Ecken, z. B. A_1, A_3, aber nicht einen der beiden sie verbindenden Kantenzüge enthält, so spiegeln wir einen dieser Kantenzüge, z. B. $A_1A_2A_3$, an der Stützgeraden und gelangen so zu dem Kantenzug $A_1A_2'A_3$, der mit dem übrigen Kantenzug ein Polygon des gegebenen Umfanges, aber von größerem Inhalt liefern würde. Wir können uns also von vornherein auf die Betrachtung konvexer Polygone beschränken. Zweitens zeigen wir, daß das Polygon lauter gleiche Seiten besitzt. Wären zwei aufeinanderfolgende Seiten A_1A_2, A_2A_3 nicht gleich lang, so könnten wir nach a) die Ecke A_2 so durch eine Ecke A_2' ersetzen, daß $A_1A_2' + A_3A_2' = A_1A_2 + A_3A_2$ ist und der Flächeninhalt des Dreiecks $A_1A_2'A_3$ größer als der des Dreiecks $A_1A_2A_3$ wird, also auch der des neuen Polygons größer als der von Π im Gegensatz zur Voraussetzung, daß Π das maximale Polygon ist. Um endlich zu

zeigen, daß Π einem Kreise eingeschrieben ist, zerlegen wir Π durch eine zwei gegenüberliegende Ecken A_1, A_{n+1} verbindende Diagonale d in zwei umfangsgleiche Polygone Π_1, Π_2; diese müssen auch inhaltsgleich sein; denn wäre Π_1 größer als Π_2, so könnten wir das Spiegelbild Π_1' von Π_1 an der Diagonale d zu Π_1 hinzufügen und so zu einem Polygon $\Pi^* = \Pi_1 + \Pi_1'$ gelangen, das den Umfang $2l$, aber einen größeren Inhalt als Π hätte. Wir zeigen nun, daß für jede Ecke A_h der Winkel $A_1 A_h A_{n+1}$ ein rechter sein muß. Wäre es dieser Winkel für die Ecke A_h nicht, so zerlegen wir Π_1 in das Dreieck $A_1 A_h A_{n+1}$ und zwei Polygone H_1, H_2, die an die Seiten $A_1 A_h$ und $A_{n+1} A_h$ anschließen, und betrachten sodann ein rechtwinkliges Dreieck $A_1' A_h A_{n+1}'$, dessen Katheten $A_1' A_h$, $A_{n+1}' A_h$ bzw. gleich $A_1 A_h$, $A_{n+1} A_h$ sind. Fügen wir die Polygone H_1, H_2 an diese Katheten an, so erhalten wir ein Polygon Π_1^*, das wir an $A_1' A_{n+1}'$ spiegeln und durch Hinzufügung des Spiegelbildes zu einem Polygon Π^* ergänzen. Dieses neue Polygon besitzt den Umfang $2l$; da aber das rechtwinklige Dreieck $A_1' A_h A_{n+1}'$ einen größeren Inhalt besitzt als das nicht rechtwinklige $A_1 A_h A_{n+1}$, so hat auch Π^* einen größeren Inhalt als Π, was gegen die Voraussetzung ist. Damit ist der Nachweis für die Extremumseigenschaft des regulären Polygons erbracht[1]). Genau dieselbe Lösung ergibt sich für die reziproke Aufgabe, bei gegebenem Inhalt den Umfang möglichst klein zu machen.

Die hier dargelegte, auf einer klassischen Idee von Steiner beruhende Behandlung ist ein Beispiel dafür, daß in konkreten Fällen eine anschauliche geometrische Methode rascher und überzeugender zum Ziele führen kann als die Anwendung eines allgemeinen analytischen Verfahrens.

e) Andere Beispiele. Minimum eines Maximums. Andere typische Beispiele, wo es sich nicht mehr um reine Maxima oder Minima handelt, sind uns schon mehrfach begegnet. Es sei hingewiesen auf die Definition der Eigenwerte einer quadratischen Form als Minima eines Maximums, oder auf die *Polynome von Tschebyscheff* in Kapitel II, welche folgendes Problem lösen: Gegeben ist eine Funktion $p(x) = x^n + y_1 x^{n-1} + \cdots + y_n$ der Größen $x, y_1, \ldots, y_n$. Es soll zunächst bei festen y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ derjenige Wert oder einer der Werte x_0 im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ bestimmt werden, für den $|p(x)|$ möglichst groß ist, und sodann sind die Zahlen $y_1, \ldots, y_n$ so zu wählen, daß dieses Maximum möglichst klein wird.

2. Funktionenfunktionen. Die Variationsrechnung nimmt ihren Ausgang ebenfalls von Extremumproblemen bzw. der Frage nach

[1]) Es sei nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Existenz des Extremums nach dem Weierstraßschen Satze von vornherein feststeht. Legt man nämlich eine Ecke des Polygons in den Nullpunkt, so sind die Koordinaten der übrigen Ecken durch die Forderung des gegebenen Umfangs auf einen endlichen abgeschlossenen Bereich beschränkt, und der Flächeninhalt hängt stetig von ihnen ab.

stationären Werten. Der fundamentale Unterschied ist aber der, daß es sich nun nicht mehr um Extrema von Funktionen einer endlichen Zahl unabhängiger Variablen handelt, sondern um Extrema von sogenannten *Funktionenfunktionen*[1]). Unter einer Funktionenfunktion versteht man eine Größe oder auch eine Funktion, die nicht von einer gewissen Anzahl von unabhängigen, in gewissen Grenzen willkürlichen Variablen, sondern von dem Verlaufe einer oder mehrerer in gewissen Grenzen willkürlicher, die Stelle der unabhängigen Variablen vertretender Funktionen abhängt. Das einfachste Beispiel bietet die Länge L einer Kurve $y = y(x)$ zwischen den Werten $x = x_0$, $x = x_1$; diese Länge wird gegeben durch das Integral $L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$; die Zahl L hängt also vom Verlaufe der „*Argumentfunktion*" $y(x)$ ab, die als beliebige stetige Funktion mit stückweise stetigen Ableitungen gewählt werden kann. Solche Funktionenfunktionen treten überall in der Analysis und in den Anwendungen auf, und viele der wichtigsten Fragen der Analysis beziehen sich mehr oder weniger ausgesprochenermaßen auf solche funktionale Abhängigkeiten.

Ein anderes Beispiel ist der Flächeninhalt einer Fläche $z = z(x, y)$, welche über einem Gebiete G der x, y-Ebene liegt. Er wird gegeben durch das Integral

$$\iint_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy$$

und ist eine Funktionenfunktion der Argumentfunktion $z(x, y)$.

Weitere Beispiele für Funktionenfunktionen haben wir schon im vorigen Kapitel kennen gelernt. So ist die Funktion

$$g(x) = \int K(x, y)\, h(y)\, dy$$

eine Funktionenfunktion von $h(x)$, und die Integralform

$$\iint K(x, y)\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy$$

eine Funktionenfunktion von $\varphi(x)$. In diesem Kapitel werden uns hauptsächlich solche Funktionenfunktionen beschäftigen, die durch Integrale über bekannte Ausdrücke in der Argumentfunktion, deren Ableitungen und den unabhängigen Variablen gegeben sind, wie oben die Bogenlänge einer Kurve. Wir betrachten der Reihe nach einige weitere typische Beispiele:

a) Länge einer Kurve auf einer Fläche. Ist die Fläche durch die Parameterdarstellung $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z gegeben und wird in der üblichen Weise

[1]) In der französischen Literatur ist die Bezeichnung „fonction de ligne" oder „fonctionnelle" gebräuchlich.

$e = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$, $f = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$, $g = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$ gesetzt, so ist die Länge einer durch die Gleichung $v = v(u)$ definierten Flächenkurve zwischen den Werten u_0, u_1 durch das Integral $L = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{e + 2fv' + gv'^2}\, du$ ausgedrückt, wobei also $v(u)$ die Argumentfunktion, e, f, g gegebene Ausdrücke sind. Nehmen wir speziell $u = x$, $v = y$, so wird $e = 1 + z_x^2$, $f = z_x z_y$, $g = 1 + z_y^2$.

b) Lichtzeit. In einem zweidimensionalen Medium sei die Lichtgeschwindigkeit eine gegebene Funktion $\varphi(x, y)$ der rechtwinkligen Koordinaten x, y. Mit s werde die Bogenlänge auf der Kurve $y = y(x)$ des Lichtstrahles, mit t die Zeit bezeichnet. Dann ist

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + y'^2}\,\frac{dx}{dt} = \varphi(x, y);$$

also ist die Lichtzeit zwischen zwei Punkten der Bahn durch das Integral

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\varphi(x, y)}\, dx$$

gegeben, welches von der Argumentfunktion $y(x)$ abhängt.

c) Flächeninhalt einer Rotationsfläche. Die Kurve $y = y(x)$ möge um die x-Achse rotieren. Die erzeugte, von den Ebenen $x = x_0$, $x = x_1$ begrenzte Rotationsfläche besitzt dann den Flächeninhalt

$$F = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Dasselbe Integral ohne den Faktor 2π stellt, durch $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ dividiert, die Höhe des Schwerpunktes der gleichmäßig mit Masse belegten Kurve über der x-Achse dar.

d) Die potentielle Energie eines elastischen Stabes, der aus einer geradlinigen Ruhelage verbogen wird, ist bei hinreichend kleiner Deformation proportional dem über die Stablänge erstreckten Integrale des Quadrates der Krümmung. Die Ruhelage sei die x-Achse, die senkrechte Elongation an der Stelle x sei $u(x)$; dann ist also, wenn wir die höheren Potenzen von u und den Ableitungen von u gegenüber den niedrigeren vernachlässigen dürfen, die potentielle Energie bis auf einen Materialfaktor durch das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} (u'')^2\, dx$$

gegeben, wobei x_0, x_1 die Endpunkte des Stabes bezeichnen.

e) Lösung einer unterbestimmten Differentialgleichung. Zu etwas allgemeineren Funktionenfunktionen gelangen wir, indem wir

von einer *unterbestimmten Differentialgleichung* oder einem unterbestimmten Differentialgleichungssystem ausgehen, d. h. einem solchen System, bei welchem die Anzahl der Gleichungen geringer ist als die Anzahl der auftretenden unbestimmten Funktionen. Ist z. B. $M(y', z', y, z, x) = 0$ eine solche Differentialgleichung zwischen den beiden Funktionen $y(x)$ und $z(x)$ und wird $z(x_0) = a$ gesetzt, so ist nach den allgemeinen Sätzen der Differentialgleichungstheorie die Funktion $z(x)$ als bestimmt anzusehen, sobald man den Wert a wählt und irgendeine willkürliche Funktion $y(x)$ in die Gleichung $M = 0$ einsetzt. Es ist somit $z(x)$ bei gegebenem a eine Funktionenfunktion von $y(x)$. Speziell wird, wenn $M = z' - F(x, y, y')$ und $a = 0$ ist,

$$z = \int_{x_0}^{x} F(x, y, y')\, dx,$$

was die allgemeine Form der oben behandelten Beispiele a), b), c) darstellt.

f) Potentielle Energie einer gleichmäßig gespannten elastischen Membran. Die potentielle Energie einer aus der Ruhelage deformierten elastischen Membran ist proportional der Vergrößerung des Flächeninhaltes[1]). In der Ruhelage möge die Membran ein Stück G der x, y-Ebene bedecken; mit $u(x, y)$ sei die Deformation senkrecht zur Ruheebene bezeichnet, und diese Deformation sei wieder klein in dem Sinne, daß höhere Potenzen von u, u_x, u_y gegenüber niederen vernachlässigt werden dürfen. Dann wird der Ausdruck $\iint_G \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}\, dx\, dy$ für den Flächeninhalt durch $\iint_G \left(1 + \frac{u_x^2 + u_y^2}{2}\right) dx\, dy$ zu ersetzen sein, und für die gesuchte potentielle Energie ergibt sich bis auf einen konstanten Faktor das Doppelintegral

$$(2) \qquad \tfrac{1}{2} \iint_G (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy$$

mit der Argumentfunktion $u(x, y)$.

g) Potentielle Energie einer elastischen Platte[2]). Die potentielle Energie einer aus einer ebenen Ruhelage gebogenen Platte ist das Integral über eine quadratische Form der Hauptkrümmungen der bei der Biegung entstehenden Fläche, immer bei Voraussetzung der im schon mehrfach definierten Sinne zu verstehenden „Kleinheit" der Deformation. Bezeichnen wir die Hauptkrümmungsradien der

[1]) Man kann die Membran geradezu definieren als einen wesentlich zweidimensional ausgedehnten elastischen Körper, der einer Verbiegung keinen Widerstand entgegensetzt, wohl aber einer Flächenvergrößerung.

[2]) Im Gegensatz zur Membran definieren wir als Platte einen zweidimensionalen elastischen Körper, bei dem der ausschlaggebende Teil der potentiellen Energie von der Verbiegung herrührt. Vgl. *Love, A. E. H.:* Lehrbuch der Elastizität, deutsch von *A. Timpe*, Kap. 22, S. 522—566. Leipzig 1907.

deformierten Platte mit ϱ_1, ϱ_2, so wird die potentielle Energie ein Ausdruck der Form $A\left(\frac{1}{\varrho_1^2}+\frac{1}{\varrho_2^2}\right)+\frac{2B}{\varrho_1\varrho_2}$, worin A und B Materialkonstanten sind; wegen der Kleinheit von $u, u_x, \ldots$ kann man setzen $\frac{2}{\varrho_1}+\frac{2}{\varrho_2}=\Delta u = u_{xx}+u_{yy}$, $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}=u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2$. Die gesuchte Energie ist also gegeben durch einen Ausdruck der Form

$$V = C\iint_G [(\Delta u)^2 - 2(1-\mu)(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)]\,dx\,dy. \tag{3}$$

Die gegebenen Beispiele lassen sich natürlich beliebig vermehren. Hingewiesen sei noch auf andere typische Funktionenfunktionen, die uns allerdings zum Teil fernerhin nicht beschäftigen werden. Z. B. ist der Grundton, den eine homogene Membran von sich geben kann, eine Funktionenfunktion ihrer Gestalt. Die homogene Flüssigkeitsmenge von gegebener physikalischer Beschaffenheit (Dichte, Kompressibilität, Zähigkeit), die bei gegebenem konstanten Druckgefälle in der Zeiteinheit durch den Querschnitt eines zylindrischen unendlich langen Rohres fließt, ist eine Funktionenfunktion der Querschnittform. Andere, direkt in analytischer Gestalt auftretende Beispiele sind Funktionen mehrerer Integrale über Ausdrücke, die von Argumentfunktionen und ihren Ableitungen abhängen, etwa

$$\int_0^1 F(x, y, y')\,dx + \left(\int_0^1 G(x, y, y')\,dx\right)^2 \tag{4}$$

oder

$$\iint_G (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy + \int_\Gamma \sigma u^2\,ds, \tag{5}$$

wobei das letzte Integral über die Randkurve Γ des Gebietes G erstreckt werden soll und σ eine gegebene Funktion der Bogenlänge s bedeutet.

Endlich sei noch erwähnt, daß uns später in den Lösungen der Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen weitere Typen von Funktionenfunktionen begegnen werden, indem diese Lösungen von den vorgegebenen Randfunktionen als Argumentfunktionen abhängen.

Wenn eine Funktionenfunktion sich auch nicht als Funktion endlich vieler Variablen auffassen läßt, so kann man sie doch als *Funktion von unendlich vielen Variablen* ansehen. Man denke sich etwa die Argumentfunktionen in Potenzreihen oder Fouriersche Reihen entwickelt; dann sind die Entwicklungskoeffizienten die betreffenden unendlich vielen Variablen. Natürlich muß der Bereich dieser Variablen Einschränkungen unterworfen werden, die sich jeweils aus den Bedingungen ergeben, welchen die Argumentfunktionen zu genügen haben. Ebenso wie bei Funktionen von Variablen für diese ein Definitionsbereich vor-

liegen muß, so muß auch für die Argumentfunktionen der Funktionenfunktionen der *Bereich der zugelassenen Funktionen* definiert werden, beispielsweise durch die Forderung der Stetigkeit der Funktion und der stückweisen Stetigkeit der ersten Ableitung.

3. Die typischen Probleme der Variationsrechnung. In der Variationsrechnung handelt es sich darum, Maxima oder Minima oder auch allgemeiner nur stationäre Werte[1]) von Funktionenfunktionen aufzusuchen, indem man diejenigen einem vorgegebenen Funktionenbereich angehörigen Argumentfunktionen aufsucht, für welche das betreffende Extremum oder der stationäre Wert angenommen wird. Analog wie es beim gewöhnlichen Minimumproblem oder Maximumproblem der Differentialrechnung immer zunächst nicht auf das absolute Minimum oder Maximum ankommt, sondern nur auf das Extremum relativ zu einer gewissen Umgebung der Extremumstelle, werden wir auch hier das Extremum relativ zu einer gewissen Nachbarschaft der das Extremum liefernden Argumentfunktion, der „*Extremalen*" aufzusuchen haben. Wir müssen hierzu den Begriff der *Nachbarschaft einer Funktion* $f(x, y, \ldots)$ definieren. Ist h eine positive Größe, so sagen wir, die Funktion $f_1(x, y, \ldots)$ liege in der Nachbarschaft oder der Nachbarschaft nullter Ordnung (h) der Funktion $f(x, y, \ldots)$, wenn für den betrachteten Definitionsbereich $|f - f_1| < h$ ist. Wir sagen ferner, die Funktion $f_1(x, y, \ldots)$ liege in der Nachbarschaft erster Ordnung (h) von $f(x, y, \ldots)$, wenn auch noch für die Ableitungen die Beziehungen $|f_x - f_{1x}| < h$, $|f_y - f_{1y}| < h$, ... bestehen, usw. Wenn eine Funktionenfolge $f_1, f_2, f_3, \ldots$ so gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, daß noch die Ableitungen von f_i bis zur n^{ten} Ordnung einschließlich gleichmäßig gegen die entsprechenden Ableitungen von f konvergieren, so sagen wir, daß die Funktionen f_i die Funktion f von der n^{ten} Ordnung approximieren.

Nunmehr formulieren wir das *Grundproblem der Variationsrechnung* dahin, daß innerhalb eines gewissen Funktionenbereiches der Argumentfunktion oder der Argumentfunktionen einer vorgegebenen Funktionenfunktion eine extremale Funktion gesucht werden soll, welche die Funktionenfunktion zu einem Extremum macht, verglichen mit allen einer hinreichend kleinen Nachbarschaft (h) von gegebener Ordnung angehörigen Argumentfunktionen des Bereiches. Falls nichts besonderes gesagt wird, soll es sich stets um Nachbarschaft nullter Ordnung handeln. Die Argumentfunktionen können ganz unabhängig wählbar sein, sie können aber auch vorgeschriebenen funktionalen Bedingungsgleichungen unterworfen werden. Treten in der zum Extremum zu machenden Funktionenfunktion noch variable Parameter $x, y, \ldots$ auf, ist sie also

[1]) Was wir unter einem stationären Wert einer Funktionenfunktion zu verstehen haben, wird später präzisiert werden (§ 3, 1).

keine Zahl, sondern selbst eine Funktion von Veränderlichen, so müssen diese veränderlichen Parameter der Extremumsforderung gemäß mit bestimmt werden. Wir erläutern diese Problemstellung an einer Reihe einfacher Beispiele:

a) Geodätische Linien. Die kürzeste der Fläche angehörige Verbindungslinie zweier Punkte einer gegebenen Fläche soll bestimmt werden. Nach 2a) handelt es sich um die Bestimmung der Extrema von $\int_{u_0}^{u_1} \sqrt{e + 2fv' + gv'^2}\, du$.

b) Lichtstrahl, Brachistochrone. Nach dem oben (S. 143) formulierten Fermatschen Prinzip wird die Bahn des Lichtes in einem unhomogenen zweidimensionalen Medium mit der Lichtgeschwindigkeit $\varphi(x, y)$ durch das Variationsproblem

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\varphi(x, y)}\, dx = \text{Minimum}$$

charakterisiert. Hier wie beim vorigen Problem sind zum Vergleiche solche stetig gekrümmte Kurven zugelassen, welche die fest gegebenen Endpunkte der Bahn miteinander verbinden. — Ganz analog wie das Problem des Lichtstrahles formuliert sich das Problem der Brachistochrone, mit dem i. J. 1696 Jakob Bernoulli den Anstoß zur Entwicklung der Variationsrechnung gab. Es sollen zwei Punkte A, B durch eine Kurve miteinander verbunden werden, auf der ein der Schwere in Richtung der y-Achse unterworfener reibungslos gleitender Massenpunkt möglichst rasch von A nach B gelangt. Die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes sei Null. Nach der Fallhöhe y hat der Punkt bekanntlich die Geschwindigkeit $\sqrt{2gy}$, wobei g die Schwerebeschleunigung ist. Hieraus ergibt sich als Fallzeit das Integral

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}\, dx,$$

welches also zum Minimum zu machen ist. Zulässige Vergleichsfunktionen sind hierbei alle mit den beiden ersten Ableitungen stetigen Funktionen $y(x)$, für die $y(x_0) = 0$, $y(x_1) = y_1$ ist, wenn x_0, y_0 und x_1, y_1 die Koordinaten des Anfangs- und Endpunktes der Bahn sind.

c) Minimale Rotationsfläche. Aus 2c) erhalten wir ebenso zur Charakterisierung der Rotationsflächen, die zwischen zwei Breitenkreisen einen kleinstmöglichen Flächeninhalt einschließen, das Variationsproblem

$$\int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \text{Minimum}.$$

d) Isoperimetrische Probleme. In der ursprünglichen geometrischen Form besagt das Problem: Man soll eine geschlossene Kurve von gegebenem Umfang und größtem Inhalt finden. Indem wir die Kurve als konvex annehmen und durch die x-Achse in zwei inhalts- und umfangsgleiche Teile zerlegt denken (vgl. 1 d), gelangen wir zu folgendem Problem: Es soll das Integral

$$\int_0^{\xi} y(x)\, dx$$

durch geeignete Wahl von ξ und $y(x)$ zu einem Maximum gemacht werden, während

$$\int_0^{\xi} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = l$$

gegeben ist und im übrigen $y(x)$ irgend eine im Intervalle $0 \leqq x \leqq \xi$ stetige und mit stückweise stetiger erster Ableitung versehene Funktion bedeutet, für die $y(0) = y(\xi) = 0$ ist.

Ein ganz analoges Problem können wir formulieren, wenn wir die obere Grenze ξ als fest annehmen.

Wir können das spezielle isoperimetrische Problem auf ein gewöhnliches Variationsproblem zurückführen, indem wir die Bogenlänge $s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ als unabhängige Variable einführen, die im Intervalle $0 \leqq s \leqq l$ läuft. Wegen $ds^2 = dx^2 + dy^2$ geht hierdurch die Aufgabe über in die folgende: Es soll $\int_0^l y \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\, ds$ zum Maximum gemacht werden, wenn $y(s)$ eine stetige, stückweise mit stetiger Ableitung versehene Funktion von s ist. Nach Bestimmung von $y(s)$ findet man dann

$$x(s) = \int_0^s \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\, ds$$

und hat damit die gesuchte Kurve in Parameterdarstellung.

Allgemeinere isoperimetrische Probleme, bei denen ein Integralausdruck zum Extremum gemacht werden soll, während ein anderer einen gegebenen Wert besitzt, kommen häufig vor, z. B. ist das *Problem der Kettenlinie* von dieser Art: Die Lage eines homogenen schweren Fadens von gegebener Länge mit festen Endpunkten unter dem Einfluß der in Richtung der negativen y-Achse wirkenden Schwere zu bestimmen. Da die Gleichgewichtslage durch die Forderung gekenn-

zeichnet ist, daß der Schwerpunkt möglichst tief liegen soll, so gelangen wir zu folgendem Variationsproblem: Es soll

$$\int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

möglichst klein sein, während

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

einen gegebenen Wert besitzt und die Randwerte $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ ebenfalls gegeben sind.

Ein weiteres Problem ist

$$\int_{x_0}^{x_1} (y'')^2\, dx = \text{Min.}$$

mit der Nebenbedingung

$$\int_{x_0}^{x_1} y^2\, dx = 1;$$

hierbei soll die Funktion $y(x)$ an den Endpunkten des Intervalls verschwinden und überall mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetig sein. Oder: Es soll eine mit den Ableitungen erster Ordnung im Gebiete G stetige Funktion u von x, y bestimmt werden, welche der Bedingung $\iint_G u^2\, dx\, dy = 1$ genügt und für die

$$\iint_G (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy + \int_\Gamma \sigma u^2\, ds$$

möglichst klein wird (Bezeichnungen siehe 2g). Auch das Variationsproblem des vorigen Kapitels, welches die Eigenfunktionen eines symmetrischen Kerns definierte, ist ein solches isoperimetrisches Problem, wenn wir allgemein mit diesem Namen Aufgaben bezeichnen, bei denen als Nebenbedingung für einen gegebenen Integralausdruck ein fester Wert vorgeschrieben ist.

e) Mayersches Problem. Es sei $z(x)$ diejenige Lösung von $M(z', y', z, y, x) = 0$, welche für $x = x_0$ verschwindet. Es soll eine Funktion $y(x)$ in einem gegebenen Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$ bestimmt werden, für die $z(x_1)$ ein Extremum wird. Allgemeiner seien r Differentialgleichungen erster Ordnung

$$M_i(z'; y_1', y_2', \ldots, y_h'; y_1, y_2, \ldots, y_h; x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

zwischen $h + 1 > r$ Funktionen $z, y_1, y_2, \ldots, y_h$ eines gewissen Funktionenbereiches gegeben. Die Funktionen sollen so bestimmt

werden, daß dabei $z(x_0) = 0$ und $z(x_1)$ ein Extremum wird, wobei für die Funktion y Randbedingungen vorgegeben sein können oder auch nicht. In diesem Problem stecken als Spezialfälle alle Probleme folgender Art: Es sollen h Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_h$, die noch gewissen Randbedingungen unterworfen sein können, so ermittelt werden, daß ein Integral der Form

$$\int_{x_0}^{x_1} F(y_1', y_2', \ldots, y_h'; y_1, \ldots y_h; x)\, dx$$

ein Extremum wird, während die Nebenbedingungen

$$G_i(y_1', \ldots, y_h'; y_1, \ldots, y_h; x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r,\ r < h)$$

erfüllt sind[1]). Man erkennt dies unmittelbar, indem man eine Funktion $z(x)$ durch die Differentialgleichung

$$z' - F(y_1', y_2', \ldots, y_h'; y_1, \ldots, y_h; x) = 0$$

und die Anfangsbedingung $z(x_0) = 0$ einführt. Ebenso lassen sich die isoperimetrischen Probleme aus 3 d), sofern sie sich auf Funktionen einer Variablen beziehen, als Spezialfälle des Mayerschen Problems ansehen.

Endlich sei darauf hingewiesen, daß auch Probleme, bei denen eine Funktion $\varphi(J_1, J_2, \ldots)$ von mehreren Integralen

$$J_h = \int_{x_0}^{x_1} F_h(x, y, y')\, dx$$

zum Extremum gemacht werden soll, sich dem Mayerschen Schema unterordnen. Man braucht diese Probleme dazu nur folgendermaßen zu formulieren: zwischen den Funktionen $z(x)$, $y(x)$, $y_1(x), \ldots$ bestehen die Relationen $z - \varphi(y_1, y_2, \ldots) = 0$, $y_1' = F_1(x, y, y')$, $y_2' = F_2(x, y, y') \ldots$, ferner ist $y_i(x_0) = 0$. Unter diesen Bedingungen soll durch geeignete Wahl der Funktionen $y, y_1, \ldots$ der Wert $z(x_1)$ zu einem Extremum gemacht werden[2]).

Bei allen genannten Problemen muß der Bereich der zugelassenen Vergleichsfunktionen stets hinsichtlich der Stetigkeitseigenschaften so festgelegt sein, daß die auftretenden Funktionenfunktionen einen Sinn behalten.

Auch alle weiteren Funktionenfunktionen, die oben in 2a) bis 2g) angeführt sind, geben Anlaß zu Variationsproblemen, wenn man sie durch geeignete Wahl der Argumentfunktionen zu Extremen machen soll.

---

[1]) Auf diesen auch für die physikalischen Anwendungen wichtigen Typus von Problemen kommen wir später in § 6, 3, zurück.

[2]) Probleme dieser zuletzt geschilderten Art wurden schon von *Euler* in Betracht gezogen, sind aber später nur noch wenig beachtet worden. Es wäre eine lohnende Aufgabe, diese Fragen näher zu untersuchen.

4. Die charakteristischen Schwierigkeiten der Variationsrechnung. Während in der Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima der grundlegende Satz von Weierstraß uns ein für allemal der Lösbarkeit der Aufgabe versichert, besteht in der Variationsrechnung die eigentümliche Schwierigkeit, daß Probleme, die sich sinnvoll formulieren lassen, dennoch unter Umständen keine Lösung zu besitzen brauchen. Ein einfaches geometrisches Beispiel ist das folgende: Zwei Punkte auf der x-Achse sollen durch eine stetig gekrümmte möglichst kurze Linie verbunden werden, welche in ihren Endpunkten auf der x-Achse senkrecht steht. Dieses Problem besitzt keine Lösung. Denn die Länge der fraglichen Linie ist immer größer als die der geradlinigen Verbindungsstrecke, kann aber der Länge der Verbindungsstrecke beliebig angenähert werden. Hier existiert also zwar eine untere Grenze, aber kein Minimum, das von einer zulässigen Kurve angenommen wird.

Ein analytisches Beispiel ist das folgende: Es soll

$$\int_{-1}^{1} x^4 y'^2 \, dx$$

zum Minimum gemacht werden durch eine stetige Funktion mit stückweise stetiger Ableitung, für welche $y(-1) = -1$, $y(1) = 1$ gilt. Man kann unschwer sehen, daß durch geeignete Funktionen (nämlich $y = -1$ für $x < -\varepsilon$, $y = 1$ für $x > \varepsilon$, $y = x : \varepsilon$ für $|x| \leqq \varepsilon$) das Integral beliebig klein gemacht werden kann, während es für keine zulässige Funktion verschwindet.

Wir sehen also, *daß in der Variationsrechnung die Existenz der Lösung eines gegebenen Extremumproblems immer noch eines besonderen Beweises bedarf.* Für viele mit der Variationsrechnung zusammenhängende Fragen bedeutet dies, wie wir später erkennen werden, eine wesentliche Schwierigkeit. Im vorliegenden Kapitel jedoch wird es sich vorzugsweise um die Aufstellung lediglich *notwendiger Bedingungen* für das Eintreten eines Extremums handeln, wobei die Frage, ob ein Extremum nach Erfüllung dieser Bedingungen wirklich vorhanden ist, offen bleiben kann.

Bevor wir an die Aufstellung dieser notwendigen Bedingungen in Form von Differentialgleichungen gehen, wollen wir im nächsten Paragraphen einige Überlegungen über Ansätze zur direkten Lösung der Variationsprobleme anstellen.

§ 2. Ansätze zur direkten Lösung[1]).

Die meisten Methoden, die auf eine direkte und vollständige Lösung von Variationsproblemen abzielen, beruhen darauf, daß man zunächst

[1]) Ausführlich werden wir die direkten Methoden der Variationsrechnung erst im zweiten Bande behandeln.

ein geeignet zu wählendes gewöhnliches Extremumproblem löst, in dem es sich um die Bestimmung von n Parametern handelt, und sodann den Grenzübergang $n \to \infty$ vollzieht.

1. Isoperimetrisches Problem. Als Beispiel betrachten wir das isoperimetrische Problem aus § 1, 1 d, eine geschlossene Kurve K mit dem Umfang $2l$ und maximalem Inhalt zu finden, wobei die Kurve stückweise glatt, d. h. bis auf endlich viele Ecken mit stetiger Tangente versehen sein soll. Nehmen wir an, die Kurve K sei die Lösung, dann können wir schließen, daß K ein Kreis ist. Denn zunächst ergibt sich genau so, wie in § 1, 1 d, daß K konvex ist und daß jede Sehne AB, die K in zwei umfangsgleiche Teile zerlegt, auch eine Zerlegung in flächengleiche Teile definiert; zweitens muß für jeden Punkt P der Kurve K der Winkel APB ein rechter sein, da man sonst durch die Konstruktion von § 1, 1 d, sofort eine Kurve K' mit demselben Umfang, aber größerem Inhalt bekommen könnte. Da diese Überlegung aber auf der gemäß § 1, 3, beweisbedürftigen Voraussetzung beruht, daß das Problem überhaupt eine Lösung besitzt, so wollen wir zur Lösung einen anderen Weg einschlagen, welcher gleichzeitig den nötigen Existenzbeweis für die Lösung mit liefert. Wir betrachten die Menge aller Inhaltszahlen von zulässigen Kurven. Da diese Zahlen jedenfalls unterhalb der Schranke πl^2 liegen (die Kurve muß in einem Kreise vom Radius l Platz haben), so besitzt nach den elementaren Grundregeln der Analysis die Zahlenmenge eine obere Grenze M, oberhalb deren keine Zahl der Menge liegt, in deren Nachbarschaft (ε) aber bei beliebig kleinem ε noch solche Zahlen vorhanden sind. Mit anderen Worten, es gibt eine „*Maximalfolge*" von zulässigen Kurven $K_1, K_2, K_3, \ldots$ derart, daß der Flächeninhalt F_n von K_n mit wachsendem n gegen M konvergiert. Nun können wir jede Kurve K_n durch ein Polygon Π_n mit hinreichend großer Seitenanzahl beliebig genau so approximieren, daß Inhalt und Umfang des Polygons sich von dem der Kurve beliebig wenig unterscheiden. Da wir das Polygon noch, ohne seinen approximierenden Charakter zu verändern, ähnlich zu sich selbst so dilatieren dürfen, daß sein Umfang genau gleich $2l$ wird, können wir also von der Maximalfolge $K_1, K_2, \ldots$ zu einer aus Polygonen Π_n' bestehenden Maximalfolge übergehen. Die Seitenzahl dieser Polygone dürfen wir als gerade annehmen, da ein $(2m-1)$-Eck als $2m$-Eck mit zwei in eine Gerade fallenden aufeinanderfolgenden Seiten aufgefaßt werden kann. Nun wissen wir nach § 1, 1 d, daß von allen $2m$-Ecken mit dem Umfang $2l$ das reguläre den größten Inhalt hat. Also müssen wir erst recht eine Maximalfolge unseres Problems erhalten, wenn wir die Polygone Π_n' durch die entsprechenden regulären Polygone ersetzen. Diese aber konvergieren mit wachsender Seitenzahl gegen den Kreis vom Umfang $2l$, und da die Inhalte der Polygone gegen M konvergieren müssen, so besitzt der Kreis den Inhalt M und löst wirklich das Variationsproblem.

2. Das Ritzsche Verfahren. Minimalfolgen. Den Überlegungen im vorigen Beispiel liegt ein allgemeiner Gedanke zugrunde. Wir betrachten irgendein Variationsproblem der Form $D[\varphi] = \text{Min.}$, wobei $D[\varphi]$ ein Integral über einen gegebenen Ausdruck aus der Funktion φ und ihren Ableitungen bis zur h^{ten} Ordnung bedeutet und das Integrationsgebiet sowie der Bereich der zum Vergleich zugelassenen Funktionen φ vorgegeben ist. Ob es sich um einfache oder mehrfache Integrale handelt, ob in dem Integrale höhere als erste Ableitungen von φ vorkommen, ist dabei gleichgültig. Wir setzen voraus, daß der Wertevorrat des Integrals $D[\varphi]$ für die zulässigen Argumentfunktionen φ eine untere Grenze d besitzt (ob ein von einer Funktion $\varphi = u$ wirklich erreichtes Minimum, bleibt eben eine offene Frage); dann gibt es Folgen von zulässigen Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ derart, daß $\lim_{n\to\infty} D[\varphi_n] = d$ ist, während für jede zulässige Funktion φ die Beziehung $D[\varphi] \geqq d$ gilt. Solche Funktionenfolgen nennen wir *Minimalfolgen* des Variationsproblems. *Eine direkte Lösung des Variationsproblems wird immer darauf hinauslaufen, daß man sich Minimalfolgen konstruiert und aus diesen durch einen Grenzübergang die Lösung zu gewinnen sucht.*

Das Verfahren, welches W. Ritz[1]) in diesem Sinne im Hinblick auf die numerische Gewinnung der Lösung mit großem Erfolg angewandt hat, besteht in folgendem: Man gehe aus von einem festen, für den Integrationsbereich definierten vollständigen Funktionensystem $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$, welches die Eigenschaft hat[2]), daß alle linearen Kombinationen $\varphi_n = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n$ von endlich vielen der Funktionen zulässige Vergleichsfunktionen sind und daß sich für jede zulässige Vergleichsfunktion φ eine geeignete solche Kombination φ_n angeben läßt, für welche sich $D[\varphi]$ von $D[\varphi_n]$ um beliebig wenig unterscheidet. Dann muß es notwendig auch Minimalfolgen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ geben, bei denen φ_n eine lineare Kombination $c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n$ von $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ist. Erst recht müssen wir also zu einer Minimalfolge gelangen, wenn wir für jedes n die Funktion φ_n, d. h. die Parameter $c_1, \ldots, c_n$ durch die Forderung bestimmen, daß $D[\varphi_n] = d_n$ ein Minimum sein soll. Diese Forderung stellt ein gewöhnliches Minimumproblem für $D[\varphi_n]$ als Funktion der n Parameter $c_1, c_2, \ldots, c_n$ dar und läßt sich nach dem Weierstraßschen Satze immer erfüllen, wofern nur — was als selbstverständlich vorausgesetzt werden soll — $D[\varphi_n]$ eine stetige Funktion der Parameter $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ist. Zur Bestimmung der Werte c_i erhalten wir allgemein gesprochen die

---

[1]) *Ritz, W.:* Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. J. reine angew. Math. Bd. 135, S. 1—61. 1909. — Gesammelte Werke S. 192—250. Paris 1911.

[2]) Die Existenz solcher Funktionen wird im zweiten Bande näher diskutiert werden.

n Gleichungen $\frac{\partial D[\varphi_n]}{\partial c_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Von der so gewonnenen Minimalfolge erwartet man nun, daß sie gegen die gesuchte Lösung konvergiert. Leider aber liegt, wie wir in 4. sehen werden, die Sache nicht so einfach, so daß wir allgemein nur aussagen können: Die gewonnenen Werte $D[\varphi_n] = d_n$ konvergieren gegen die gesuchte untere Grenze bzw. das Minimum. Ob die Minimalfolge selbst gegen die Lösung konvergiert, und von welcher Ordnung (s. § 1, 3) die Konvergenz ist, das muß Gegenstand besonderer Untersuchungen bleiben. Auf diese Frage kommen wir später bei verschiedenen Gelegenheiten zurück.

Die Brauchbarkeit des Verfahrens zur numerischen Rechnung kann unter Umständen auch dann noch bestehen bleiben, wenn die Konvergenz des Verfahrens nicht bewiesen ist. Welchen Erfolg die Methode im einzelnen Falle hat, wird von der mehr oder weniger glücklichen Wahl der *Koordinatenfunktionen* ω_i abhängen, die der Rechner dem individuellen Problem angepaßt treffen muß. Zur ersten Erläuterung des Verfahrens betrachte der Leser die Beispiele unter 3.

3. Weitere direkte Methoden. Auf eine andere Art kann man in vielen Fällen zu Minimalfolgen gelangen, wenn man den Bereich der zulässigen Funktionen erweitert, indem man stetige mit nur stückweise stetigen Ableitungen versehene Vergleichsfunktionen in Betracht zieht. Wir beschränken uns dabei hier auf das Problem des Minimums eines einfachen Integrals der Form $D[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$. Ist $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x), \ldots$ eine Minimalfolge, so können wir, wenn wir wie immer die erforderlichen Stetigkeitsvoraussetzungen machen, sicher die durch $y = \varphi_n(x)$ dargestellte Kurve durch einen Polygonzug $y = p_n(x)$ so genau approximieren, daß das Integral $D[\varphi_n]$ sich von $D[p_n]$ beliebig wenig unterscheidet. Man kann also auch Minimalfolgen herstellen, die aus stückweise linearen Funktionen bestehen, wobei dann der Unterschied zwischen Differentialquotient und Differenzenquotient der Funktion in jedem Teilintervall fortfällt. Teilt man z. B. das Integrationsintervall durch m Teilpunkte in gleiche Teile der Länge Δx ein und beschränkt sich auf Funktionen, die in jedem Teilintervall linear sind, so geht das Variationsproblem wieder in ein gewöhnliches Minimumproblem für die Funktionswerte in den m Teilpunkten über. Indem wir die so zu gewinnenden Funktionen für $m = 1, 2, 3, \ldots$ bilden, erhalten wir wiederum eine Minimalfolge [1]).

[1]) Die hier geschilderte Methode ist im wesentlichen diejenige, vermöge deren *Euler* in seinem Werke „Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietale gaudentes" (Lausanne 1744) die „Eulerschen Differentialgleichungen" gewann.

Der Leser möge sich davon überzeugen, daß man dieses Verfahren dem Ritzschen Verfahren subsumieren kann, indem man geeignete stückweise lineare Koordinatenfunktionen einführt.

Daß dieses Verfahren tatsächlich gegen die Lösung des Minimumproblems konvergiert, wenn diese Lösung vorhanden ist, werden wir später im zweiten Bande sehen.

Ganz ähnlich wird man vorgehen können, wenn der Integrand höhere Ableitungen enthält, etwa noch die zweite. Man wird dann in dem approximierenden Problem den zweiten Differentialquotienten durch den zweiten Differenzenquotienten $\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{(\Delta x)^2}$ ersetzen.

Man kann unsere Variationsprobleme auch unter dem Gesichtspunkte der *Theorie von Funktionen unendlich vieler Veränderlichen* betrachten. Als ein Beispiel können wir die in Kap. II (S. 82) durchgeführte Hurwitzsche Lösung des isoperimetrischen Problems ansehen, wo die Fourierschen Koeffizienten als die fraglichen Variablen auftraten und wo der analytische Ausdruck die Lösung evident machte. Auch das Verfahren von Ritz gestattet diese Auffassung, wenn wir uns die gesuchte Funktion z. B. in eine unendliche Reihe $c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2 + \cdots$ entwickelt denken dürfen und das Verfahren als eine Methode der sukzessiven Bestimmung der unendlich vielen Koeffizienten $c_1, c_2, c_3, \ldots$ ansehen, wobei natürlich die nötigen Konvergenzuntersuchungen nachzuholen wären.

Diese allgemeinen Erörterungen mögen durch einige auch an sich bedeutungsvolle Beispiele erläutert werden.

a) Es soll das über das Rechteck R: $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$ erstreckte Integral

$$D[\varphi] = \iint_R (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy \tag{6}$$

zum Minimum gemacht werden, wenn zum Vergleich alle in R stetigen, stückweise glatten [1]) und am Rande verschwindenden Funktionen zugelassen werden, welche der Nebenbedingung

$$H[\varphi] = N\varphi = \iint_R \varphi^2\, dx\, dy = 1 \tag{7}$$

genügen.

Wir denken uns die Funktion φ in eine Fouriersche Reihe $\varphi = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \sin m \frac{\pi}{a} x \sin n \frac{\pi}{b} y$ entwickelt, was nach Kap. II sicherlich möglich ist; dann handelt es sich um die Bestimmung der unendlich vielen Parameter c_{mn} durch die Minimumforderung. Da die Funktionen φ_x und φ_y noch stückweise stetig sind, dürfen wir die Vollständigkeitsrelation der trigonometrischen Funktionen auch auf diese

[1]) Siehe die Definition am Anfang von Kap. II.

Funktionen mit den Entwicklungskoeffizienten $\frac{\pi}{a} m c_{mn}$, $\frac{\pi}{b} n c_{mn}$ anwenden und erhalten für die beiden Integrale die Ausdrücke

$$D = \pi^2 \frac{ab}{4} \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right), \qquad H = \frac{ab}{4} \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}^2 \tag{8}$$

in den unendlich vielen Parametern c_{mn}. Wegen der Bedingung $H = 1$ ist nun evident, daß die Lösung des Problems gegeben wird durch $c_{mn} = 0$ mit Ausnahme des Koeffizienten c_{11}, der gleich $\frac{4}{ab}$ wird. Somit wird unser Variationsproblem durch die Funktion

$$u = \frac{4}{ab} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

gelöst und der Wert des Minimums ist

$$d = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right),$$

eine Tatsache, die sich für jede stückweise glatte Funktion in der Beziehung

$$D[\varphi] \geqq \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) H[\varphi] \tag{9}$$

ausspricht; denn diese Gleichung ist äquivalent mit der Gleichung $D[\psi] \geqq d$ für die normierte Funktion $\psi = \varphi (N\varphi)^{-\frac{1}{2}}$.

b) Es soll das über den Kreis K: $x^2 + y^2 \leqq 1$ der x, y-Ebene erstreckte Integral

$$D[\varphi] = \iint_K (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy$$

zum Minimum gemacht werden, wenn zum Vergleich alle in K glatten Funktionen zugelassen sind, die am Rande vorgeschriebene Randwerte annehmen. Wir führen Polarkoordinaten r, ϑ im Kreise ein, wodurch das Integral in

$$D[\varphi] = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\varphi_r^2 + \frac{1}{r^2} \varphi_\vartheta^2\right) r\, dr\, d\vartheta$$

übergeht; die vorgeschriebenen Randwerte mögen durch eine Fouriersche Reihe $f(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta)$ definiert sein, und diese Randfunktion möge eine stückweise glatte Ableitung haben, was nach Kap. II, § 4, 4 die Beschränktheit der Größen $n^2 |a_n|$, $n^2 |b_n|$ nach sich zieht. Wir denken uns die Funktion φ in der Form geschrieben

$$\varphi = \tfrac{1}{2} f_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(r) \cos n\vartheta + g_n(r) \sin n\vartheta],$$

wobei die Koeffizienten $f_n(r)$, $g_n(r)$ der Bedingung $f_n(1) = a_n$, $g_n(1) = b_n$

genügen müssen, und können dann wieder aus der Vollständigkeitsrelation für die trigonometrischen Funktionen auf die Gleichung

$$D[\varphi] = \frac{\pi}{2}\int_0^1 f_0'(r)^2\,dr + \pi\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \left(f_n'(r)^2 + \frac{n^2}{r^2} f_n(r)^2\right) r\,dr + \pi\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \left(g_n'(r)^2 + \frac{n^2}{r^2} g_n(r)^2\right) r\,dr$$

schließen. Um also das ursprüngliche Minimumproblem zu lösen, werden wir die ganze Serie der Minimumprobleme

$$\int_0^1 \left(f_n'^2 + \frac{n^2}{r^2} f_n^2\right) r\,dr = \text{Min.},\quad \int_0^1 \left(g_n'^2 + \frac{n^2}{r^2} g_n^2\right) r\,dr = \text{Min.}\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

behandeln, wobei f_n wie g_n eine glatte Funktion ist, die für $r = 1$ den Wert a_n bzw. b_n hat. Für diese Minimumprobleme erfüllen auf Grund des Weierstraßschen Approximationssatzes sicherlich die Funktionen $1, r, r^2, r^3, \ldots$ die beim Ritzschen Verfahren gestellten Bedingungen. Setzen wir für f_n oder g_n ein Polynom $c_0 + c_1 r + \cdots + c_m r^m$ vom Grade $m \geqq n$ an, so ergeben sich, wie der Leser leicht selbst feststellen wird, als Lösungen unabhängig von m die Funktionen $f_n = a_n r^n$, $g_n = b_n r^n$. Alle Funktionen der so entstehenden Minimalfolge werden also einander gleich, was unmittelbar diese Funktionen als Lösung des Minimumproblems kennzeichnet.

Anstatt das Ritzsche Verfahren anzuwenden, kann man aber die Lösung f_n oder g_n des Variationsproblems auch ganz direkt folgendermaßen erhalten. Für $n = 0$ haben wir zunächst $\int_0^1 f_0^2 r\,dr$ zum Minimum zu machen, was offenbar durch $f_0' = 0$, $f_0 = \text{konst.} = a_0$ erreicht wird. Für $n > 0$ muß $f_n(0) = g_n(0) = 0$ sein; sonst würde der zweite Teil des Integrals unendlich werden, da f_n differenzierbar ist, sich also in der Form $f_n(0) + r\,h_n(r)$ mit einer stetigen Funktion h_n darstellen läßt. Wir schreiben nun das eine Integral in der Form

$$\int_0^1 \left(f_n' - \frac{n}{r} f_n\right)^2 r\,dr + 2n\int_0^1 f_n f_n'\,dr = \int_0^1 \left(f_n' - \frac{n}{r} f_n\right)^2 r\,dr + n f_n^2(1),$$

worin $f_n(1) = a_n$ bereits festgelegt ist, und erkennen unmittelbar, daß wir dann einen minimalen Wert, und zwar den Wert $n f_n^2(1) = n a_n^2$ erhalten, wenn wir $f_n' - \frac{n}{r} f_n = 0$ setzen, was $f_n = c_n r^n$ und wegen der Bedingung $f_n(1) = a_n$ genau $f_n(r) = a_n r^n$ ergibt. Die Lösung unseres ursprünglichen Minimumproblems lautet also

$$u(r, \vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta),$$

und der Minimumwert ist $a = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n^2 + b_n^2)$. Indem wir die komplexe Schreibweise für die trigonometrischen Funktionen und die Integraldarstellungen für die Koeffizienten a_n, b_n einführen, können wir die Lösung in der Form schreiben

$$u(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{n} r^\nu \left(e^{i\nu(\vartheta - \psi)} + e^{-i\nu(\vartheta - \psi)} \right) \right\} d\psi ,$$

was durch Summation der gleichmäßig konvergenten geometrischen Reihen die Ausdrücke ergibt

$$(10) \quad \begin{cases} u(r, \vartheta) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ 1 + \frac{r e^{i(\vartheta - \psi)}}{1 - r e^{i(\vartheta - \psi)}} + \frac{r e^{-i(\vartheta - \psi)}}{1 - r e^{-i(\vartheta - \psi)}} \right\} d\psi \\ \qquad = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\vartheta - \psi) + r^2} d\psi . \end{cases}$$

Man nennt dieses Integral, das uns später noch begegnen wird, das *Integral von Poisson.*

Ausdrücklich sei noch darauf hingewiesen, daß das hier gelöste Minimumproblem seinen Sinn verlieren kann, sobald für die Randfunktion allgemeinere Voraussetzungen zugelassen werden, z. B. nur Stetigkeit gefordert wird. Nehmen wir etwa die durch die gleichmäßig konvergente Reihe $\varrho(\vartheta) = \varphi(1, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n! \vartheta)$ definierte stetige Randfunktion, so würde die Summe $\pi \sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m^2 = \pi \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^4} (n!)^2$ unendlich werden; es gibt dann, wie man leicht zeigen kann, überhaupt keine zulässige Vergleichsfunktion φ mit endlichem $D[\varphi]$.

c) Es sei $g(x, y)$ eine im Rechteck R: $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$ glatte Funktion. Wir suchen eine mit ihren ersten Ableitungen im Rechteck stetige und am Rande verschwindende Funktion φ, welche das Integral

$$(11) \qquad J[\varphi] = \iint_R (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 - 2\varphi g)\, dx\, dy$$

zum Minimum macht. Setzen wir im Innern von R die Funktion $g(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b}$ und $\varphi = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b}$, wobei c_{mn} zu bestimmende Parameter sind, so geht das Variationsproblem wegen der Vollständigkeitsrelation der trigonometrischen Funktionen über in das Problem, die Größen c_{mn} so zu bestimmen, daß

$$\frac{4}{ab} J[\varphi] = \pi^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) c_{mn}^2 - 2 \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} c_{mn}$$

möglichst klein wird. Hieraus erkennen wir unmittelbar, daß das Minimum geliefert wird durch

$$(12)\qquad c_{mn} = \frac{a_{mn}}{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}, \qquad u(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_{mn}}{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\sin m\frac{\pi x}{a}\sin n\frac{\pi y}{b}.$$

Diese Funktion erfüllt in der Tat alle gestellten Bedingungen, da die Reihe ebenso wie die durch gliedweise Differentiation entstehenden Reihen gleichmäßig konvergiert, indem die absolut konvergenten Reihen $\sum\frac{|a_{mn}|}{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}$, $\sum\frac{m|a_{mn}|}{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}$, $\sum\frac{n|a_{mn}|}{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}$ Majoranten darstellen. Wir werden später sehen, daß die Funktion u der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x,y)$ genügt, ebenso wie insbesondere die Funktion $u(x,y)$ des Beispiels a) und auch $u(r,\vartheta)$ aus b) der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügen.

4. Prinzipielles über die direkten Methoden der Variationsrechnung. Die schon erwähnte Hauptschwierigkeit bei der Durchführung wie bei der strengen Rechtfertigung direkter Methoden in der Variationsrechnung liegt darin, daß Minimalfolgen eines Problems keineswegs gegen eine Grenzfunktion zu konvergieren brauchen, auch wenn die Existenz einer Lösung an sich feststeht. Man kann also nicht erwarten, durch Betrachtung von Minimalfolgen in allen Fällen wirklich unmittelbar zur Lösung zu gelangen. Ein einfaches Beispiel bietet die *„Dirichletsche" Aufgabe*[1]), das Integral $D[\varphi] = \iint_G(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\,dx\,dy$ zu einem Minimum zu machen, wenn zum Vergleiche alle in G stetigen und stückweise glatten Funktionen zugelassen sind, die am Rande verschwinden. Offenbar ist $\varphi = 0$ die eindeutig bestimmte Lösung des Problems, da jede andere zulässige Funktion einen positiven, diese aber einen verschwindenden Integralwert liefert. Indem wir Polarkoordinaten r, ϑ um einen beliebigen inneren Punkt P von G einführen, können wir das Integral in die Form setzen $\iint_G\left(\varphi_r^2+\frac{1}{r^2}\varphi_\vartheta^2\right)r\,dr\,d\vartheta$. Wir betrachten einen ganz in G liegenden Kreis $r \leqq a$ mit dem Radius $a < 1$ um P und setzen $\varphi = 0$ außerhalb dieses Kreises, $\varphi = \frac{1}{\log a}\log\frac{r}{a}$ in dem Kreisring zwischen $r = a$ und $r = a^2$, schließlich $\varphi = \frac{1}{\log a}\log a = 1$ in dem Kreise $r \leqq a^2$. Die Funktion φ ist nach Definition eine zulässige Vergleichsfunktion. Das Integral wird gleich $\frac{2\pi}{(\log a)^2}\int_{a^2}^{a}\frac{1}{r^2}r\,dr = -\frac{2\pi}{\log a}$. Lassen

[1]) Diese Personalbezeichnung hat sich seit *Riemann* eingebürgert, entspricht aber keineswegs den historischen Tatsachen.

wir jetzt den Wert a eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von gegen Null strebenden Größen durchlaufen und betrachten alle zugehörigen Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, so konvergiert $D[\varphi_n]$ gegen Null; diese Funktionen bilden also eine Minimalfolge des Problems. Aber im Punkte P haben alle Funktionen den Wert 1; sie konvergieren daher nicht gegen die Lösung $\varphi = 0$ des Problems.

Ein weiteres anschauliches Beispiel bietet das Variationsproblem der Minimalflächen, wobei das Integral

$$\iint_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy$$

zum Minimum gemacht werden soll und zum Vergleich alle quadrierbaren Flächen zugelassen sind, die durch eine gegebene über dem Rande von G liegende Raumkurve laufen. Nehmen wir als diese Randkurve speziell eine Kurve der x,y-Ebene, z. B. einen Kreis vom Flächeninhalt 1, so wird das Minimum sicherlich durch die Funktion $z = 0$, d. h. durch die x,y-Ebene selbst geliefert. Eine Minimalfolge ist jede Folge von Flächen durch die Kreisperipherie, deren Flächeninhalte gegen 1 konvergieren. Nun können wir sofort zulässige Vergleichsflächen angeben, deren Inhalt beliebig nahe an 1 liegt und für welche $z(x,y)$ an einzelnen Stellen sich von Null um beliebig viel unterscheidet. Wir denken uns etwa auf die x,y-Ebene einen beliebig hohen, aber hinreichend schmalen geraden Kegel aufgesetzt, so daß sein Flächeninhalt unter einer gegebenen Schranke bleibt. Als Vergleichsfläche nehmen wir die aus diesem Kegel und im übrigen aus der x,y-Ebene bestehende Fläche. Eine Minimalfolge aus solchen Flächen konvergiert nicht gegen die Lösung. Man kann sogar, wie leicht ersichtlich, Minimalfolgen herstellen, bei denen die Divergenzpunkte auf der Kreisfläche überall dicht verteilt sind.

Bei dem Variationsproblem $\int_0^1 y'^2\, dx = \text{Min.}$, wobei $y(x)$ eine stetige, stückweise glatte, an den Endpunkten verschwindende Funktion von x sein soll, müssen zwar, wie man leicht sieht, die Minimalfolgen stets gegen die Funktion $y = 0$ konvergieren; aber die Ableitungen der die Minimalfolge bildenden Funktionen brauchen dies keineswegs zu tun; wie das Beispiel der Funktionenfolge $y_n = x$ für $x < \varepsilon_n$, $y_n = 2\varepsilon_n - x$ für $\varepsilon_n \leqq x \leqq 2\varepsilon_n$, $y_n = 0$ für $y > 2\varepsilon_n$, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ zeigt.

Wir werden später sehen, wie in vielen Fällen solche Schwierigkeiten überwunden werden können und wie in der Tat die direkten Methoden der Variationsrechnung zu den mächtigsten Hilfsmitteln der Analysis gehören. Weniger radikal in das Wesen des Minimumproblems eingreifend, aber dafür allgemeiner und formal leichter zu handhaben sind die indirekten Methoden, welche wesentlich in der Zurückführung

des Variationsproblems auf Differentialgleichungsprobleme bestehen und seit Euler und Lagrange bis in die neuere Zeit hinein vorzugsweise ausgebildet worden sind. Ihnen gelten die nächsten Ausführungen.

§ 3. Die Differentialgleichungen der Variationsrechnung.

Die zuerst von Euler abgeleiteten Differentialgleichungen eines Variationsproblems stellen lediglich notwendige, keineswegs immer hinreichende Bedingungen dar, welche von einer Funktion erfüllt sein müssen, damit sie das Extremum eines vorgelegten Integrals liefert.

Wir erhalten diese Differentialgleichungen, indem wir das Variationsproblem auf ein Problem der Differentialrechnung zurückführen. Ein für allemal schicken wir voraus, daß wir alle auftretenden Funktionen und ihre explizit auftretenden Ableitungen als stetig voraussetzen, wofern nicht ausdrücklich etwas anderes festgesetzt wird.

1. Das einfachste Problem der Variationsrechnung. Es möge sich zunächst um das einfachste Problem der Variationsrechnung handeln, nämlich um die Bestimmung des Minimums des Integrals

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx, \tag{13}$$

wobei $x_0, x_1, y(x_0), y(x_1)$ gegebene Werte sein sollen. Von den Funktionen $y(x)$ wollen wir die Stetigkeit der zweiten Ableitungen y'' voraussetzen. Wir nehmen an, $y = y(x) = f(x)$ sei die gesuchte Extremalfunktion, welche das Minimum liefert, und zwar möge das Minimum angenommen werden im Vergleich mit einer hinreichend kleinen Nachbarschaft (h) erster Ordnung zur Funktion $y = f(x)$. Wir betrachten eine im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$ definierte Funktion $\eta(x)$, welche stetige zweite Ableitungen besitzt, am Rande verschwindet, sonst aber willkürlich gewählt sein kann und bilden mit einem Parameter ε die Funktion $\bar{y} = y + \delta y = y + \varepsilon\, \eta(x)$. Die Größe $\delta y = \varepsilon \eta(x)$ nennt man die *Variation* der Funktion $y = f(x)$. Wenn der Parameter ε hinreichend kleinen Betrag besitzt, so liegen alle variierten Funktionen $\bar{y}$ in einer beliebig klein gewählten Nachbarschaft der Extremale $y = f(x)$. Also muß das Integral $J[\bar{y}] = J[y + \varepsilon\, \eta]$, das wir als Funktion $\Phi(\varepsilon)$ von ε auffassen können, für $\varepsilon = 0$ ein Minimum relativ zu allen absolut genommen hinreichend kleinen Werten von ε besitzen, und es muß daher $\Phi'(0) = 0$ sein. Indem wir erlaubterweise die Differentiation von $\Phi(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon\, \eta, y' + \varepsilon\, \eta')\, dx$ unter dem Integralzeichen vornehmen, erhalten wir als notwendige Bedingung die Gleichung

$$\Phi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} (F_y\, \eta + F_{y'}\, \eta')\, dx = 0,$$

welche für jede unter den obigen Einschränkungen willkürlich gewählte Funktion $\eta(x)$ gelten muß. Wir formen den zweiten Teil des Integrals unter Beachtung der Bedingungen $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ durch Teilintegration um und erhalten so die für jede unserer Funktionen η bestehende Gleichung

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) dx = 0 .$$

Diese Gleichung liefert sofort die gesuchte Differentialgleichung auf Grund des folgenden *„Fundamentallemmas der Variationsrechnung"*: Wenn für alle am Rande verschwindenden und mit den beiden ersten Ableitungen stetigen Funktionen $\eta(x)$ die Beziehung $\int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\, \varphi(x)\, dx = 0$ besteht, wobei $\varphi(x)$ eine stetige Funktion von x ist, so ist identisch $\varphi(x) = 0$. Diesen Satz, der genau ebenso auch für mehrfache Integrale gilt, beweist man sehr einfach indirekt. Wäre $\varphi(x)$ an der Stelle $x = \xi$ von Null verschieden, etwa positiv, so gäbe es auch eine Umgebung G: $\xi_0 < x < \xi_1$ der Stelle ξ, in der $\varphi(x)$ positiv ist, etwa größer als $\delta > 0$. Wir setzen $\eta(x) = (x - \xi_0)^4 (x - \xi_1)^4$ in G und $\eta(x) = 0$ außerhalb dieses Intervalls; dann ist sicherlich $\int_{x_0}^{x_1} \eta \varphi \, dx > 0$ im Gegensatz zur Voraussetzung. Die Behauptung $\varphi = 0$ bleibt bestehen, wenn wir der Funktion η die Beschränkung auferlegen, daß ihre Ableitungen bis zur k^{ten} stetig sein sollen; wir setzen dann einfach $\eta = (x - \xi_0)^{2l} (x - \xi_1)^{2l}$ mit $2l > k$. Aus dem Fundamentallemma folgt unmittelbar, daß die Funktion $\frac{d}{dx} F_{y'} - F_y$, die wir abkürzend mit $-[F]_y$ bezeichnen, in x identisch verschwinden muß, d. h. daß die Funktion $y(x)$ der Differentialgleichung

$$-[F]_y = \frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0 \tag{14}$$

oder ausgeschrieben

$$y'' F_{y'y'} + y' F_{y'y} + F_{y'x} - F_y = 0 \tag{14'}$$

genügt. Dies ist die fundamentale *Eulersche Differentialgleichung*, deren Form in der Analysis und den Anwendungen immer wiederkehrt. *Ihr Bestehen ist eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums.* Es handelt sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, in deren allgemeiner Lösung zwei willkürliche Konstanten vorkommen, genau so viele, wie wir im allgemeinen zur Befriedigung der Randbedingungen brauchen. *In Erweiterung der früher* (vgl. S. 150) *eingeführten Bezeichnung nennen wir alle Lösungen der Eulerschen Differentialgleichung von nun an Extremalen.* Den Differentialausdruck $[F]_y$ bezeichnen wir als

Variationsableitung von F nach y. Sie spielt hier dieselbe Rolle wie der Differentialquotient beim Problem der gewöhnlichen Minima.

Wir erwähnen ferner einen mit Nutzen zu verwendenden Sprachgebrauch. Ebenso wie man die Funktion $\varepsilon\eta = \delta y$ als Variation von $y(x)$ bezeichnet, nennt man den Ausdruck

$$(15)\quad \delta J = \varepsilon\,\Phi'(0) = \varepsilon\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta\,dx = \varepsilon\int_{x_0}^{x_1}(\eta F_y + \eta' F_{y'})\,dx$$

die *Variation* oder genauer die *erste Variation* des Integrals J, ähnlich wie man nach Cauchy den mit unbestimmtem Parameter gebildeten Ausdruck $\varepsilon f'(x) = df$ als Differential der Funktion $f(x)$ bezeichnet. Notwendige Bedingung für ein Minimum ist also das Verschwinden der ersten Variation. Allgemein nennen wir Funktionen oder geometrisch gesprochen Kurven, für welche δJ verschwindet, d. h. die Lösungen von $[F]_y = 0$, auch *stationäre Funktionen* bzw. *Kurven*, indem wir damit, ähnlich wie beim entsprechenden Problem der Differentialrechnung, die Möglichkeit andersartiger Verhältnisse als wirklicher Extrema zum Ausdruck bringen.

Die von uns früher (vgl. S. 151, 152) angeführten Beispiele liefern folgende Ausdrücke:

a) $F = \sqrt{e + 2fv' + gv'^2}$, $\quad \frac{d}{du}\frac{f + gv'}{\sqrt{e + 2fv' + gv'^2}} - \frac{e_v + 2f_v v' + g_v v'^2}{2\sqrt{e + 2fv' + gv'^2}} = 0$;

b) $F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\varphi(x, y)} = \psi(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$, $\quad \psi y'' = (\psi'_y - \psi_x y')(1 + y'^2)$;

c) $F = y\sqrt{1 + y'^2}$, $\quad y y'' = 1 + y'^2$ (Sonderfall von b);

d) $F = y\sqrt{1 - y'^2}$, $\quad y y'' = y'^2 - 1$.

Die Integration dieser Differentialgleichungen wird uns für besondere Fälle in § 4 gelingen. Was die allgemeine Integrationstheorie der Eulerschen Gleichung betrifft, so werden wir uns mit ihr später in Bd. 2 befassen.

Hinsichtlich des Bereiches der zum Vergleich zugelassenen Funktionen kann man sich insofern zu einer Kritik veranlaßt sehen, als wir die Existenz und Stetigkeit der zweiten Ableitungen voraussetzten (was mit Rücksicht auf die Gewinnung der Differentialgleichung zweiter Ordnung geschah), obwohl die Formulierung des Problems nur die Stetigkeit der ersten Ableitungen zu verlangen scheint. Es wäre a priori denkbar, daß es in der betreffenden Nachbarschaft von $y = f(x)$ eine Funktion $y^*(x)$ gäbe, für die nur die erste Ableitung stetig ist, und die einen Wert $J[y^*] = i^* < J[y]$ liefert. Dies ist aber nicht möglich. Denn nach dem Weierstraßschen Approximationssatz können wir die

Ableitung $y^{*\prime}$ durch ein Polynom $p'(x)$ und die Funktion y^* durch das Polynom $p(x)$, das obendrein noch die Randbedingungen $p(x_0) = y_0$, $p(x_1) = y_1$ erfüllt, mit beliebiger Genauigkeit ersetzen[1]); es wird sich also auch $J[p]$ beliebig wenig von $J[y^*]$, also von i^* unterscheiden, und daher würde es möglich sein, $J[p] < y[J]$ zu machen, wenn $i^* < J[y]$ ist. Da aber $p(x)$ eine zulässige Vergleichsfunktion mit stetigen zweiten Ableitungen ist, so muß $i^* \geqq J[y]$ sein. *Wir haben also nachträglich gezeigt, daß unsere Extremale, wenn sie überhaupt das Minimumproblem löst, diese Lösung zugleich für alle Vergleichsfunktionen bietet, die nur einmalige Differentiation gestatten.*

2. Mehrere gesuchte Funktionen. Ganz ähnlich wie beim einfachsten Problem liegen die Verhältnisse, wenn es sich darum handelt, mehrere, etwa n Funktionen $y(x)$, $z(x)$, ... von x so zu bestimmen, daß das Integral

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, \ldots, y', z', \ldots)\, dx \tag{16}$$

ein Extremum wird (oder einen stationären Wert erhält), wobei wieder die Funktionswerte an den Randpunkten gegeben sein mögen. Indem wir auch hier willkürliche, am Rande verschwindende Funktionen $\eta(x)$, $\zeta(x)$, ... einführen und annehmen, daß das Funktionensystem $y = y(x) = f(x)$, $z = z(x) = g(x)$, ... ein Extremum liefert, schließen wir genau wie oben, daß die Funktion

$$\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon_1 \eta, z + \varepsilon_2 \zeta, \ldots, y' + \varepsilon_1 \eta', z' + \varepsilon_2 \zeta', \ldots)\, dx$$

der Variablen ε_1, ε_2, ... für $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$, ... ein Extremum haben

---

[1]) Man bilde nämlich zunächst nach dem Approximationssatz von S. 69, unter ε eine willkürlich vorgegebene Größe verstanden, ein Polynom $q'(x)$, das sich für $x_0 \leqq x \leqq x_1$ von der Funktion $y^{*\prime}(x)$ um weniger als $\frac{\varepsilon}{2(x_n - x_0)}$ unterscheidet. Dann nimmt das Polynom

$$q(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} q'(t)\, dt$$

den vorgeschriebenen Anfangswert y_0 an und unterscheidet sich im ganzen Intervalle von $y^*(x)$ höchstens um $\frac{\varepsilon}{2}$. Um ein Polynom zu erhalten, das auch den vorgeschriebenen Endwert y_1 erreicht, braucht man nur die lineare Funktion $l(x) = \frac{y_1 - q(x_1)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$ hinzuzufügen und bestätigt leicht, daß $p(x) = q(x) + l(x)$ alle im Texte genannten Eigenschaften besitzt.

muß. Es wird also $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 = 0$, ... sein, oder, wie wir auch schreiben können,

$$\delta J = d\Phi = \varepsilon_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}\right)_0 + \cdots$$
$$= \int_{x_0}^{x_1} ((F_y \eta + F_{y'} \eta') \varepsilon_1 + (F_z \zeta + F_{z'} \zeta') \varepsilon_2 + \cdots) dx = 0,$$

worin die angehängte Null bedeutet, daß man in dem betreffenden Ausdruck $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = 0$ zu setzen hat.

Wir nennen diesen Ausdruck die erste Variation von J und können ihn ähnlich wie oben in die Gestalt bringen

$$(17) \quad \delta J = \varepsilon_1 \int_{x_0}^{x_1} \eta \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) dx + \varepsilon_2 \int_{x_0}^{x_1} \zeta \left(F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}\right) dx + \cdots.$$

Da $\delta J = 0$ sein muß, wenn eine der Funktionen $\eta, \zeta, \ldots$ willkürlich gewählt, die andern Null sind, so folgt nach der obigen Schlußweise, daß gleichzeitig die folgenden Eulerschen Differentialgleichungen bestehen:

$$(18) \quad \begin{cases} -[F]_y = \frac{d}{dx} F_{y'} - F_y \\ \qquad = F_{y'y'} y'' + F_{y'z'} z'' + \cdots + F_{y'y} y' + F_{y'z} z' + \cdots \\ \qquad\qquad + F_{y'x} - F_y = 0, \\ -[F]_z = \frac{d}{dx} F_{z'} - F_z \\ \qquad = F_{z'y'} y'' + F_{z'z'} z'' + \cdots + F_{z'y} y' + F_{z'z} z' + \cdots \\ \qquad\qquad + F_{z'x} - F_z = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Wir erhalten also hier als notwendige Bedingung für das Extremum oder den stationären Charakter der „Raumkurve" $y = f(x)$, $z = g(x)$, ... das Bestehen des Systems (18) von ebensoviel Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wie es unbekannte Funktionen $y, z, \ldots$ gibt.

Alle oben für das einfachste Problem angestellten Überlegungen bleiben bestehen. Neu tritt hier lediglich die Möglichkeit hinzu, daß auch Fälle auftreten, bei denen z. B. das Integral ein Minimum wird gegenüber Variationen der Funktion $y(x)$, dagegen ein Maximum gegenüber Variationen der Funktion $z(x)$.

Auch hier nennen wir *jede* Lösungskurve des Differentialgleichungssystems eine *Extremale*.

Das einfachste Beispiel für die Eulerschen Gleichungen (18) liefert die Aufgabe der *Bestimmung der kürzesten Linien im gewöhnlichen euklidischen oder auch im nichteuklidischen Raume* mit dem Linienelement

$$ds^2 = g_{11} dx^2 + g_{22} dy^2 + g_{33} dz^2 + 2 g_{12} dx\, dy + 2 g_{13} dx\, dz + 2 g_{23} dy\, dz.$$

Hier wird

$$F = \sqrt{g_{11} + 2\,g_{12}\,y' + 2\,g_{13}\,z' + g_{22}\,y'^2 + 2\,g_{23}\,y'\,z' + g_{33}\,z'^2},$$

und wir erhalten für die „geodätischen Linien" dieses Raumes die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g_{12} + g_{22}\,y' + g_{23}\,z'}{F}\right) - \frac{1}{2F}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial y} + 2\,\frac{\partial g_{12}}{\partial y}\,y' + \cdots\right) = 0\,,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g_{13} + g_{23}\,y' + g_{33}\,z'}{F}\right) - \frac{1}{2F}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial z} + 2\,\frac{\partial g_{12}}{\partial z}\,y' + \cdots\right) = 0\,,$$

welche im euklidischen Falle mit

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

in

$$\frac{d}{dx}\,\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0, \qquad \frac{d}{dx}\,\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0$$

übergehen und durch alle Geraden des Raumes befriedigt werden.

Die *Ausbreitung des Lichtes* in einem dreidimensionalen Medium mit der Lichtgeschwindigkeit $\varphi\,(x, y, z)$ wird durch das Variationsproblem

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\varphi\,(x, y, z)}\,dx = \text{Min.}$$

geliefert. Indem wir allgemeiner die Lichtgeschwindigkeit noch von der Richtung des Lichtstrahles abhängig denken und demgemäß durch einen Ausdruck $\varphi\,(x, y, z, y', z')$ darstellen, *können wir das Problem der Bestimmung der Lichtstrahlen, d. h. das Problem der geometrischen Optik, als völlig äquivalent mit unserer Aufgabe betrachten*, wobei einfach $F = \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\varphi\,(x, y, z, y', z')}$ zu setzen ist.

3. Auftreten höherer Ableitungen. Wenn es sich um ein Variationsproblem der Form

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F\,(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\,dx = \text{Min.} \tag{19}$$

handelt, wo F eine gegebene Funktion der Argumente $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ ist, und zum Vergleich alle Funktionen mit stetigen Ableitungen bis zur $2\,n^{\text{ten}}$ Ordnung zugelassen werden, bei denen am Rande die Funktionswerte und die Werte der Ableitungen bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung gegeben sind, so können wir die Eulersche Differentialgleichung ganz analog aufstellen. Verstehen wir wieder unter $\eta\,(x)$ eine willkürliche, mit ihren Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung stetige Funktion, welche nur in den Randpunkten $x = x_0$, $x = x_1$ den Bedingungen $\eta\,(x) = 0$, $\eta'\,(x) = 0, \ldots,$

$\eta^{(n-1)}(x) = 0$ unterworfen ist, so erhalten wir genau wie oben für die erste Variation $\delta J = \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} J[y + \varepsilon\eta]\big|_{\varepsilon=0}$ den Ausdruck

$$\delta J = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} [F_y \eta + F_{y'} \eta' + \cdots + F_{y^{(n)}} \eta^{(n)}]\, dx,$$

und hier können wir wiederum durch fortgesetzte Teilintegration unter dem Integral alle Ableitungen der Funktion η fortschaffen, so daß δJ in die Gestalt übergeht

$$(20) \quad \delta J = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \eta \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}\right] dx.$$

Wir erhalten daher nach dem obigen Lemma als notwendige Bedingung für das Extremum die Differentialgleichung $2n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(21) \quad [F]_y = F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0,$$

die wir wiederum als Eulersche Gleichung bezeichnen. Die im allgemeinen Integral von (21) vorhandenen $2n$ Integrationskonstanten können wir uns durch die $2n$ Randbedingungen festgelegt denken.

Ganz entsprechend lauten die Systeme von Eulerschen Gleichungen, die wir erhalten, wenn es sich um die Bestimmung mehrerer Funktionen $y, z, \ldots$ aus einem Variationsproblem

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, \ldots, y', z', \ldots, y'', z'', \ldots)\, dx = \text{Min.}$$

handelt.

4. Mehrere unabhängige Variable. Das Variationsproblem der Bestimmung der Extrema von mehrfachen Integralen führt zu einer oder mehreren partiellen Differentialgleichungen für die gesuchten Funktionen, so wie die bisher behandelten Aufgaben zu gewöhnlichen Differentialgleichungen führten. Wir betrachten etwa die Aufgabe, das über ein gegebenes Gebiet G erstreckte Doppelintegral

$$(22) \qquad J = \iint_G F(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy$$

durch eine mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung versehene Funktion u zum Extremum zu machen, wobei die Randwerte der Funktion vorgegeben sein mögen. Wiederum verstehen wir unter $\eta(x, y)$ eine willkürliche Funktion, der wir später die Randbedingung $\eta = 0$ auferlegen wollen, und erhalten als notwendige Bedingung für das Extremum das Verschwinden der ersten Variation

$$\delta J = \varepsilon \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Phi(\varepsilon)\right)_{\varepsilon=0} = \varepsilon \left(\frac{d}{d\varepsilon} J[u + \varepsilon\eta]\right)_{\varepsilon=0}$$

oder anders ausgedrückt die Gleichung

$$\iint_G (F_u \eta + F_{u_x} \eta_x + F_{u_y} \eta_y)\, dx\, dy = 0, \tag{23}$$

die wir nun ebenfalls durch Teilintegration umformen. Wir setzen voraus, daß die Randkurve Γ von G eine stückweise stetig sich ändernde Tangente besitzt und außerdem von jeder Parallelen zu einer der beiden Koordinatenachsen nur in einer beschränkten Punktzahl durchschnitten wird. Das Integral $\int F_{u_x} \eta_x dx$, bei festem y über denjenigen Teil der Geraden $y = \text{konst.}$ erstreckt, der in G fällt, wird bei Teilintegration gleich $-\int \eta \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} dx + \sum \eta(x') F_{u_x} - \sum \eta(x'') F_{u_x}$, wobei wir unter x'' die Abszissen der Punkte verstehen, in denen die Gerade $y = \text{konst.}$ von links her in das Gebiet G eintritt, unter x' die Abszissen der Austrittspunkte. Durch Integration nach y erhalten wir

$$\iint_G \eta_x F_{u_x} dx\, dy = -\iint_G \eta \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} dx\, dy + \int_\Gamma \eta F_{u_x} \frac{dy}{ds} ds,$$

wobei das Randintegral in positivem Sinne um das Gebiet G zu erstrecken ist, d. h. so, daß wachsendem s ein das Gebiet zur Linken lassender Umlauf entspricht. Indem wir mit dem zweiten Bestandteil des Integrals (6) ebenso verfahren, gewinnen wir

$$\delta J = \varepsilon \iint_G \eta \left\{ F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right\} dx\, dy + \varepsilon \int_\Gamma \eta (F_{u_x} dy - F_{u_y} dx) = 0,$$

und, wenn wir entsprechend der Voraussetzung fester Randwerte von u am Rande $\eta = 0$ fordern,

$$\delta J = \varepsilon \iint_G \eta \left\{ F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right\} dx\, dy = 0. \tag{24}$$

Die Gleichung $\delta J = 0$ muß bei willkürlichem, stetig differenzierbarem η bestehen. Da das Lemma aus 1. genau so für mehrfache Integrale gilt und bewiesen wird wie für einfache, schließen wir unmittelbar auf das Bestehen der Eulerschen Differentialgleichung

$$-[F]_u = \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} - F_u = 0 \tag{25}$$

oder ausgeschrieben

$$F_{u_x u_x} u_{xx} + 2 F_{u_x u_y} u_{xy} + F_{u_y u_y} u_{yy} + F_{u_x u} u_x + F_{u_y u} u_y + F_{u_x x} + F_{u_y y} - F_u = 0.$$

Aus der Mannigfaltigkeit aller Lösungen dieser Gleichung muß nun

eine gemäß der gestellten Randbedingung bestimmt werden (*Randwertaufgabe*).

Entsprechend erhalten wir ein System von solchen Differentialgleichungen, wenn mehrere unbekannte Funktionen zu bestimmen sind, und eine Differentialgleichung $2n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(26)\qquad \begin{cases} [F]_u = F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{u_{xx}} + \cdots \\ \qquad + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial y^n} F_{u_{y\ldots y}} = 0, \end{cases}$$

wenn die Funktion F die Ableitungen $u_x, u_y, \ldots, u_{yy\ldots y}$ bis zur n^{ten} Ordnung enthält.

Als Beispiel betrachten wir $F = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2)$. Hier ist die Eulersche Gleichung einfach die „*Potentialgleichung*"

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0:$$

damit ist, wie beiläufig erwähnt werde, bewiesen, daß das Poissonsche Integral (10) S. 162 der Gleichung $\Delta u = 0$ genügt, wenn man u als Funktion von x und y betrachtet.

Die Funktion $F = \frac{1}{2}(\Delta u)^2 = \frac{1}{2}u_{xx}^2 + u_{xx}u_{yy} + \frac{1}{2}u_{yy}^2$ liefert die Eulersche Gleichung

$$\Delta\Delta u = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0;$$

dieselbe Eulersche Gleichung erhalten wir für den Integranden $(\Delta u)^2 - c(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)$.

Das Problem der *Minimalflächen*, d. h. der Integrand $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$, führt auf die Eulersche Differentialgleichung

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_{xy}z_x z_y + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0.$$

5. Identisches Verschwinden des Eulerschen Ausdruckes. Es kann der Fall eintreten, daß der Eulersche Differentialausdruck zu einem Integranden $F(x, y, y', \ldots)$ identisch für jede eingesetzte Argumentfunktion, somit identisch in den Parametern $x, y, y', \ldots$ verschwindet. Dies trifft dann und nur dann zu, wenn die Funktion $F(x, y, y', \ldots)$ durch Differentiation einer Funktion $G(x, y, \ldots)$ nach x entsteht (Integrabilitätsbedingung). Der Beweis kann dem Leser überlassen bleiben. Der einfachste Fall ist der des Integranden $F = A + By'$. Hier lautet die Integrabilitätsbedingung einfach $\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0$, eine aus der Integralrechnung wohlbekannte Tatsache.

Ist F eine Funktion von $x, y, u(x, y)$ und den Ableitungen von u, so bedeutet das identische Verschwinden des Eulerschen Ausdruckes in den Argumenten $x, y, u, u_x, u_y, \ldots$, daß F ein sogenannter *Divergenzausdruck* ist, d. h. ein Ausdruck, dessen über die Fläche G erstrecktes Integral

sich in ein Randintegral verwandeln läßt. So ist z. B. der Ausdruck $A_x + B_y$, worin A und B Funktionen von x und y sind, eine Divergenz. Denn es gilt die bekannte Formel

$$\iint_G (A_x + B_y)\, dx\, dy = \int_\Gamma (A\, dy - B\, dx),$$

und ebenso ist $F = u_{xx}\, u_{yy} - u_{xy}^2$ ein Divergenzausdruck, weil die Beziehung

$$F = (u_x\, u_{yy})_x - (u_x\, u_{xy})_y = -(u_y\, u_{xy})_x + (u_y\, u_{xx})_y$$

besteht. Für beide Ausdrücke ist die Eulersche Gleichung identisch erfüllt. Wir halten also fest:

Die Hinzufügung von vollständigen Differentialquotienten oder Divergenzausdrücken unter dem Integralzeichen ändert die Gesamtheit der Extremalen, d. h. der Lösungen der Eulerschen Gleichung nicht. (Vgl. das Beispiel in 4.)

6. Homogene Form der Eulerschen Differentialgleichungen. Bei geometrischen Problemen, wo es sich um die Bestimmung von Kurven oder Flächen durch Minimumforderungen handelt, ist es der Natur der Aufgabe angemessener, wenn man keine der Koordinaten als unabhängige Variable auszeichnet, sondern zu einer Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ der Kurve bzw. $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ der Fläche usw. übergeht, wobei t bzw. u und v die unabhängigen Parameter sind und von den Funktionen x, y, z vorausgesetzt wird, daß nicht gleichzeitig die Gleichungen

$$\dot{x} = \dot{y} = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_u y_v - x_v y_u = y_u z_v - y_v z_u = z_u x_v - z_v y_u = 0$$

bestehen. Dabei ist durch Punkte die Differentiation nach t bezeichnet. Wir betrachten zunächst das einfachste Variationsproblem, welches die Form hat

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt = \text{Min.}, \tag{27}$$

wobei

$$\mathfrak{F} = \dot{x} F\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$$

gesetzt ist. Diese Funktion $\mathfrak{F}$ ist „positiv-homogen" vom Grade 1 in den Ableitungen $\dot{x}, \dot{y}$; sie genügt für alle positiven k der Homogenitätsrelation

$$\mathfrak{F}(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = k\, \mathfrak{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \tag{28}$$

und der daraus durch Differentiation nach k für $k = 1$ folgenden Gleichung

$$\dot{x}\, \mathfrak{F}_{\dot{x}} + \dot{y}\, \mathfrak{F}_{\dot{y}} = \mathfrak{F}. \tag{29}$$

Ist umgekehrt $\mathfrak{F}$ irgendeine positiv-homogene[1]) Funktion ersten Grades in $\dot{x}$ und $\dot{y}$, genügt also F der Gleichung (28), so bestimmt das Variationsproblem $\int \mathfrak{F}\, dt = \text{Min.}$ eine von der Wahl des Parameters τ unabhängige Kurve. Denn wenn durch die Parametertransformation $t = t(\tau)$ das Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_1$ in das Intervall $\tau_0 \leqq \tau \leqq \tau_1$ übergeht, so wird mit Rücksicht auf (28)

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathfrak{F}\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathfrak{F}\left(x, y, \dot{x}\,\frac{dt}{d\tau}, \dot{y}\,\frac{dt}{d\tau}\right) d\tau$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathfrak{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\,\frac{dt}{d\tau}\,d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\,dt\,.$$

Das Variationsproblem ist also gegenüber einer den Durchlaufungssinn nicht ändernden Parametertransformation invariant, die Extremalenkurven hängen von der Wahl des Parameters nicht ab.

Zu dem homogen gemachten Problem gehören nunmehr zwei Eulersche Differentialgleichungen

$$\mathfrak{F}_x - \dot{\mathfrak{F}}_{\dot{x}} = 0\,, \qquad \mathfrak{F}_y - \dot{\mathfrak{F}}_{\dot{y}} = 0\,, \tag{30}$$

die zusammen mit der Relation (29) im wesentlichen mit der ursprünglichen Differentialgleichung (14) äquivalent sein müssen, also nicht unabhängig voneinander sein können. Diese Abhängigkeit erhalten wir, indem wir aus (29) durch weitere Differentiation die folgenden Identitäten herleiten

$$\mathfrak{F}_x = \dot{x}\,\mathfrak{F}_{x\dot{x}} + \dot{y}\,\mathfrak{F}_{x\dot{y}}, \qquad \mathfrak{F}_y = \dot{x}\,\mathfrak{F}_{y\dot{x}} + \dot{y}\,\mathfrak{F}_{y\dot{y}};$$

$$\dot{x}\,\mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{y}\,\mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{y}} = 0\,, \qquad \dot{x}\,\mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{y}} + \dot{y}\,\mathfrak{F}_{\dot{y}\dot{y}} = 0;$$

$$\mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{x}} : \mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{y}} : \mathfrak{F}_{\dot{y}\dot{y}} = \dot{y}^2 : -\dot{x}\,\dot{y} : \dot{x}^2.$$

Den gemeinsamen Wert

$$\frac{\mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = -\frac{\mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{y}}}{\dot{x}\,\dot{y}} = \frac{\mathfrak{F}_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2}$$

pflegt man mit $\mathfrak{F}_1$ zu bezeichnen.

Aus den obigen Identitäten ergibt sich

$$\mathfrak{F}_x - \dot{\mathfrak{F}}_{\dot{x}} = \dot{x}\,\mathfrak{F}_{x\dot{x}} + \dot{y}\,\mathfrak{F}_{x\dot{y}} - \mathfrak{F}_{\dot{x}x}\,\dot{x} - \mathfrak{F}_{\dot{x}y}\,\dot{y} - \mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{x}}\,\ddot{x} - \mathfrak{F}_{\dot{x}\dot{y}}\,\ddot{y}$$

$$= \dot{y}\,[\mathfrak{F}_{x\dot{y}} - \mathfrak{F}_{\dot{x}y} + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\,\mathfrak{F}_1],$$

$$\mathfrak{F}_y - \dot{\mathfrak{F}}_{\dot{y}} = -\dot{x}\,[\mathfrak{F}_{x\dot{y}} - \mathfrak{F}_{\dot{x}y} + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\,\mathfrak{F}_1],$$

[1]) Bei den geometrischen Beispielen ist häufig die Funktion $\mathfrak{F}$ positiv-homogen, nicht aber im vollen Sinne homogen. In diesem Falle müßte nämlich eine Kurve, im entgegengesetzten Sinne durchlaufen, den entgegengesetzten Integralwert ergeben, während z. B. die Bogenlänge, definiert durch $\int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$ mit positiver Quadratwurzel, unabhängig von dem Durchlaufungssinn immer denselben Wert hat.

so daß die beiden Gleichungen (30) durch die Identität

$$\dot{x}\,(\mathfrak{F}_x - \dot{\mathfrak{F}}_{\dot{x}}) + \dot{y}\,(\mathfrak{F}_y - \dot{\mathfrak{F}}_{\dot{y}}) = 0 \tag{31}$$

verbunden sind und z. B. durch die eine

$$\mathfrak{F}_{x\dot{y}} - \mathfrak{F}_{\dot{x}y} + (\dot{x}\,\ddot{y} - \dot{y}\,\ddot{x})\,\mathfrak{F}_1 = 0 \tag{32}$$

ersetzt werden können.

Ganz analog liegt die Sache, wenn es sich um die Bestimmung mehrerer Funktionen einer Variablen handelt. Hier geht das Variationsproblem $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx = \text{Min.}$ über in das Problem $\int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\,dt = \text{Min.}$, mit $\mathfrak{F} = \dot{x}\,F\left(x, y, z, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right)$, und die Funktion $\mathfrak{F}$ ist jetzt positiv-homogen vom Grade 1 in den Variablen $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Der Vorteil, den die homogene Darstellung gewährt, ist nicht nur der formale der Symmetrie. Z. B. entziehen sich Kurven, auf denen x nicht monoton anwächst — etwa geschlossene Kurven — der Darstellung in der Gestalt $y = y(x)$, so daß sie in nicht homogener Darstellung nicht zu behandeln sind.

Bei mehrdimensionalen Variationsproblemen gestaltet sich die homogene Darstellung folgendermaßen. Werden in dem Integral

$$\iint F(x, y, z, z_x, z_y)\,dx\,dy$$

die Variablen x, y und die Funktion z als Funktionen zweier Parameter u, v angesetzt, so daß die Funktionaldeterminante von x und y nach u und v

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = x_u y_v - x_v y_u$$

von Null verschieden ist, so wird

$$z_x = \frac{z_u y_v - z_v y_u}{x_u y_v - x_v y_u}, \qquad z_y = -\frac{z_u x_v - z_v x_u}{x_u y_v - x_v y_u},$$

und das Integral erhält die Gestalt

$$\begin{cases} \iint F(x, y, z, z_x z_y)\,dx\,dy \\ \quad = \iint F\left(x, y, z, -\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} : \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, -\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} : \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right) \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv \\ \quad = \iint \mathfrak{F}\left(x, y, z, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right) du\,dv\,. \end{cases} \tag{33}$$

Hierbei ist der Integrand $\mathfrak{F}$ homogen vom ersten Grade in den letzten drei Argumenten. Die oben im Falle einfacher Integrale abgeleiteten

Relationen, insbesondere die Abhängigkeit (31) und die symmetrische Gestalt (32) der Differentialgleichung lassen sich sinngemäß auf den Fall mehrerer Veränderlichen übertragen. Da wir jedoch später keinen Gebrauch davon zu machen haben, verweisen wir lediglich auf die Literatur [1]).

7. Die Legendresche Bedingung. Wenn wir, wie dies in der Theorie der Differentialgleichungen üblich ist, die Eulerschen Differentialgleichungen der einfachsten Variationsprobleme nach den auftretenden zweiten Ableitungen auflösen wollen, so müssen wir voraussetzen, daß die dabei auftretenden Nenner nicht verschwinden. Beim einfachsten Problem gibt das die Bedingung

$$F_{y'y'} \neq 0, \tag{34}$$

welche man als *Legendresche Bedingung* bezeichnet; beim Problem der Bestimmung mehrerer unbekannter Funktionen $y, z, \ldots, w$ einer Veränderlichen x lautet die Bedingung

$$\begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'z'} & \cdots & F_{y'w'} \\ F_{z'y'} & F_{z'z'} & \cdots & F_{z'w'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{w'y'} & F_{w'z'} & \cdots & F_{w'w'} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{35}$$

Wir werden in einem späteren Kapitel sehen, daß diese Bedingungen als ganz natürlich auftreten, wenn es sich um die Entscheidung handelt, ob eine Extremale wirklich ein Extremum liefert.

§ 4. Bemerkungen und Beispiele zur Integration der Eulerschen Differentialgleichung.

Eine systematische Integrationstheorie der Eulerschen Gleichungen wird uns später im zweiten Bande beschäftigen. Hier sollen lediglich einige Bemerkungen Platz finden, die uns die Integration der oben angeführten einfachsten Beispiele ermöglichen. Wir beschränken uns dabei auf das einfachste Problem $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx = \text{Min.}$

Enthält die Funktion F die Ableitung y' gar nicht, so reduziert sich die Eulersche Gleichung auf $F_y = 0$, eine implizite Definitionsgleichung für die Funktion $y(x)$. (Dieses Resultat ist, wovon der Leser sich selbst überzeugen möge, durch Anwendung des Verfahrens von S. 165 auch direkt leicht zu erhalten.) Zu beachten ist, daß in

[1]) Vgl. *Bolza, O.:* Vorlesungen über Variationsrechnung S. 666—671. Leipzig 1909. *Kobb, G.:* Sur les maxima et minima des intégrales doubles. Acta Math. Bd. 16, S. 65—140. 1892/93.

diesem Falle die Randbedingungen nicht mehr willkürlich vorgeschrieben werden dürfen, wenn das Problem immer eine Lösung haben soll.

Enthält die Funktion F die abhängige Variable y nicht, so folgt sofort $\frac{d}{dx} F_{y'} = 0$, also $F_{y'} = \text{konst.} = c$, und hieraus $y' = \varphi(x, c)$, also $y = \int \varphi(x, c)\, dx$; die Integration der Eulerschen Gleichung ist also durch eine Quadratur möglich.

Enthält die Funktion F die unabhängige Variable x nicht, so gelingt die Integration ebenfalls durch eine Quadratur. Dann ist nämlich

$$(y' F_{y'} - F)' = y'' F_{y'} + y' F_{y'}' - F_{y'} y'' - F_y y' = y' (F_{y'}' - F_y) = 0,$$

mithin folgt aus der Eulerschen Gleichung sofort

$$F(y, y') - y' F_{y'}(y, y') = c,$$

woraus sich y' als Funktion $\varphi(y, c)$ von y und c berechnet und $x = \int \frac{dy}{\varphi(y, c)}$ ergibt.

Man kann dieses Resultat, wenigstens in formaler Hinsicht, auch durch Zurückführung auf den vorigen Fall erhalten, indem man beachtet, daß die Extremalkurve auch dann noch die erste Variation des Integrals zum Verschwinden bringt, wenn man y als unabhängige und x als abhängige Variable ansieht. Bezeichnet man die Ableitung nach y durch einen Punkt, so erhält man das Variationsproblem, $\int F\left(y, \frac{1}{\dot{x}}\right) \dot{x}\, dy$ zum Extremum zu machen, in dem nunmehr die abhängige Variable nicht vorkommt.

Von unseren Beispielen (§ 1, 3, vgl. S. 151 ff. und S. 167) lassen sich die folgenden nach den hier gemachten Bemerkungen integrieren:

Beispiel b) mit $\psi = \frac{1}{\sqrt{y}}$, d. h. $F = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}$;

$$y' F_{y'} - F = \frac{-1}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} = \text{konst.} = \frac{1}{c}.$$

Setzt man $y = \frac{c^2}{2}(1 - \cos t)$, so wird $y' = \sqrt{\frac{(c^2 - y)}{y}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$,

$$x = \int \frac{dy}{y'} = \int \operatorname{tg} \frac{t}{2} \frac{dy}{dt}\, dt = c^2 \int \sin^2 \frac{t}{2}\, dt = c_1 + \frac{c^2}{2}(t - \sin t).$$

Die Brachistochronen sind also die Zykloiden, die ein Punkt auf dem Umfang eines Kreises mit dem Radius $\frac{c^2}{2}$ beschreibt, wenn dieser auf der x-Achse rollt.

c) $$F = y\sqrt{1 + y'^2}; \quad y' F_{y'} - F = \frac{-y}{\sqrt{1 + y'^2}} = -\frac{1}{c},$$

$$y = \frac{1}{c} \mathfrak{Cof}(cx + c_1).$$

Die Rotationsfläche, die zwei gegebene Kreise verbindet, muß durch Drehung einer Kettenlinie um ihre Achse entstehen, wenn sie möglichst kleinen Flächeninhalt haben soll.

d) $$F = y\sqrt{1-\dot{y}^2}; \quad \dot{y}F_{\dot{y}} - F = \frac{-y}{\sqrt{1-\dot{y}^2}} = -\frac{1}{c},$$

$$y = \frac{1}{c}\sin(cs + c_1).$$

Die andere Koordinate x wird

$$x = \int\sqrt{1-\dot{y}^2}\,ds = \int\sin(cs+c_1)\,ds = -\frac{1}{c}\cos(cs+c_1) + c_2;$$

die Lösung des isoperimetrischen Problems kann also nur ein Kreis sein.

§ 5. Randbedingungen.

In den vorangehenden Überlegungen sind wir stets von der Voraussetzung ausgegangen, daß am Rande des Integrationsbereiches die zu bestimmenden Funktionen vorgeschriebene Werte annehmen. Bei zahlreichen in den Anwendungen auftretenden Fragen bestehen jedoch für die Randwerte gar keine oder andersartige Bedingungen. *Wenn bei der Bestimmung von Funktionen in einem festen Grundgebiet diesen keine Randbedingungen auferlegt sind, so sprechen wir von freien Rändern.* Neben solchen freien Rändern kommen bei geometrischen Problemen, d. h. bei der Bestimmung von Kurven oder Flächen solche Aufgaben vor, wo die gesuchte Kurve auf vorgeschriebenen Kurven oder Flächen beginnen oder endigen oder wo der Rand des gesuchten Flächenstückes auf einer gegebenen Fläche liegen soll. Hier würde also das Integrationsgebiet der unabhängigen Variablen beim Variationsproblem nicht fest gegeben sein, sondern mit bestimmt werden müssen. Alle diese Fragen lassen sich durch eine leichte Verallgemeinerung der früheren Ergebnisse behandeln, wenn man den Ausdruck für die erste Variation δJ des Integrals J den erweiterten Voraussetzungen anpaßt.

1. Allgemeiner Ausdruck für die erste Variation eines Integrals. Beim einfachsten Variationsproblem $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx = \text{Min.}$ können wir den allgemeinen Ausdruck der ersten Variation auf Grund der Überlegungen von § 3 unmittelbar in der Form

(36)
$$\begin{cases} \delta J = \varepsilon F_{y'}\eta\Big|_{x_0}^{x_1} + \varepsilon\int_{x_0}^{x_1}[F]_y\,\eta\,dx \\ \qquad = F_{y'}\,\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}[F]_y\,\delta y\,dx \end{cases}$$

hinschreiben, wobei wir $\varepsilon\eta(x) = \delta y$ setzen und zur Abkürzung wieder $[F]_y$ für die linke Seite der Eulerschen Differentialgleichung benutzen. Ebenso ergibt sich bei mehreren gesuchten Funktionen, d. h. beim Problem $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, \ldots, y', z', \ldots)\, dx = \text{Min.}$

$$
(37)\qquad
\begin{cases}
\delta J = \varepsilon_1 F_{y'}\eta\Big|_{x_0}^{x_1} + \varepsilon_2 F_{z'}\zeta\Big|_{x_0}^{x_1} + \cdots \\
\quad + \varepsilon_1\int_{x_0}^{x_1}[F]_y\eta\, dx + \varepsilon_2\int_{x_0}^{x_1}[F]_z\zeta\, dx + \cdots \\
\quad = F_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} + F_{z'}\delta z\Big|_{x_0}^{x_1} + \cdots \\
\quad + \int_{x_0}^{x_1}[F]_y\delta y\, dx + \int_{x_0}^{x_1}[F]_z\delta z\, dx + \cdots .
\end{cases}
$$

Im Falle eines Doppelintegrals hatten wir die Variation schon in der allgemeinen Form

$$
(38)\qquad
\begin{cases}
\delta J = \varepsilon\iint_G \eta\left\{F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right\} dx\, dy \\
\qquad\qquad + \varepsilon\int_\Gamma \eta\left\{F_{u_x}\frac{dy}{ds} - F_{u_y}\frac{dx}{ds}\right\} ds \\
\quad = \iint_G [F]_u\,\delta u\, dx\, dy + \int_\Gamma\left\{F_{u_x}\frac{dy}{ds} - F_{u_y}\frac{dx}{ds}\right\}\delta u\, ds
\end{cases}
$$

hingeschrieben, wobei $\delta u = \varepsilon\eta$ gesetzt ist. Genau ebenso würde bei mehreren gesuchten Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$, ... der Ausdruck

$$
(39)\qquad
\begin{cases}
\delta J = \varepsilon_1\iint_G \eta_1\left\{F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right\} dx\, dy + \\
\quad + \varepsilon_2\iint_G \eta_2\left\{F_v - \frac{\partial}{\partial x}F_{v_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{v_y}\right\} dx\, dy + \cdots \\
\quad + \varepsilon_1\int_\Gamma \eta_1\left\{F_{u_x}\frac{dy}{ds} - F_{u_y}\frac{dx}{ds}\right\} ds \\
\quad + \varepsilon_2\int_\Gamma \eta_2\left\{F_{v_x}\frac{dy}{ds} - F_{v_y}\frac{dx}{ds}\right\} ds + \cdots
\end{cases}
$$

entstehen. Hier bedeutet im Randintegral s die Bogenlänge der Randkurve oder der Randkurven, und das Integral ist wie oben im positiven Sinne um den Bereich herum zu erstrecken.

Ähnliche Ausdrücke für die Variation erhalten wir bei etwas allgemeineren Variationsproblemen, wo die Randwerte im Variationsproblem explizit auftreten. Beispiele von typischer Wichtigkeit sind folgende:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx - \varphi(y_0) + \psi(y_1) = \text{Min.} \tag{40}$$

oder

$$J = \iint_G F(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy + \int_\Gamma \Phi(s, u, u_s)\, ds = \text{Min.} \tag{41}$$

Die Variation wird dann

$$\begin{cases} \delta J = \int_{x_0}^{x_1} [F]_y\, \delta y\, dx + [\psi'(y_1) + F_{y'}(x, y(x_1), y'(x_1))]\, \delta y_1 - \\ \qquad - [\varphi'(y_0) + F_{y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0))]\, \delta y_0 \end{cases} \tag{42}$$

bzw.

$$\delta J = \iint_G [F]_u\, \delta u\, dx\, dy + \int_\Gamma \left(F_{u_x}\frac{dy}{ds} - F_{u_y}\frac{dx}{ds} + [\Phi]_u\right) \delta u\, ds \tag{43}$$

mit

$$[\Phi]_u = \Phi_u - \frac{d}{ds}\Phi_{u_s}.$$

In dem Sonderfall

$$J = \iint_G (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy + \int_\Gamma \sigma u^2\, ds \tag{44}$$

bei stetiger Randfunktion $\sigma(s)$ lautet der Ausdruck für die Variation

$$\delta J = \varepsilon\left[-2\iint_G \eta(u_{xx} + u_{yy})\, dx\, dy + 2\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\eta\, ds\right], \tag{45}$$

wobei $\frac{\partial}{\partial n}$ die Differentiation nach der äußeren Normalen bedeutet. Für das etwas allgemeinere Integral

$$J = \iint_G (p(u_x^2 + u_y^2) - q u^2)\, dx\, dy + \int_\Gamma p\sigma u^2\, ds, \tag{44'}$$

in dem $p(x, y)$ eine nebst ihren ersten Ableitungen in G stetige, $q(x, y)$ eine in G stetige und $\sigma(s)$ eine auf Γ stetige Funktion bedeutet, wird in ähnlicher Weise

$$\delta J = \varepsilon\left[-2\iint_G \eta((p u_x)_x + (p u_y)_y + q u)\, dx\, dy + 2\int_\Gamma p\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\eta\, ds\right] \tag{45'}$$

2. Freie Ränder, natürliche Randbedingungen und Transversalität. Aus diesen Ausdrücken erhalten wir ohne Schwierigkeiten die gesuchten Bedingungen für das Eintreten eines Extremums bzw. für den stationären Charakter des Integrals, d. h. für das Verschwinden

der ersten Variation. Zunächst ist selbstverständlich, daß auch in den Fällen nicht fester Randwerte die Eulerschen Gleichungen $[F]_y = 0$ bzw. $[F]_y = 0$, $[F]_z = 0$, ... erfüllt sein müssen. Denn gewiß muß unser Extremum bzw. der stationäre Charakter erst recht bestehen bleiben, wenn zum Vergleich nur die engere Klasse derjenigen Funktionen herangezogen wird, die am Rande mit der betrachteten Extremalen übereinstimmen, für die also am Rande $\eta = 0$ bzw. $\eta = 0$, $\zeta = 0$, ... ist. In den Gleichungen $\delta J = 0$ haben wir also nur noch die auf den Rand bezüglichen Bestandteile zu berücksichtigen, da die anderen für jede Variation identisch verschwinden. Sind insbesondere am Rande des festen Integrationsgebietes keinerlei Bedingungen für die Funktionen $y, z, u, \ldots$ vorgeschrieben, so ergeben sich wegen der Willkürlichkeit der Randwerte von $\eta, \zeta, \ldots$ sofort die *natürlichen Randbedingungen*

$$F_{y'}(x_0) = F_{y'}(x_1) = 0;$$

$$F_{y'}(x_0) = F_{y'}(x_1) = 0, \qquad F_{z'}(x_0) = F_{z'}(x_1) = 0, \ldots;$$

$$F_{y'} + \varphi'(y)\big|_{x_0} = 0, \qquad F_{y'} + \psi'(y)\big|_{x_1} = 0\ ^{1});$$

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds} - F_{u_y}\frac{dx}{ds} = 0;$$

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds} - F_{u_y}\frac{dx}{ds} = 0, \qquad F_{v_x}\frac{dy}{ds} - F_{v_y}\frac{dx}{ds} = 0, \ldots;$$

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds} - F_{u_y}\frac{dx}{ds} + \Phi_u - \frac{d}{ds}\Phi_{u_s} = 0;$$

$$u_x\frac{dy}{ds} - u_y\frac{dx}{ds} + \sigma u = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0,$$

welche der Reihe nach zu den Problemen

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx = \text{Min.}; \qquad \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, \ldots, y', z', \ldots)\,dx = \text{Min.}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx - \varphi(y_0) + \psi(y_1) = \text{Min.},$$

$$\iint_G F(x, y, u, u_x, u_y)\,dx\,dy = \text{Min.},$$

$$\iint_G F(x, y, u, u_x, u_y, v, v_x, v_y, \ldots)\,dx\,dy = \text{Min.},$$

$$\iint_G F(x, y, u, u_x, u_y)\,dx\,dy + \int_\Gamma \Phi(s, u, u_s)\,ds = \text{Min.},$$

$$\iint_G (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy + \int_\Gamma \sigma u^2\,ds = \text{Min.}$$

gehören.

[1]) Durch die Bezeichnung $|_{x_0}$ deuten wir an, daß in dem ganzen vorherstehenden Ausdruck $x = x_0$ zu setzen ist.

Setzen wir in (40) und (42) speziell

$$\varphi(y_0) = l(y_0 - a)^2, \qquad \psi(y_1) = l(y_1 - b)^2,$$

so lauten die natürlichen Randbedingungen

$$\frac{1}{2l} F_{y'}|_{x_0} + y_0 - a = 0, \qquad \frac{1}{2l} F_{y'}|_{x_1} + y_1 - b = 0.$$

Der Grenzübergang $l \to \infty$ ergibt die Bedingung der festen Randwerte

$$y_0 = a, \qquad y_1 = b,$$

so daß das einfachste Variationsproblem mit festen Endpunkten der Extremalen als Grenzfall eines Problems mit freien Rändern erscheint.

Allgemein haben wir in der Hinzufügung von Randgliedern bzw. Randintegralen ein Mittel, unter Aufrechterhaltung der Eulerschen Differentialgleichung die natürlichen Randbedingungen weitgehend zu beeinflussen. Auf diese für weitergehende Untersuchungen wichtige Bemerkung werden wir später, insbesondere auch im zweiten Bande, ausführlich zurückkommen.

Zur Behandlung der geometrischen Probleme, bei denen z. B. die Endpunkte der gesuchten Kurve auf gegebenen Kurven oder Flächen beweglich sind[1]), wo also der Rand des Integrationsgebietes, allgemein zu reden, nicht fest gegeben ist, eignet sich am besten die Parameterdarstellung. Wir leiten hier die Randbedingungen für das Eintreten eines Extremums ab, wenn die zu bestimmende Kurve $y(x)$ in der Ebene auf einer gegebenen Kurve $T(x, y) = 0$ beginnen soll, während der Endpunkt fest ist. Indem wir in dem zum Extremum zu machenden Integrale $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$, wo die untere Grenze x_0 noch frei ist, eine Parameterdarstellung $x = x(t), y = y(t)$ durch den zwischen festen Grenzen $t_0 \leqq t \leqq t_1$ laufenden Parameter t einführen, wodurch die Unbequemlichkeit des veränderlichen Integrationsbereiches beseitigt ist, erhalten wir $J = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt$, $\mathfrak{F} = \dot{x} F\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$ mit der Anfangsbedingung $T(x(t_0), y(t_0)) = 0$. Wir führen zwei für $t = t_1$

---

[1]) Die soeben behandelten „freien" Ränder ordnen sich natürlich hier als Spezialfall unter. So läßt sich z. B. die Aufgabe:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx = \text{Min.},$$

wobei die Werte $y(x_0)$ und $y(x_1)$ beliebig sein dürfen, auch so aussprechen: Es soll eine Kurve gefunden werden, deren beide Endpunkte auf den vertikalen Geraden $x = x_0$ bzw. $x = x_1$ liegen und die dem Integral einen möglichst kleinen Wert erteilt.

verschwindende, sonst willkürliche Funktionen $\xi(t)$, $\eta(t)$ und zwei Parameter ε_1, ε_2 ein, welche der Bedingung

$$\Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = T(x(t_0) + \varepsilon_1 \xi(t_0),\ y(t_0) + \varepsilon_2 \eta(t_0)) = 0$$

genügen sollen, und formulieren die Extremaleigenschaft unserer Kurve dahin, daß die Funktion

$$\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{F}(x + \varepsilon_1 \xi,\ y + \varepsilon_2 \eta,\ \dot{x} + \varepsilon_1 \dot{\xi},\ \dot{y} + \varepsilon_2 \dot{\eta})\, dt$$

für $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$ stationär ist, wenn ε_1, ε_2 der Bedingung $\Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$ genügen. Die Theorie der gewöhnlichen Extrema lehrt die Existenz von zwei Konstanten λ_0, λ derart, daß

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1}(\lambda \Psi + \lambda_0 \Phi)\Big|_{\substack{\varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_2 = 0}} = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2}(\lambda \Psi + \lambda_0 \Phi)\Big|_{\substack{\varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_2 = 0}} = 0$$

gilt. Wir dürfen die Konstante λ_0 gleich 1 nehmen, da sonst $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ für $t = t_0$ sein müßte, der Punkt $t = t_0$ also ein singulärer Punkt der Kurve $T = 0$ wäre, was wir ausschließen wollen. Da die Funktionen $\xi(t)$, $\eta(t)$ der Eulerschen Differentialgleichung genügen müssen, erhalten wir auf Grund unserer Ausdrücke für die erste Variation das Bestehen der Gleichungen

$$\xi(\mathfrak{F}_{\dot{x}} + \lambda T_x) = 0\,, \qquad \eta(\mathfrak{F}_{\dot{y}} + \lambda T_y) = 0$$

an der Stelle $t = t_0$, woraus durch Elimination von λ die *Transversalitätsbedingung*

$$\mathfrak{F}_{\dot{x}} T_y - \mathfrak{F}_{\dot{y}} T_x = 0 \tag{46}$$

folgt. Eine entsprechende Bedingung muß natürlich auch am Endpunkt gelten, wenn auch dieser auf einer Kurve variabel ist.

Die Transversalitätsbedingung ist eine wechselseitige Beziehung zwischen der Richtung der zu bestimmenden Extremalen und der Richtung der Ausgangskurve. Sie ist linear in T_x und T_y, bestimmt also bei vorgegebener Extremalenrichtung die Richtung der Ausgangskurve eindeutig aus der der Extremalen (das Umgekehrte braucht aber nicht stattzufinden). *Zu jeder vorgegebenen Ausgangskurve kann man sich eine einparametrige Schar von transversalen Extremalen konstruieren, indem man durch jeden Punkt der Kurve eine in transversaler Richtung ausgehende Lösungskurve der Eulerschen Differentialgleichung zieht.*

Indem wir wieder zur unhomogenen Darstellung $y = f(x)$ der Kurve zurückkehren, erhalten wir wegen

$$\mathfrak{F}_{\dot{x}} = F - \frac{\dot{y}}{\dot{x}} F_{y'} = F - y' F_{y'}\,, \qquad \mathfrak{F}_{\dot{y}} = F_{y'} \tag{47}$$

die Transversalitätsbedingung in der Form

$$(F - y' F_{y'}) T_y + F_{y'} T_x = 0 \tag{48}$$

oder, wenn die Ausgangskurve in der Gestalt $y = g(x)$ gegeben ist

$$F + (g' - y') F_{y'} = 0 .$$

Hier muß betont werden, daß diese Formulierung versagt, sobald die Ausgangskurve an der betrachteten Stelle eine zur y-Achse parallele Tangente hat; in diesem Falle tritt die natürliche Randbedingung $F_{y'} = 0$ in Kraft.

Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse bei der Bestimmung einer Raumkurve $y = y(x)$, $z = z(x)$, welche auf einer gegebenen Fläche $T(x, y, z) = 0$ anfangen, durch einen gegebenen Endpunkt x_1, y_1, z_1 gehen und ein Integral $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\, dx$ stationär machen soll. Genau wie oben erhalten wir, wenn wir Parameterdarstellung einführen und $F\left(x, y, z, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right)\dot{x} = \mathfrak{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ setzen, als Transversalitätsbedingung die beiden Gleichungen

$$T_x : T_y : T_z = \mathfrak{F}_{\dot{x}} : \mathfrak{F}_{\dot{y}} : \mathfrak{F}_{\dot{z}} \tag{49}$$

oder in unhomogener Schreibweise die Bedingungen

$$T_x : T_y : T_z = F - y' F_{y'} - z' F_{z'} : F_{y'} : F_{z'} . \tag{50}$$

Auch diese Bedingungen ordnen jedem Punkt der Ausgangsfläche $T = 0$ eine oder mehrere transversale Richtungen zu, der Fläche also eine zweiparametrige Extremalenschar. Dagegen gehört zu jeder Extremalenrichtung genau eine transversale Flächenrichtung.

Selbstverständlich gelten am Endpunkt der Kurve dieselben Transversalitätsbedingungen, wenn auch der Endpunkt auf einer Fläche beweglich ist.

Im Falle der geodätischen Linien auf einer Fläche oder der kürzesten Linien im Raume decken sich die Begriffe transversal und orthogonal. Für $F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$ z. B. lautet die Transversalitätsbedingung $T_x : T_y : T_z = 1 : y' : z'$. Für $F = \sqrt{e + 2fy' + gy'^2}$ erhalten wir

$$T_x : T_y = e + fy' : f + gy' ;$$

dies ist aber die Bedingung für senkrechtes Schneiden.

Ziehen wir also auf einer Fläche von einem Punkte P aus das Büschel der geodätischen Linien, so wird dieses Büschel von den orthogonalen

Trajektorien transversal geschnitten. Die Länge der geodätischen Linie vom Punkte P bis zum Schnittpunkte Q mit einer solchen Trajektorie ist in jeder Lage als Funktion des Punktes Q stationär. Daraus folgt, daß diese Länge konstant ist und daß die Trajektorien, die sogenannten geodätischen Kreise, geschlossene Linien sind.

Der Zusammenhang zwischen Extremalen und Transversalen wird uns später im zweiten Bande noch näher beschäftigen. Hier sei nur vorläufig darauf hingewiesen, daß im Falle der Lichtausbreitung die *Transversalen* nichts anderes sind als die *Wellenfronten der in den Strahlen* (Extremalen) *sich ausbreitenden Lichtwelle.* Dabei verstehen wir unter einer Transversalen immer eine zu einer Extremalenschar überall transversale Kurve bzw. Fläche. *Wenn Transversalität und Orthogonalität Verschiedenes bedeuten, so heißt dies, daß Wellennormale und Strahlenrichtung nicht zusammenfallen.*

§ 6. Variationsprobleme mit Nebenbedingungen.

Während bei den bisher behandelten Problemen die Argumentfunktionen, abgesehen von etwa gestellten Randbedingungen, frei wählbar waren und sodann die Lösung des Variationsproblems durch die Eulerschen Differentialgleichungen mit den gegebenen oder den natürlichen Randbedingungen festzulegen war, werden in den nunmehr zu betrachtenden Aufgaben die Argumentfunktionen außer den Randbedingungen noch Nebenbedingungen anderer Art unterworfen sein, die sich auf den gesamten Verlauf der Argumentfunktionen beziehen und durch welche die Eulersche Differentialgleichung selbst eine wesentliche Modifikation erleidet.

1. Isoperimetrische Probleme. Der einfachste Typus solcher Aufgaben wird durch das isoperimetrische Problem dargestellt, welches wir, wie in § 1, 3d, allgemein so formulieren: Es soll das Integral $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$ stationär gemacht werden, während die Funktion y außer den Randbedingungen noch einer Nebenbedingung

$$K = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\, dx = c \tag{51}$$

unterworfen ist.

Zur Lösung dieses Problems schlagen wir folgenden Weg ein: Wir nehmen etwa an, die Randwerte $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ seien gegeben und $y = y(x)$ sei die gesuchte Extremale. Wir betrachten die folgende Schar von Nachbarkurven: $y + \delta y = y(x) + \varepsilon_1 \eta(x) + \varepsilon_2 \zeta(x)$, wobei ε_1 und ε_2 Parameter sind und $\eta(x)$ und $\zeta(x)$ den Bedingungen

$\eta(x_0) = \eta(x_1) = \zeta(x_0) = \zeta(x_1) = 0$ genügende, sonst aber willkürliche Funktionen bedeuten. Nunmehr folgt, daß die Funktion

$$\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon_1\eta + \varepsilon_2\zeta, y' + \varepsilon_1\eta' + \varepsilon_2\zeta')\, dx$$

stationär sein muß für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ im Vergleich mit allen hinreichend kleinen Werten ε_1 und ε_2, für welche

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, y + \varepsilon_1\eta + \varepsilon_2\zeta, y' + \varepsilon_1\eta' + \varepsilon_2\zeta')\, dx = c$$

wird. Nach den in § 1 zitierten Sätzen über gewöhnliche Maxima und Minima muß es also zwei Konstante λ_0 und λ geben, derart, daß

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1}\left[\lambda_0 \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon_1\eta + \varepsilon_2\zeta, y' + \varepsilon_1\eta' + \varepsilon_2\zeta')\, dx + \right.$$
$$\left. + \lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x, y + \varepsilon_1\eta + \varepsilon_2\zeta, y' + \varepsilon_1\eta' + \varepsilon_2\zeta')\, dx\right]\Bigg|_{\substack{\varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_2 = 0}} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2}\left[\lambda_0 \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon_1\eta + \varepsilon_2\zeta, y' + \varepsilon_1\eta' + \varepsilon_2\zeta')\, dx + \right.$$
$$\left. + \lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x, y + \varepsilon_1\eta + \varepsilon_2\zeta, y' + \varepsilon_1\eta' + \varepsilon_2\zeta')\, dx\right]\Bigg|_{\substack{\varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_2 = 0}} = 0$$

wird, und zwar können wir sicherlich dann $\lambda_0 = 1$ wählen, wenn nicht

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1}\int_{x_0}^{x_1} G\, dx\Bigg|_{\substack{\varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_2 = 0}} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2}\int_{x_0}^{x_1} G\, dx\Bigg|_{\substack{\varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_2 = 0}} = 0$$

ist. Setzen wir zur Abkürzung $\lambda_0 F + \lambda G = F^*$, so lauten unsere Bedingungen für die Funktion $y(x)$ kurz geschrieben

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1}\int_{x_0}^{x_1} F^*(x, y + \varepsilon_1\eta + \varepsilon_2\zeta, y' + \varepsilon_1\eta' + \varepsilon_2\zeta')\, dx\Bigg|_{\substack{\varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_2 = 0}} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2}\int_{x_0}^{x_1} F^*(x, y + \varepsilon_1\eta + \varepsilon_2\zeta, y' + \varepsilon_1\eta' + \varepsilon_2\zeta')\, dx\Bigg|_{\substack{\varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_2 = 0}} = 0,$$

woraus wegen der Willkür von η und ζ folgt

$$(F^*_{y'})' - F^*_y = 0.$$

Falls $\lambda_0 = 0$ ist, ergibt sich die Gleichung

$$(G_{y'})' - G_y = 0; \tag{52}$$

ist dagegen $\lambda_0 \neq 0$, so daß wir $\lambda_0 = 1$ annehmen können, dann folgt das Bestehen der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial (F + \lambda G)}{\partial y'} - \frac{\partial (F + \lambda G)}{\partial y} = 0 . \tag{53}$$

Wir haben also das Resultat, daß für die Extremale notwendig mit einer geeigneten Konstanten λ die Gleichung (53) *erfüllt sein muß, es sei denn, daß die Gleichung* (52) *besteht. In diesem letzten Ausnahmefall muß eine besondere Untersuchung eintreten.*

Im allgemeinen Integral der Differentialgleichung (53) tritt außer den beiden Integrationskonstanten der Parameter λ auf. Diese drei Parameter sind aus den Randbedingungen und der Gleichung $K = c$ zu bestimmen.

Das einfachste Beispiel bietet das gewöhnliche isoperimetrische Problem, wobei $F = \sqrt{1 + y'^2}$, $G = y$ ist. Man findet sofort

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\sqrt{1 + y'^2} + \lambda y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{1 + y'^2} + \lambda y\right) = 0$$

oder

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \lambda ,$$

woraus sich als Lösung Kreise ergeben.

Ein weiteres Beispiel ist die Bestimmung der *Gleichgewichtslage* eines schweren, homogenen, in seinen Endpunkten aufgehängten *Fadens*. Hier wird $F = y\sqrt{1 + y'^2}$, $G = \sqrt{1 + y'^2}$, und wir erhalten, indem wir uns an die Integration der Eulerschen Differentialgleichung im Falle $F_x = 0$ erinnern (vgl. S. 178),

$$F^* - y' F^*_{y'} = (y + \lambda)\left(\sqrt{1 + y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = \frac{y + \lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = c ,$$

$$y + \lambda = c \operatorname{Cof}\left(\frac{x}{c} + c_1\right) ;$$

die gesuchte Kurve ist also eine *Kettenlinie.*

Zur Erläuterung des Ausnahmefalles betrachten wir etwa die Nebenbedingungen $\int_0^1 \sqrt{1 + y'^2}\, dx = 1$, während $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ ist. Hier gibt es offenbar nur die einzige vergleichsfähige Kurve $y = 0$, welche auch wirklich der Differentialgleichung (52) genügt. Was auch immer F sei, die Lösung kann keine andere als $y = 0$ sein[1]).

2. Endliche Bedingungsgleichungen. Der nächst einfache Typus von Variationsproblemen mit Nebenbedingungen ist: Ein Integral

[1]) Über den Ausnahmefall vgl. *Caratheodory, C.:* Über die diskontinuierlichen Lösungen in der Variationsrechnung. Dissertation Göttingen 1904, S. 45ff.

$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\, dx$ stationär zu machen, während die zu bestimmenden Funktionen $y(x)$, $z(x)$ außer an die Randbedingungen $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, $z(x_0) = z_0$, $z(x_1) = z_1$ noch an eine Nebenbedingung der Form

$$G(x, y, z) = 0 \tag{54}$$

geknüpft sind. Geometrisch gesprochen soll eine auf einer gegebenen Fläche gelegene Raumkurve $y(x)$, $z(x)$ durch die Extremumforderung festgelegt werden[1]).

Zur Aufstellung der notwendigen Bedingungen für die Funktionen $y(x)$, $z(x)$ ist der naturgemäße Weg, die Gleichung $G = 0$ nach einer der Funktionen, etwa $z(x)$, aufzulösen und so das Problem auf das der Bestimmung einer unabhängigen Funktion $y(x)$ zurückzuführen. Diese Auflösung $z = g(x, y)$ ist nach elementaren Sätzen der Analysis sicher möglich, wenn für die betreffende Extremale $\frac{\partial G}{\partial z} \neq 0$ gilt. Wir können z' als Funktion von x, y und y' ansehen und also aus $F(x, y, z, y', z')$ eliminieren, indem wir die Relation $G_x + y' G_y + z' G_z = 0$ oder $z' = \frac{\partial g}{\partial y} y' + \frac{\partial g}{\partial x}$ beachten. Dann wird

$$F(x, y, z, y', z') = F\left(x, y, g(x, y), y', \frac{\partial g}{\partial x} + y' \frac{\partial g}{\partial y}\right),$$

und y muß der Eulerschen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'} + F_{z'} \frac{\partial g}{\partial y}\right) - \left[F_y + F_z \frac{\partial g}{\partial y} + F_{z'}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x\, \partial y} + y' \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)\right] = 0$$

genügen, welche nach einfacher Umformung die Gestalt

$$(F'_{y'} - F_y) + (F'_{z'} - F_z) \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

annimmt. Da andererseits auch

$$G_y + G_z \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

ist, so muß die Proportion

$$F'_{y'} - F_y : F'_{z'} - F_z = G_y : G_z$$

bestehen. Also ist entweder längs der Extremalen identisch $G_y = G_z = 0$ (was der oben gemachten Voraussetzung widerspricht), oder es gibt einen Proportionalitätsfaktor $\lambda = \lambda(x)$, für den

$$F'_{y'} - F_y - \lambda G_y = 0, \qquad F'_{z'} - F_z - \lambda G_z = 0 \tag{55}$$

[1]) Man beachte, daß in der geometrischen Darstellung die Koordinate x bevorzugt ist, so daß nicht alle auf der Fläche $G = 0$ liegenden Kurven gleichberechtigt erscheinen.

wird. Setzen wir $F^* = F - \lambda G$, so kann man das Resultat in der Form der auf F^* bezüglichen Eulerschen Gleichungen schreiben

$$-[F^*]_y = F^{*\prime}_{y'} - F^*_y = 0\,, \qquad -[F^*]_z = F^{*\prime}_{z'} - F^*_z = 0\,.$$

Notwendige Bedingungen für das Extremum sind also diese Gleichungen, es sei denn, daß für die Extremale gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$G_y = 0\,, \qquad G_z = 0$$

bestehen, aus denen wegen der Relation $G_x + y' G_y + z' G_z = 0$ *die dritte* $G_x = 0$ *folgt.*

Der letztgenannte Ausnahmefall hat eine anschauliche Bedeutung. Die Gleichungen bedeuten nämlich eine notwendige Bedingung dafür, daß die Kurve auf der Fläche eine *Rinne* oder *Kante* definiert, *in welcher die Tangentialebene nicht mehr eindeutig definiert ist.* In der Mechanik bedeuten die Lösungskurven des Variationsproblems Bahnkurven von Punkten usw. Es ist plausibel, daß ein Punkt, der in eine solche Rinne gerät, dort bleiben kann, statt eine nach den sonstigen Gesetzen der Mechanik natürliche Bahn einzuschlagen.

Die Faktoren λ, die wir hier und im vorigen Beispiel eingeführt haben, nennt man auch hier wie bei den analogen Überlegungen der Differentialrechnung *Eulersche oder Lagrangesche Multiplikatoren. Bei beiden Aufgabentypen liegt formal die Sachlage gleichartig, indem nämlich mit dem Multiplikator* λ *der Ausdruck* $F + \lambda G = F^*$ *gebildet und die Eulerschen Gleichungen für diesen Ausdruck aufgestellt werden. Der Unterschied ist nur der, daß im ersten Falle* λ *eine Konstante, im zweiten Falle* λ *eine Funktion* $\lambda(x)$ *von* x *ist. Die Eulerschen Gleichungen zusammen mit der Nebenbedingung und den Randbedingungen ergeben gerade die richtige Anzahl von Bedingungen zur Festlegung der Extremalen.*

Das einfachste Beispiel für den zuletzt behandelten Fall von Nebenbedingungen liefert die Bestimmung der *geodätischen Linien auf einer gegebenen Fläche* $G(x, y, z) = 0$. Hier ist $F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$, und wir erhalten zur Bestimmung der geodätischen Linien, wenn wir diese in Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ gegeben denken,

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} : \frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} : \frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = G_x : G_y : G_z$$

oder

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} - \lambda G_x = 0\,,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} - \lambda G_y = 0\,,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} - \lambda G_z = 0\,,$$

drei Gleichungen, die zusammen mit der vierten $G = 0$ die geodätischen Linien und den Multiplikator $\lambda(x)$ bestimmen. Diese Darstellung der geodätischen Linien hat vor der früheren den Vorzug, die geometrischen Haupteigenschaften der Linien unmittelbarer hervortreten zu lassen, nämlich z. B. die Tatsache, daß die Schmiegungsebene der geodätischen Linie durch die Flächennormale geht. Der Beweis kann dem Leser überlassen bleiben.

3. Allgemeine Nebenbedingungen. Während bei dem eben behandelten Problemtypus der Multiplikator λ eigentlich nur einen formal eleganten Kunstgriff bedeutete, wird er auch für das Wesen der Sache unentbehrlich, wenn man allgemeinere Nebenbedingungen der Form

$$G(x, y, z, y', z') = 0 \tag{56}$$

heranzieht, wobei der Ausdruck $G(x, y, z, y', z')$ nicht durch Differentiation eines Ausdrucks $H(x, y, z)$ nach x entsteht, d. h. *ein nicht integrabler Differentialausdruck ist.* Man nennt solche Nebenbedingungen auch *„nicht holonome" Bedingungen.* Ein einfaches Beispiel einer solchen Bedingung ist $y' - z = 0$. Wäre diese Bedingung holonom, d. h. äquivalent mit einer endlichen Bedingung $H(x, y, z) =$ konst., so könnten die Werte von x, y und z nicht überall unabhängig voneinander gewählt werden, während man doch aber offensichtlich zu jedem vorgegebenen Wertsystem x, y, z noch das y' gemäß der Bedingung $y' - z = 0$ wählen kann. Nicht holonome Bedingungen treten in der Mechanik dann auf, wenn in die Bedingungsgleichungen außer den Ortskoordinaten noch die Richtungen der Bewegung eingehen, z. B. bei der Bewegung eines Schiffes, eines Schlittschuhes oder beim Rollen einer Kugel.

Die früher behandelten Probleme mit Nebenbedingungen lassen sich als Spezialfälle unseres jetzigen allgemeinen Problems auffassen. Für das Problem unter 2. ist dies selbstverständlich. Aber auch das eigentliche isoperimetrische Problem können wir einordnen. Die Spezialisierung besteht hier darin, daß in F die Größen z, z' gar nicht auftreten, während die Nebenbedingung die Form $z' - G(x, y, v') = 0$ hat[1]). Randbedingungen sind

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad z(x_0) = 0, \quad z(x_1) = c.$$

Auch der Fall des gewöhnlichen Minimumproblems mit höheren Ableitungen unter dem Integralzeichen ist ein Spezialfall des hier betrachteten Problems. Z. B. ist das Problem des Extremums

[1]) Zu beachten ist jedoch hier, daß der Begriff der Nachbarschaft einer Kurve für das Problem $\int F\,dx =$ Min. bei $\int G\,dx =$ konst. und für das Problem $\int F\,dx =$ Min. mit $z' - G(x, y, y') = 0$ nicht derselbe ist. Vgl. *Bolza*, S. 513/514 und Fußnote [2]). Die Probleme sind nur im Hinblick auf ihre Differentialgleichungen äquivalent. Entsprechendes gilt bei dem folgenden Beispiel des Textes.

von $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\, dx$ äquivalent mit dem des Extremums von $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z')\, dx$ unter der Nebenbedingung $z - y' = 0$.

In allen diesen Fällen erhalten wir, wie man leicht sieht, die notwendigen Bedingungen einheitlich durch die folgende Regel: *Wenn nicht durch die Lösung die zum Ausdruck G gehörigen Eulerschen Gleichungen erfüllt sind, muß es einen Multiplikator $\lambda(x)$ geben, so daß die zum Ausdruck $F^* = F + \lambda G$ gehörigen Eulerschen Gleichungen erfüllt sind.*

Es liegt nun sehr nahe, *die Gültigkeit dieser Multiplikatorregel auch für den allgemeinen Fall einer nicht holonomen Nebenbedingung zu vermuten. In der Tat gilt diese Regel auch für das allgemeine oben formulierte Problem.* Wir wollen aber hier auf die Durchführung des Beweises verzichten, indem wir den Leser auf die Literatur verweisen[1]).

Zum Schluß sei noch erwähnt, *daß die Multiplikatorregel auch noch beim allgemeinsten Mayerschen Problem bestehen bleibt.* Sie lautet für ein hinreichend allgemeines Beispiel folgendermaßen:

Sind die Funktionen $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ durch die Differentialgleichungen

$$f(x, y, z, s, y' z', s') = 0, \qquad g(x, y, z, s, y', z', s') = 0$$

aneinander gebunden, so ist das Vorhandensein zweier nicht verschwindender Funktionen $\lambda(x)$ und $\mu(x)$, mit denen die Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y'} - \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial z'} - \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s'} - \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s} = 0$$

gelten, eine notwendige Bedingung dafür, daß bei gegebenen Anfangs- und Endwerten von z und s und gegebenem Anfangswert von y der Endwert von y möglichst klein wird, vorausgesetzt, daß

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y'} & \frac{\partial f}{\partial z'} \\ \frac{\partial g}{\partial y'} & \frac{\partial g}{\partial z'} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist.

Endlich sei betont, daß alle unsere Überlegungen und Resultate auch dann gültig bleiben, wenn die Anzahl der unbekannten Funktionen und die Anzahl der Nebenbedingungen größer ist. Wenn es sich um die

[1]) Vgl. *Hilbert, D.:* Zur Variationsrechnung, Math. Ann. Bd. 62, S. 351—370. 1906. — In den auf S. 220 genannten Lehrbüchern von *Bolza* und *Hadamard* findet man gleichfalls eine ausführliche Darstellung.

Bestimmung von Funktionen mehrerer unabhängiger Variabler handelt, bleiben die Resultate ebenfalls bestehen, doch ist der Beweis im Falle von Differentialgleichungen als Nebenbedingungen noch nicht in befriedigender Weise gelungen.

§ 7. Der invariante Charakter der Eulerschen Differentialgleichungen.

1. Allgemeine Formeln. Die Eulerschen Differentialgleichungen besitzen ihrer Natur nach eine wichtige Invarianteneigenschaft, die für viele theoretische und praktische Anwendungen nützlich ist. Da sie nämlich die notwendigen Bedingungen für das Eintreten eines Extremums eines Integrals darstellen und da ein Extremum auch dann bestehen bleibt, wenn die vorkommenden Funktionen auf andere unabhängige Variable transformiert werden, so müssen die Eulerschen Differentialgleichungen für das transformierte Integral sich als direkte Konsequenz der ursprünglichen Eulerschen Differentialgleichungen ergeben. Wir können danach allgemein vermuten, daß der Eulersche Differentialausdruck des transformierten Integrals sich durch eine einfache Transformation aus dem des ursprünglichen ergeben wird[1]). Dieses Verhalten besteht nun in der Tat, unabhängig davon, ob es sich wirklich um ein Extremum handelt oder nicht, wie wir nunmehr durch direkte Aufstellung der Transformationsgleichungen zeigen werden.

Führen wir nämlich im einfachsten Falle statt x die Veränderliche ξ ein und setzen wir

$$F(x, y, y') = F\left(x(\xi), y, \frac{\frac{dy}{d\xi}}{\frac{dx}{d\xi}}\right) = \Phi\left(\xi, y, \frac{dy}{d\xi}\right), \tag{57}$$

so daß $\int_{x_0}^{x_1} F\,dx = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \Phi \frac{dx}{d\xi}\,d\xi$ wird, so ist

$$\left\{\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} [F]_y \eta\,dx &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta')\,dx \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \Phi\left(\xi, y+\varepsilon\eta, \frac{dy}{d\xi}+\varepsilon\frac{d\eta}{d\xi}\right)\frac{dx}{d\xi}\,d\xi \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left[\Phi \frac{dx}{d\xi}\right]_y \eta\,d\xi, \end{aligned}\right. \tag{58}$$

[1]) Noch anschaulicher ist folgende Begründung: Die erste Variation ist die Differenz der zu zwei unendlich benachbarten Kurven bzw. Flächen gehörigen Integralwerte. Diese Erklärung ist von jedem Koordinatensystem unabhängig, woraus sich die im Text genannte Invarianzeigenschaft ergibt.

also wegen der Willkür bei der Wahl von η (Willkür bis auf das Verschwinden an den Enden)

$$[F]_y = \frac{d\xi}{dx}\left[\Phi\frac{dx}{d\xi}\right]_y. \tag{59}$$

Im Falle zweier unabhängiger Veränderlichen wird ebenso:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = F(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta), u, u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x, u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y)$$
$$= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta);$$

$$\iint_G F\,dx\,dy = \iint_G \Phi\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\,d\xi\,d\eta,$$

$$\iint_G [F]_u\,\zeta\,dx\,dy = \iint_G \left[\Phi\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right]_u\zeta\,d\xi\,d\eta,$$

$$[F]_u = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\left[\Phi\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right]_u. \tag{60}$$

Ganz analog transformiert sich der Eulersche Ausdruck für mehr als zwei unabhängige Veränderliche.

2. Transformation von Δu. Polarkoordinaten. Wir betrachten als wichtigstes Beispiel den Integranden $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$. Wenn durch die Transformation $x = x(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $y = y(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $z = z(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ das Quadrat des Linienelementes $dx^2 + dy^2 + dz^2$ in den Ausdruck $\sum_{i,k} g_{ik}\,d\xi_i\,d\xi_k$ übergeht, so ist $g_{ik} = \frac{\partial x}{\partial\xi_i}\frac{\partial x}{\partial\xi_k} + \frac{\partial y}{\partial\xi_i}\frac{\partial y}{\partial\xi_k} + \frac{\partial z}{\partial\xi_i}\frac{\partial z}{\partial\xi_k}$, und die Determinante g dieser Größen ist das Quadrat der Funktionaldeterminante von x, y, z nach ξ_1, ξ_2, ξ_3. Man errechnet leicht

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = \sum_{i,k} g^{ik}u_i u_k, \qquad \left(u_i = \frac{\partial u}{\partial\xi_i}\right)$$

worin die Größen g^{ik} definiert sind durch

$$g^{ik} = \frac{\partial\xi_i}{\partial x}\frac{\partial\xi_k}{\partial x} + \frac{\partial\xi_i}{\partial y}\frac{\partial\xi_k}{\partial y} + \frac{\partial\xi_i}{\partial z}\frac{\partial\xi_k}{\partial z}$$

und den Gleichungen genügen

$$\sum_i g_{ik}g^{il} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ 1 & \text{für } k = l. \end{cases}$$

Daher erhalten wir

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_i \frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\sqrt{g}\sum_k g^{ik}u_k\right) \tag{61}$$

als allgemeine Formel für Transformation von Δu auf krummlinige Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3. Man beachte, welche Ersparnis an Rechenarbeit

darin liegt, daß wir auf die Durchführung der Transformation der zweiten Ableitungen verzichten dürfen. Ist speziell $g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0$, d. h. ist das neue Koordinatensystem auch rechtwinklig, indem sich die Koordinatenflächen $\xi_1 = \text{konst.}$, $\xi_2 = \text{konst.}$, $\xi_3 = \text{konst.}$ senkrecht schneiden, so wird einfach

$$(62)\quad \Delta u = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(u_1\sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(u_2\sqrt{\frac{g_{11}g_{33}}{g_{22}}}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(u_3\sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}}\right)\right\}.$$

Nehmen wir beispielsweise *Polarkoördinaten* r, φ, ϑ:

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta, \qquad y = r\sin\varphi\sin\vartheta, \qquad z = r\cos\vartheta,$$
$$ds^2 = dr^2 + r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2,$$

so ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$(63)\quad \Delta u = \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r \sin\vartheta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}(u_\vartheta \sin\vartheta)\right\}.$$

Bei nur zwei unabhängigen Veränderlichen ξ, η gelten selbstverständlich die entsprechenden Formeln. Nämlich, wenn

$$ds^2 = e\,d\xi^2 + 2f\,d\xi\,d\eta + g\,d\eta^2$$

ist, so erhalten wir die invariante Gestalt des Differentialausdruckes

$$(64)\quad \Delta u = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{g u_\xi - f u_\eta}{\sqrt{eg - f^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{e u_\eta - f u_\xi}{\sqrt{eg - f^2}}\right)\right\}.$$

Speziell in Polarkoordinaten wird

$$(65)\quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2, \qquad \Delta u = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right)\right\}.$$

3. Elliptische Koordinaten[1]. Ein weiteres sehr wichtiges Beispiel bieten die elliptischen Koordinaten. Sie werden definiert als die drei Wurzeln ϱ, σ, τ der Gleichung dritten Grades in s

$$(66)\quad \frac{x^2}{s - e_1} + \frac{y^2}{s - e_2} + \frac{z^2}{s - e_3} = 1,$$

wobei e_1, e_2, e_3 gegebene reelle Zahlen sind. Sie sind reell für reelle x, y, z und genügen, wenn $e_1 > e_2 > e_3$ ist, den Ungleichungen

$$\varrho \geqq e_1 \geqq \sigma \geqq e_2 \geqq \tau \geqq e_3.$$

Die Flächen $\varrho = \text{konst.}$, $\sigma = \text{konst.}$, $\tau = \text{konst.}$ sind Ellipsoide, einschalige Hyperboloide bzw. zweischalige Hyperboloide. Die rechtwinkligen

[1] Vgl. *Jacobi, C. G. J.*: Vorlesungen über Dynamik (gehalten in Königsberg im Wintersemester 1842/43, herausgegeben von *A. Clebsch*, Berlin 1866, abgedruckt als Supplementband in den Gesammelten Werken, Berlin 1884), 26. Vorlesung, wo man die Einzelheiten der Rechnung nachsehen möge. Ausdrücklich sei darauf hingewiesen, daß die folgenden Betrachtungen sich unmittelbar auf mehr als 3 Dimensionen verallgemeinern lassen.

Koordinaten drücken sich durch die elliptischen folgendermaßen aus:

$$(67)\qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{(\varrho - e_1)(\sigma - e_1)(\tau - e_1)}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}, \qquad y^2 = \dfrac{(\varrho - e_2)(\sigma - e_2)(\tau - e_2)}{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}, \\ z^2 = \dfrac{(\varrho - e_3)(\sigma - e_3)(\tau - e_3)}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}, \end{cases}$$

und das Linienelement wird

$$(68)\qquad \begin{cases} 4\,ds^2 = \dfrac{(\varrho - \sigma)(\varrho - \tau)}{(\varrho - e_1)(\varrho - e_2)(\varrho - e_3)}\,d\varrho^2 + \dfrac{(\sigma - \tau)(\sigma - \varrho)}{(\sigma - e_1)(\sigma - e_2)(\sigma - e_3)}\,d\sigma^2 \\ \qquad\qquad + \dfrac{(\tau - \varrho)(\tau - \sigma)}{(\tau - e_1)(\tau - e_2)(\tau - e_3)}\,d\tau^2. \end{cases}$$

Diese Form legt nahe, als neue Variable

$$t_1 = \int^{\varrho} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \qquad t_2 = \int^{\sigma} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \qquad t_3 = \int^{\tau} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}$$

$$\text{mit} \quad f(\lambda) = 4(\lambda - e_1)(\lambda - e_2)(\lambda - e_3)$$

einzuführen. Ist $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, was durch die Substitution $s = s' + \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3)$ zu erreichen ist, und setzt man ∞ als untere Grenze an die Integrale, so wird einfach

$$\varrho = \wp(t_1), \qquad \sigma = \wp(t_2), \qquad \tau = \wp(t_3),$$

wobei $\wp$ die Weierstraßsche $\wp$-Funktion[1]) bedeutet, ferner wird

$$ds^2 = (\varrho - \sigma)(\varrho - \tau)\,dt_1^2 + (\sigma - \tau)(\sigma - \varrho)\,dt_2^2 + (\tau - \varrho)(\tau - \sigma)\,dt_3^2$$

und nach (62) für eine Funktion T der Koordinaten t_i:

$$(69)\qquad \begin{cases} \Delta T = \dfrac{1}{(\sigma - \tau)(\tau - \varrho)(\varrho - \sigma)} \left\{ \dfrac{\partial}{\partial t_1}\left((\tau - \sigma)\dfrac{\partial T}{\partial t_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial t_2}\left((\varrho - \tau)\dfrac{\partial T}{\partial t_2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial t_3}\left((\sigma - \varrho)\dfrac{\partial T}{\partial t_3}\right) \right\} \\ \quad = \dfrac{1}{(\varrho - \sigma)(\varrho - \tau)}\dfrac{\partial^2 T}{\partial t_1^2} + \dfrac{1}{(\sigma - \tau)(\sigma - \varrho)}\dfrac{\partial^2 T}{\partial t_2^2} + \dfrac{1}{(\tau - \varrho)(\tau - \sigma)}\dfrac{\partial^2 T}{\partial t_3^2}. \end{cases}$$

Die Einführung der Integrale t_i bringt noch den besonderen Vorteil mit sich, daß die rechtwinkligen Koordinaten eindeutige Funktionen der t_i werden; in den Ausdrücken

$$(70)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{\wp(t_1) - e_1}\,\sqrt{\wp(t_2) - e_1}\,\sqrt{\wp(t_3) - e_1}}{\sqrt{e_1 - e_2}\,\sqrt{e_1 - e_3}}, \\ y = \dfrac{\sqrt{\wp(t_1) - e_2}\,\sqrt{\wp(t_2) - e_2}\,\sqrt{\wp(t_3) - e_2}}{\sqrt{e_2 - e_3}\,\sqrt{e_2 - e_1}}, \\ z = \dfrac{\sqrt{\wp(t_1) - e_3}\,\sqrt{\wp(t_2) - e_3}\,\sqrt{\wp(t_3) - e_3}}{\sqrt{e_3 - e_1}\,\sqrt{e_3 - e_2}}, \end{cases}$$

[1]) Vgl. *Hurwitz-Courant:* Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Berlin 1922. S. 147—157.

hängen bekanntlich die Wurzeln im Zähler nach Festsetzung des Vorzeichens eindeutig von t_1, t_2, t_3 ab. Durchläuft der Punkt x, y, z einen Oktanten, so durchläuft jede der Größen ϱ, σ, τ das ihr zugewiesene Intervall, und wenn eine von ihnen einen der Endwerte annimmt, so rückt der Punkt x, y, z in die Teile der Grenzebenen des Oktanten, die in Abb. 1 angegeben sind. Die Ebenen sind darin nach außen durch ein Ellipsoid $\varrho = \varrho_1 > e_1$ abgeschnitten; die sie zerlegenden Kurven sind Teile der

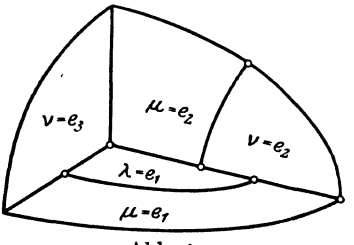


Abb. 1.

$$\text{„Fokalellipse“} \quad \left(x = 0, \frac{y^2}{e_1 - e_2} + \frac{z^2}{e_1 - e_3} = 1\right)$$

und der

$$\text{„Fokalhyperbel“} \quad \left(y = 0, \frac{x^2}{e_2 - e_1} + \frac{z^2}{e_2 - e_3} = 1\right).$$

Bedeuten nun ω die reelle und ω' die rein imaginäre Periode der Integrale t_i, d. h. ist $\omega = 2\int_{e_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}$, $\omega' = 2\int_{-\infty}^{e_3} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}$, so kann man t_1 von 0 bis $\frac{\omega}{2}$, t_2 von $\frac{\omega}{2}$ bis $\frac{\omega + \omega'}{2}$, t_3 von $\frac{\omega + \omega'}{2}$ bis $\frac{\omega'}{2}$ variieren lassen und erhält die Punkte des Oktanten. Verdoppelt man die Strecke für jedes t, so durchläuft der Punkt den ganzen Raum. Soll eine eindeutige Funktion der t_i auch im Raume eindeutig sein, so muß sie bei allen Substitutionen der t ungeändert bleiben, die x, y und z in sich überführen, z. B. wenn man t_1 und t_2 durch $\omega - t_1$ und $\omega - t_2$ ersetzt.

Setzen wir $t_1 = u$, $t_2 = \frac{\omega}{2} + iv$, $t_3 = \frac{\omega'}{2} + w$, $\wp(t_1) = f(u)$, $\wp(t_2) = g(v)$, $\wp(t_3) = h(w)$, so können wir u, v und w reell nehmen. Dann wird

$$(71) \quad \begin{cases} ds^2 = [f(u) - g(v)][f(u) - h(w)]\,du^2 \\ \quad + [f(u) - g(v)][g(v) - h(w)]\,dv^2 \\ \quad + [f(u) - h(w)][g(v) - h(w)]\,dw^2, \end{cases}$$

und hierin sind bei reellen u, v, w alle Koeffizienten positiv, da $f(u) \geqq e_1 \geqq g(v) \geqq e_2 \geqq h(w) \geqq e_3$ ist, während bei der symmetrischen Gestalt in t_1, t_2, t_3 zu berücksichtigen war, daß dt_2 rein imaginär ist und daher mit dem negativen Wert des Koeffizienten von dt_2^2 der definite Charakter von ds^2 gewahrt wurde.

Von den *Ausartungen der elliptischen Koordinaten* erwähnen wir hier (außer den Polarkoordinaten, die auch als eine Ausartung auf-

gefaßt werden können) nur die *rotationselliptischen* und *-parabolischen*. Läßt man zwei der Größen e_i, etwa e_1 und e_2, zusammenfallen, so erhält man

$$\frac{x^2+y^2}{s-e_1}+\frac{z^2}{s-e_3}=1\,. \tag{72}$$

Die beiden Wurzeln $s=\lambda_1$, $s=\lambda_2$ dieser Gleichung sind zusammen mit dem durch

$$x=r\cos\varphi\,,\quad y=r\sin\varphi\,,\quad r^2=x^2+y^2$$

definierten Winkel φ die neuen Koordinaten. Hier ist

$$r^2=\frac{(\lambda_1-e_1)(\lambda_2-e_1)}{e_3-e_1}\,,\qquad z^2=\frac{(\lambda_1-e_3)(\lambda_2-e_3)}{e_1-e_3}\,, \tag{73}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= r^2\,d\varphi^2+\frac{\lambda_1-\lambda_2}{4(\lambda_1-e_1)(\lambda_1-e_3)}\,d\lambda_1^2+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{4(\lambda_2-e_1)(\lambda_2-e_3)}\,d\lambda_2^2\\ &= r^2\,d\varphi^2+(\lambda_1-\lambda_2)\,(dt_1^2-dt_2^2)\end{aligned}$$

mit

$$t_i=\int^{\lambda_i}\frac{d\lambda}{\sqrt{4(\lambda-e_1)(\lambda-e_3)}}\,.$$

Daraus ergibt sich

$$\Delta T=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r(\lambda_1-\lambda_2)}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\left(r\frac{\partial T}{\partial t_1}\right)-\frac{\partial}{\partial t_2}\left(r\frac{\partial T}{\partial t_2}\right)\right]. \tag{74}$$

Läßt man hier noch einen Scheitel der Ellipsoide ins Unendliche rücken, so erhält man durch einen Grenzübergang[1]) die *rotationsparabolischen Koordinaten* als Wurzeln λ_1, λ_2 der Gleichung

$$\frac{x^2+y^2}{s-e_1}-2z+s-e_1=0\,, \tag{75}$$

wobei sich r und z folgendermaßen ausdrücken

$$r^2=-(\lambda_1-e_1)(\lambda_2-e_1)\,,\quad 2z=2e_1-\lambda_1-\lambda_2\,. \tag{76}$$

Als Koordinaten eines Raumpunktes dienen hier λ_1, λ_2 und φ. Das Linienelement wird

$$\begin{cases} ds^2=r^2\,d\varphi^2+\dfrac{\lambda_1-\lambda_2}{4(\lambda_1-e_1)}\,d\lambda_1^2+\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{4(\lambda_2-e_1)}\,d\lambda_2^2\\ \quad=r^2\,d\varphi^2+(\lambda_1-\lambda_2)\,(dt_1^2-dt_2^2)\end{cases} \tag{77}$$

mit

$$t_i=\int^{\lambda_i}\frac{d\lambda}{\sqrt{4(\lambda-e_1)}}=\sqrt{\lambda_i-e_1}\,,$$

[1]) Selbstverständlich lassen sich diese Koordinaten auch ohne Berufung auf das Vorangehende ganz einfach definieren, indem man von dem System (75) konfokaler Rotationsparaboloide ausgeht.

und der Differentialausdruck ΔT hat die Gestalt

$$\Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r(\lambda_1 - \lambda_2)}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\left(r\frac{\partial T}{\partial t_1}\right) - \frac{\partial}{\partial t_2}\left(r\frac{\partial T}{\partial t_2}\right)\right]. \tag{78}$$

Läßt man in den obigen Ausdrücken des Linienelements die Glieder weg, in denen φ auftritt, so hat man ohne weiteres die Formeln für elliptische bzw. parabolische Koordinaten in der r,z-Ebene. Für ΔT erhält man in beiden Fällen gemäß Formel (64)

$$\Delta T = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial t_2^2}\right), \tag{79}$$

wobei der Zusammenhang zwischen λ_i und t_i durch die Formel

$$t_i = \int^{\lambda_i} \frac{d\lambda}{\sqrt{4(\lambda - e_1)(\lambda - e_3)}}$$

bzw. durch

$$t_i = \sqrt{\lambda_i - e_1}$$

gegeben wird.

§ 8. Die Greenschen Formeln.

Die linearen Differentialgleichungen, mit denen wir es zu tun haben, gehen fast durchweg aus Variationsproblemen hervor, deren Integranden quadratische Ausdrücke in der gesuchten Funktion und ihren Ableitungen sind. Die Umformung der ersten Variation solcher Integrale führt zu einer Reihe formaler Beziehungen, die man unter dem Namen *Greensche Formeln* zusammenfaßt und die wir hier zusammenstellen wollen, da sie später öfter gebraucht werden. Dabei sei betont, daß diese Beziehungen auch losgelöst von der Variationsrechnung ihre Bedeutung haben und daß wir uns aus diesem Anlaß im vorliegenden Paragraphen an einzelnen Stellen ein wenig von unserem Ausgangspunkt entfernen werden, um eine vollständigere Übersicht zu gewinnen.

1. Greensche Formeln für gewöhnliche Differentialausdrücke zweiter Ordnung. Adjungierte Ausdrücke. Bezeichnet man mit $Q[y, y]$ den quadratischen Ausdruck $ay'^2 + 2by'y + cy^2$, wo a, b und c Funktionen von x sind, mit $Q[y, z]$ den bilinearen Ausdruck

$$Q[y,z] = ay'z' + b(y'z + yz') + cyz,$$

so daß

$$Q[y+z, y+z] = Q[y,y] + 2Q[y,z] + Q[z,z]$$

wird, so ist, wenn man die Variation der Funktion y in der Form $\delta y = \varepsilon z$ annimmt,

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} Q[y,y]\,dx = 2\varepsilon\int_{x_0}^{x_1} Q[y,z]\,dx.$$

Die Teilintegration, welche früher für einen beliebigen Integranden ausgeführt wurde, liefert hier

$$\int_{x_0}^{x_1} Q[y,z]\,dx = -\int_{x_0}^{x_1} z[(ay')' + b'y - cy]\,dx + (ay' + by)\,z\Big|_{x_0}^{x_1},$$

oder mit der Abkürzung $L[y] = (ay')' + b'y - cy$

$$\int_{x_0}^{x_1} Q[y,z]\,dx = -\int_{x_0}^{x_1} zL[y]\,dx + (ay' + by)\,z\Big|_{x_0}^{x_1}, \tag{80}$$

wo $-2L[y]$ der Eulersche Differentialausdruck für den Integranden Q ist.

Wegen der Symmetrie von $Q[y,z]$ ergibt sich die genau analoge Formel

$$\int_{x_0}^{x_1} Q[y,z]\,dx = -\int_{x_0}^{x_1} yL[z]\,dx + (az' + bz)\,y\Big|_{x_0}^{x_1} \tag{80'}$$

und somit die symmetrische Beziehung

$$\int_{x_0}^{x_1} (zL[y] - yL[z])\,dx = a(y'z - z'y)\Big|_{x_0}^{x_1}. \tag{81}$$

Der lineare Differentialausdruck $L[y]$, welcher durch Variation des quadratischen Ausdruckes Q entsteht, ist nicht der allgemeinste lineare homogene Differentialausdruck zweiter Ordnung. Man nennt einen solchen durch Variation eines quadratischen Ausdrucks entstehenden Differentialausdruck $L[y]$ *„sich selbst adjungiert"*. *Für einen Differentialausdruck $py'' + ry' + qy$ ist also $r = p'$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß er sich selbst adjungiert ist. Diese Eigenschaft ist gleichbedeutend mit dem Bestehen einer „Greenschen Formel" der Gestalt* (81), *oder der Tatsache, daß der Ausdruck $zL[y] - yL[z]$ die vollständige Ableitung eines bilinearen Differentialausdruckes erster Ordnung in y, z ist.*

Durch Multiplikation mit einer geeigneten Funktion $\varrho(x)$ kann man einen beliebigen linearen Differentialausdruck $py'' + ry' + qy$ in einen sich selbst adjungierten verwandeln; man hat nur

$$\varrho = e^{\int \frac{r-p'}{p}\,dx}$$

zu setzen. Ebenso gut kann man den Differentialausdruck $py'' + ry' + qy$ zu einem sich selbst adjungierten machen, indem man statt x eine neue unabhängige Variable oder statt y die neue abhängige Variable

$$z = ye^{\int \frac{r-p'}{p}\,dx}$$

einführt.

Zu einem vorgelegten sich selbst adjungierten Ausdruck $(py')' + qy$ kann man vermöge der Relationen $a = p$, $b' - c = q$ auf mannigfache Weise einen zugehörigen quadratischen Ausdruck $Q[y, y]$ konstruieren.

Für allgemeine nicht sich selbst adjungierte lineare Differentialausdrücke erhält man ähnliche Beziehungen, indem man von einem unsymmetrischen Bilinearausdruck

$$R[y, z] = ay'z' + by'z + cyz' + dyz$$

ausgeht. Dann wird

$$(82)\quad \begin{cases} \int_{x_0}^{x_1} R[y, z]\,dx = -\int_{x_0}^{x_1} zL[y]\,dx + (ay' + cy)z \Big|_{x_0}^{x_1} \\ \qquad\qquad = -\int_{x_0}^{x_1} yM[z]\,dx + (az' + bz)y \Big|_{x_0}^{x_1} \end{cases}$$

mit

$$L[y] = (ay')' - by' + (cy)' - dy,$$
$$M[z] = (dz')' + (bz)' - cz' - dz$$

und daher

$$(83)\quad \int_{x_0}^{x_1} (zL[y] - yM[z])\,dx = [a(y'z - yz') + (c - b)yz] \Big|_{x_0}^{x_1}.$$

Dabei heißt M *der zu* L *adjungierte Differentialausdruck.* Ist

$$L[y] = py'' + ry' + qy$$

gegeben, so kann man vermöge der Beziehungen $a = p$, $a' + c - b = r$, $c' - d = q$ immer zugehörige Bilinearausdrücke auf mannigfache Art bestimmen; ist z. B.

$$L[y] = y'' + ry',$$

so wird

$$a = 1, \qquad c - b = r, \qquad c' - d = 0,$$

also z. B.

$$b = -r, \qquad c = d = 0,$$
$$M[z] = z'' - (rz)'.$$

Dabei ist $R[y, z]$ nur bis auf ein Glied von der Gestalt

$$g(y'z + yz') + g'yz,$$

d. h. bis auf die vollständige Ableitung von gyz bestimmt, die nur auf die Randglieder, nicht aber auf die Differentialausdrücke L und M Einfluß hat.

2. Gewöhnliche Differentialausdrücke höherer Ordnung. Die entsprechenden Formeln für Differentialausdrücke vierter Ordnung lauten kurz zusammengestellt:

$$\begin{aligned} R[y,z] = {} & a_{22}y''z'' + a_{21}y''z' + a_{20}y''z \\ & + a_{12}y'z'' + a_{11}y'z' + a_{10}y'z \\ & + a_{02}yz'' + a_{01}yz' + a_{00}yz, \end{aligned}$$

$$(84)\qquad \begin{cases} \int_{x_0}^{x_1} R[y,z]\,dx = \int_{x_0}^{x_1} z\,L[y]\,dx + B[y,z]\Big|_{x_0}^{x_1}, \\ \int_{x_0}^{x_1} R[y,z]\,dx = \int_{x_0}^{x_1} y\,M[z]\,dx + C[y,z]\Big|_{x_0}^{x_1}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L[y] = {} & a_{22}y^{IV} + (2a'_{22} - a_{21} + a_{12})y''' + (a''_{22} - a'_{21} + a_{20} + 2a'_{12} - a_{11} + a_{02})y'' \\ & + (a''_{12} - a'_{11} + a_{10} + 2a'_{02} - a_{01})y' + (a''_{02} - a'_{01} + a_{00})y, \\ M[z] = {} & a_{22}z^{IV} + (2a'_{22} - a_{12} + a_{21})z''' + (a''_{22} - a'_{12} + a_{02} + 2a'_{21} - a_{11} + a_{20})z'' \\ & + (a''_{21} - a'_{11} + a_{01} + 2a'_{20} - a_{10})z' + (a''_{20} - a'_{10} + a_{00})z, \\ B[y,z] = {} & a_{22}y''z' - (a_{22}y'')'z + a_{21}y''z + a_{12}y'z' \\ & - (a_{12}y')'z + a_{11}y'z + a_{02}yz' - (a_{02}y)'z + a_{01}yz, \\ C[y,z] = {} & a_{22}z''y' - (a_{22}z'')'y + a_{12}z''y + a_{21}z'y' \\ & - (a_{21}z')'y + a_{11}z'y + a_{20}zy' - (a_{20}z)'y + a_{10}yz, \end{aligned}$$

$$(85)\qquad \int_{x_0}^{x_1} (z\,L[y] - y\,M[z])\,dx = (C[y,z] - B[y,z])\Big|_{x_0}^{x_1}.$$

Ist der Bilinearausdruck R symmetrisch, d. h. $a_{ik} = a_{ki}$, so heißt $L[y] = M[y]$ sich selbst adjungiert; allgemein heißen L und M adjungierte Differentialausdrücke. Für beliebige Ordnung erhält man, wie der Leser selbst nachrechnen möge, den zu

$$L[y] = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu y^{(\nu)}$$

adjungierten Differentialausdruck nach der Formel

$$M[z] = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} (a_\nu z)^{(\nu)}.$$

Er ist durch die Forderung bestimmt, daß $zL[y] - yM[z]$ eine vollständige Ableitung sein soll[1]).

[1]) Die Beziehung zwischen zwei zueinander adjungierten Differentialausdrücken hat große Ähnlichkeit mit derjenigen, die zwischen einer quadratischen Matrix und ihrer Transponierten besteht.

3. Partielle Differentialausdrücke. Bei linearen partiellen Differentialausdrücken zweiter Ordnung gehen wir entsprechend von einem quadratischen bzw. bilinearen Ausdruck

$$Q[u,u] = a u_x^2 + 2b u_x u_y + c u_y^2 + 2d u_x u + 2e u_y u + f u^2,$$

$$\begin{aligned} Q[u,v] = {} & a u_x v_x + b(u_x v_y + u_y v_x) + c u_y v_y \\ & + d(u_x v + u v_x) + e(u_y v + u v_y) + f u v \end{aligned}$$

aus und erhalten durch Teilintegration über ein Gebiet G mit dem Rand Γ

$$\iint_G Q[u,v]\,dx\,dy = -\iint_G v L[u]\,dx\,dy + \int_\Gamma (B[u,v]\,dy - C[u,v]\,dx) \tag{86}$$

$$\iint_G Q[u,v]\,dx\,dy = -\iint_G u L[v]\,dx\,dy + \int_\Gamma (B[v,u]\,dy - C[v,u]\,dx \tag{87}$$

mit

$$\begin{aligned} L[u] = {} & \underline{(a u_x)_x} + (b u_x)_y + (b u_y)_x + \underline{(c u_y)_y} \\ & - d u_x + (d u)_x - e u_y + (e u)_y \underline{- f u}, \\ B[u,v] = {} & a u_x v + b u_y v + d u v, \\ C[u,v] = {} & b u_x v + c u_y v + e u v \end{aligned}$$

und daraus

$$\left\{\begin{aligned} & \iint_G (v L[u] - u L[v])\,dx\,dy \\ & \quad = \int_\Gamma ((B[u,v] - B[v,u])\,dy - (C[u,v] - C[v,u])\,dx) \\ & \quad = \int_\Gamma ([a(u_x v - u v_x) + b(u_y v - u v_y)]\,dy \\ & \qquad\qquad - [b(u_x v - u v_x) + c(u_y v - u v_y)]\,dx). \end{aligned}\right. \tag{88}$$

Wie vorher ist $-2L[u]$ der Eulersche Ausdruck zum Integranden $Q[u,u]$.

4. Normalformen im elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Falle. Die Mannigfaltigkeit der partiellen linearen Differentialausdrücke zweiter Ordnung, welche wir aus quadratischen Ausdrücken $Q[u,u]$ durch Variation erhalten, läßt sich am besten übersehen, wenn man die letzteren durch geeignete Koordinatentransformationen auf einfache Normalformen bringt. Wir werden erkennen, daß wir so zu drei verschiedenen Typen, nämlich den *„elliptischen"*, *„parabolischen"*, *„hyperbolischen"* Differentialausdrücken gelangen.

Führen wir statt x, y neue Variable ξ, η ein, so wird

$$\begin{aligned} Q[u,u] = {} & (a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2)u_\xi^2 \\ & + 2[a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y]u_\xi u_\eta \\ & + (a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2)u_\eta^2 \\ & + 2(d\xi_x + e\xi_y)uu_\xi + 2(d\eta_x + e\eta_y)uu_\eta + fu^2. \end{aligned}$$

Setzen wir den Koeffizienten von u_ξ^2 oder u_η^2 gleich Null, nachdem wir ihn in Linearfaktoren zerlegt haben

$$a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = a\left(\xi_x + \frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a}\xi_y\right)\left(\xi_x + \frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}\xi_y\right) = 0,$$

so erhalten wir für ξ eine der beiden Gleichungen

$$\xi_x + \frac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}\xi_y = 0;$$

also muß ξ ein Integral einer der beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}$$

sein, d. h. $\xi(x,y) =$ konst. muß die Schar ihrer Lösungen darstellen. Nehmen wir dann für η ein Integral der Gleichung mit entgegengesetztem Vorzeichen der Quadratwurzel, so haben wir[1])

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}Q[u,u] = 2b'u_\xi u_\eta + 2d'uu_\xi + 2e'uu_\eta + f'u^2,$$

und der Invarianzeigenschaft des Eulerschen Ausdruckes[2]) zufolge — $-2L[u]$ ist der Eulersche Ausdruck zum Integranden $Q[u,u]$ — bestätigt man leicht

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}L[u] &= (b'u_\xi)_\eta + (b'u_\eta)_\xi - d'u_\xi + (d'u)_\xi - e'u_\eta + (e'u)_\eta - f'u \\ &= 2b'u_{\xi\eta} + ru_\xi + su_\eta + tu. \end{aligned}$$

Die Variablen ξ, η sind reell, wenn $b^2 - ac > 0$ ist, im *„hyperbolischen Fall"*. Im *„elliptischen Fall"* $b^2 - ac < 0$ können wir ξ und η als konjugiert komplexe Funktionen bestimmen, wenn die ursprünglichen Koeffizienten a, b, c analytisch waren. Wir setzen dann

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2, \qquad \eta = \xi_1 - i\xi_2$$

---

[1]) Akzente bedeuten in den folgenden Formeln natürlich keine Ableitungen.
[2]) Siehe § 7, 1, Gleichung (60).

und erhalten

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi_1,\xi_2)}\,Q[u,u] = a''(u_{\xi_1}^2 + u_{\xi_2}^2) + d''\,u\,u_{\xi_1} + e''\,u\,u_{\xi_2} + f''\,u^2,$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi_1,\xi_2)}\,L[u] = a''(u_{\xi_1\xi_1} + u_{\xi_2\xi_2}) + r''\,u_{\xi_1} + s''\,u_{\xi_2} + t''\,u\,.$$

Im *„parabolischen Fall"* $b^2 - ac = 0$ liefert unser Ansatz nur eine neue Variable ξ, die als Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}, \qquad \text{d. h. durch} \qquad a\,\xi_x + b\,\xi_y = b\,\xi_x + c\,\xi_y = 0$$

bestimmt wird. Bezogen auf diese und eine beliebige andere Variable $\eta = \eta(x,y)$, z.B. $\eta = x$ oder $\eta = y$, nehmen dann Q und L (bis auf Funktionaldeterminantenfaktoren) die Form an

$$Q[u,u] = c'''u_\eta^2 + d'''\,u\,u_\xi + e'''\,u\,u_\eta + f'''\,u^2,$$
$$L[u] = c'''\,u_{\eta\eta} + \cdots,$$

wobei die Punkte einen Differentialausdruck erster Ordnung bezeichnen.

Wir erkennen also, daß elliptische Differentialgleichungen aus einem definiten, hyperbolische aus einem indefiniten und parabolische aus einem semidefiniten Integranden durch Variation entspringen.

Die allgemeinen Formeln für nicht sich selbst adjungierte Differentialausdrücke und solche höherer Ordnung lassen wir beiseite.

5. Beispiele. Beispiel 1. Die potentielle Energie einer *homogenen Membran* ist bis auf einen Materialfaktor (vgl. § 1, 2f.)

$$\iint_G Q[u,u]\,dx\,dy = \iint_G (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy\,.$$

Das gibt

$$L[u] = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u\,,$$
$$B[u,v] = u_x v\,, \qquad C[u,v] = u_y v\,;$$

also wird

$$\iint_G Q[u,v]\,dx\,dy = -\iint_G v\,L[u]\,dx\,dy + \int_\Gamma (B[u,v]\,dy - C[u,v]\,dx)$$
$$= -\iint_G v\,\Delta u\,dx\,dy + \int_\Gamma (u_x v\,dy - u_y v\,dx)\,.$$

Man pflegt diese Formel *als Greensche Formel im besonderen* zu bezeichnen und in der Gestalt

$$\text{(89)} \qquad \boxed{\iint_G (u_x v_x + u_y v_y)\,dx\,dy = -\iint_G v\,\Delta u\,dx\,dy + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\,v\,ds}$$

zu schreiben, woraus sich die weitere Greensche Formel

$$\iint_G (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dx\,dy = \int_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds \tag{90}$$

ergibt. Hierin bedeutet s die Bogenlänge und $\frac{\partial}{\partial n}$ die Differentiation nach der äußeren Normalen. Es sei dabei nochmals an die Voraussetzungen erinnert, welche bei (89) über das Gebiet G und die Funktionen u und v gemacht werden: G soll ein von stückweise glatten Kurven begrenzter ebener Bereich sein, v soll stückweise stetige Ableitungen erster Ordnung, u stetige Ableitungen erster und stückweise stetige Ableitungen zweiter Ordnung haben.

Beispiel 2. Die *potentielle Energie des Stabes* ist (vgl. § 1, 2d)

$$\int_{x_0}^{x_1} Q[y, y]\,dx = \int_{x_0}^{x_1} y''^2\,dx\,.$$

Das gibt

$$L[y] \doteq y^{IV}\,,\quad B[y, z] = y''z' - y'''z\,,\quad C[y, z] = z''y' - z'''y\,.$$

Daraus folgt mit den üblichen Bezeichnungen

$$\frac{1}{2}\delta\int_{x_0}^{x_1} Q[y, y]\,dx = \int_{x_0}^{x_1} y^{IV}\,\delta y\,dx + (y''\,\delta y' - y'''\,\delta y)\Big|_{x_0}^{x_1}. \tag{91}$$

Fordert man das Verschwinden der ersten Variation bei *freien Enden*, d. h. bei beliebigem $\delta y'$ und δy, so ist also an den Enden

$$y'' = y''' = 0 \quad \text{für} \quad x = x_0 \quad \text{und} \quad x = x_1. \tag{92}$$

Bei *gestützten Enden*, d. h. wenn an den Enden nur $\delta y = 0$ vorgeschrieben ist, lautet die Randbedingung

$$y'' = 0\,. \tag{93}$$

Beispiel 3. Als Beispiel für partielle Differentialausdrücke höherer Ordnung nennen wir den zur *schwingenden Platte* gehörigen. Die potentielle Energie hat bis auf einen Materialfaktor (vgl. § 1, 2g) die Gestalt

$$\iint_G Q[u, u]\,dx\,dy = \iint_G ((\Delta u)^2 - 2(1-\mu)(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2))\,dx\,dy\,, \tag{93'}$$

also

$$Q[u, v] = \Delta u\,\Delta v - (1-\mu)(u_{xx}v_{yy} + u_{yy}v_{xx} - 2u_{xy}v_{xy})\,.$$

Formt man nun

$$\delta\iint_G Q[u, u]\,dx\,dy = 2\iint_G Q[u, \delta u]\,dx\,dy$$

wie oben durch Teilintegration um, so erhält man (vgl. *Rayleigh, J. W.:* The Theory of Sound, Bd. 1, S. 354—356. London 1894)

$$
(94)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta\iint_G Q[u,u]\,dx\,dy &= 2\iint_G \Delta\Delta u\,\delta u\,dx\,dy \\
&\quad -\int_\Gamma \Big\{\frac{\partial}{\partial n}\Delta u + (1-\mu)\,\frac{\partial}{\partial s}\,[\cos\vartheta\sin\vartheta\,(u_{yy}-u_{xx}) \\
&\qquad + (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\,u_{xy}]\Big\}\,\delta u\,ds \\
&\quad +\int_\Gamma \{\mu\Delta u + (1-\mu)\,(\cos^2\vartheta\,u_{xx} + \sin^2\vartheta\,u_{yy} \\
&\qquad + 2\cos\vartheta\sin\vartheta\,u_{xy})\}\,\frac{\partial\,\delta u}{\partial n}\,ds\,,
\end{aligned}\right.
$$

worin ϑ den Winkel der x-Achse mit der äußeren Normalen und $\frac{\partial}{\partial n}$ Differentiation nach dieser bedeutet. *Fordert man das Verschwinden der ersten Variation, so ergeben sich für die freie Platte die natürlichen Randbedingungen*

$$
(95)\quad \frac{\partial}{\partial n}\Delta u + (1-\mu)\,\frac{\partial}{\partial s}[\cos\vartheta\sin\vartheta\,(u_{yy}-u_{xx}) + (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\,u_{xy}] = 0,
$$

$$
(96)\quad \mu\Delta u + (1-\mu)\,(\cos^2\vartheta\,u_{xx} + \sin^2\vartheta\,u_{yy} + 2\cos\vartheta\sin\vartheta\,u_{xy}) = 0\,,
$$

da am Rande δu und $\frac{\partial\,\delta u}{\partial n}$ willkürlich angenommen werden können. Bei der *„gestützten" Platte* ist am Rande nur die Bedingung $u = 0$ vorgegeben; es ist also dort $\delta u = 0$, aber $\frac{\partial\,\delta u}{\partial n}$ beliebig. Daher ergibt sich außer $u = 0$ nur die Randbedingung (96).

Wir führen ferner noch das Analogon der symmetrischen Greenschen Formel (90) für den Differentialausdruck $\Delta\Delta u$ an:

$$
(97)\quad \left\{\begin{aligned}
&\iint_G (u\,\Delta\Delta v - v\,\Delta\Delta u)\,dx\,dy \\
&\quad = \int_\Gamma \Big(\Delta u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial\Delta u}{\partial n} - \Delta v\,\frac{\partial u}{\partial n} + u\,\frac{\partial\Delta v}{\partial n}\Big)\,ds\,.
\end{aligned}\right.
$$

§ 9. Das Hamiltonsche Prinzip und die Differentialgleichungen der Physik.

Die meisten Differentialgleichungsprobleme der mathematischen Physik stehen in enger Beziehung zur Variationsrechnung durch das Hamiltonsche Prinzip. Dieses Prinzip, ursprünglich als kürzester und prägnantester Ausdruck für die Bewegungsgesetze der Punktmechanik hergeleitet, hat sich weit über den ursprünglichen Wirkungsbereich hinaus als ein zuverlässiger Führer bei der Aufstellung der Grundgesetze

physikalischer Vorgänge bewährt. *Es besagt, daß der wirkliche physikalische Vorgang gegenüber benachbarten Vorgängen einem gewissen „Hamiltonschen" Integrale einen stationären Wert verleiht.*

Wir wollen hier dieses Prinzip als Postulat an die Spitze stellen, um daraus die Differentialgleichungen der Physik deduktiv herzuleiten.

1. Das Hamiltonsche Prinzip in der Punktmechanik. In der Punktmechanik handelt es sich um die Bewegungen eines Systems von endlich vielen, etwa n, Freiheitsgraden. Die Lage des Systems möge durch die Werte der n Parameter $q_1, q_2, \ldots, q_n$ charakterisiert sein, deren Bestimmung als Funktion der Zeit t unser Ziel ist. Wir denken uns das System in seinen mechanischen Eigenschaften festgelegt durch seine *kinetische Energie* $T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, q_1, \ldots, q_n, t)$, welche eine Funktion der n Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$, der n Koordinaten q_i und der Zeit t ist, und zwar eine quadratische Form in den Geschwindigkeiten: $T = \sum_{i,k=1}^{n} P_{ik}(q_1, \ldots, q_n, t)\,\dot{q}_i \dot{q}_k$, und zweitens durch seine *potentielle Energie* $U(q_1, \ldots, q_n, t)$, welche wir als eine Funktion von $q_1, q_2, \ldots, q_n$ und t annehmen. Das Hamiltonsche Prinzip besagt nun: *Zwischen zwei Zeitmomenten t_0 und t_1 verläuft die Bewegung so, daß die Funktionen $q_i(t)$ das Integral*

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\,dt$$

stationär machen, verglichen mit solchen benachbarten Funktionen $\bar{q}_i(t)$, für welche $\bar{q}_i(t_0) = q_i(t_0)$ und $\bar{q}_i(t_1) = q_i(t_1)$ ist. Oder: *Die wirkliche Bewegung macht das Integral J stationär gegenüber allen benachbarten virtuellen Bewegungen, die im selben Zeitintervall von der Ausgangslage des Systems zur Endlage führen.*

Nach § 3 ergeben sich aus dem Hamiltonschen Prinzip sofort *die allgemeinen Lagrangeschen Bewegungsgleichungen*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}(T - U) = 0\,. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{98}$$

Bemerkenswert ist, daß das Hamiltonsche Prinzip seine Gültigkeit bewahrt, auch wenn zwischen den Koordinaten q_i oder den Koordinaten und ihren Ableitungen $\dot{q}_i$ Bedingungsgleichungen bestehen. In den Bewegungsgleichungen treten dann noch Multiplikatoren auf (vgl. § 6).

Den Übergang von den Bewegungsgleichungen zu den *Bedingungen des Gleichgewichts* erhalten wir unter der Voraussetzung, daß T und U von t nicht explizit abhängen, indem wir in (98) die Ableitungen nach der Zeit gleich Null setzen. Es ergibt sich

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0\,. \tag{98'}$$

Bekanntlich ist das *Gleichgewicht* dann *stabil*, wenn für das in Frage kommende Wertsystem $q_1, q_2, \ldots, q_n$ die *potentielle Energie* U *ein Minimum* besitzt (während unsere Gleichungen (98′) nur stationären Charakter ausdrücken). Wir betrachten eine stabile Gleichgewichtslage, in welcher wir sämtliche Koordinatenwerte q_i gleich Null annehmen dürfen. Beschränken wir uns nun auf solche der Gleichgewichtslage benachbarte Bewegungszustände, bei welchen wir höhere Potenzen der Koordinaten und ihrer zeitlichen Ableitungen gegen niedere vernachlässigen dürfen, so können wir — immer unter der Voraussetzung, daß t in T und U nicht explizit vorkommt — T als positiv definite quadratische Form in den $\dot{q}_i$ mit konstanten Koeffizienten a_{ik} ansehen:

$$T = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$$

und ebenso U als positiv definite quadratische Form in den q_i mit konstanten Koeffizienten b_{ik}:

$$U = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}q_iq_k\,.$$

Die Bewegungsgleichungen gehen also über in die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}q_k = 0\,,$$

welche die *„kleinen Schwingungen"* um eine stabile Gleichgewichtslage beherrschen und im nächsten Kapitel diskutiert werden sollen.

2. Schwingende Saite und schwingender Stab. Bei den Systemen der Kontinuumsmechanik, deren Lage nicht mehr durch endlich viele Koordinaten bestimmt ist, bleibt die Formulierung des Hamiltonschen Prinzips genau dieselbe; nur sind hier eben potentielle und kinetische Energie nicht mehr Funktionen von endlich vielen Veränderlichen und deren zeitlichen Ableitungen, sondern werden ihrerseits wieder durch räumliche Integrale dargestellt. Das einfachste Beispiel liefert die homogene schwingende Saite, welche in ihrer Ruhelage die Strecke $0 \leqq x \leqq l$ der x-Achse einnimmt, unter dem Einfluß einer konstanten Spannung μ steht und kleine transversale Schwingungen um die Ruhelage ausführen soll. Bezeichnen wir mit $u(x,t)$ die senkrecht zur x-Achse gemessene Entfernung eines Punktes der Saite aus seiner Ruhelage, so handelt es sich um die Bestimmung der Funktion $u(x,t)$. Wir nehmen fürs erste an, die Saite sei an den Endpunkten befestigt, d. h. es sei $u(0,t) = u(l,t) = 0$. Die kinetische Energie der Saite wird durch das Integral $\frac{1}{2}\int_0^l \varrho\, u_t^2\, dx = T$ gegeben, wenn ϱ die Massendichte

der Saite bezeichnet. Die potentielle Energie U wird proportional der Längenvergrößerung gegenüber der Länge in der Ruhe zu setzen sein, wobei der Proportionalitätsfaktor gleich der Spannung μ ist. Nun ist die Änderung der Länge $\int_0^l \sqrt{1+u_x^2}\,dx - l$ der Saite bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung gleich $\frac{1}{2}\int_0^l u_x^2\,dx$, und daher erhalten wir für die potentielle Energie den Ausdruck

$$U = \frac{\mu}{2}\int_0^l u_x^2\,dx\,.$$

Das Hamiltonsche Prinzip verlangt jetzt, das Doppelintegral

$$\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l (\varrho\,u_t^2 - \mu\,u_x^2)\,dx\,dt$$

stationär zu machen, wobei sonst die Formulierung genau wie oben bleibt[1]). Somit ergibt sich aus den allgemeinen Prinzipien der Variationsrechnung sofort die partielle Differentialgleichung der schwingenden Saite

$$\varrho\,u_{tt} - \mu\,u_{xx} = 0\,. \tag{99}$$

Genau ebenso erhalten wir die Differentialgleichung des transversal schwingenden Stabes in der Form

$$\varrho\,u_{tt} + \mu\,u_{xxxx} = 0\,, \tag{100}$$

indem wir für die potentielle Energie des Stabes den Ausdruck $\frac{\mu}{2}\int_0^l u_{xx}^2\,dx$ von S. 147 zugrunde legen.

Wirkt eine äußere Kraft $f(x,t)$ auf die Saite oder den Stab, so tritt zu dem Ausdruck der potentiellen Energie noch das Zusatzglied $\int_0^l f(x,t)\,u\,dx$ hinzu, so daß wir jetzt als Differentialgleichung

$$\varrho\,u_{tt} - \mu\,u_{xx} - f(x,t) = 0 \tag{101}$$

bzw.

$$\varrho\,u_{tt} + \mu\,u_{xxxx} - f(x,t) = 0 \tag{102}$$

gewinnen. Die Gleichgewichtslagen unter dem Einfluß der äußeren zeitlich konstanten Kraft $f(x)$ genügen also den Differentialgleichungen

$$f = -\mu\,u_{xx} \quad \text{bzw.} \quad f = \mu\,u_{xxxx}\,.$$

[1]) D. h. also: Die dem wirklichen Vorgang entsprechende Funktion $u(x,t)$ macht das Integral des Textes stationär im Vergleich mit allen solchen benachbarten Funktionen $\bar{u}(x,t)$, für welche $\bar{u}(x,t_0)$ und $\bar{u}(x,t_1)$ als Funktionen von x betrachtet mit $u(x,t_0)$ bzw. $u(x,t_1)$ identisch sind.

Anstatt bei unseren Problemen Randbedingungen vorzuschreiben, wie z. B. $u(0) = u(l) = 0$ bei der Saite (eingespannte Saite) oder $u(0) = u_x(0) = u(l) = u_x(l) = 0$ beim Stabe (eingespannter Stab), können wir auch die Ränder frei lassen, wobei sich nach den Methoden von § 5 (siehe auch § 8, 5) die natürlichen Randbedingungen

(103) $$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$$

bzw.

(104) $$u_{xx}(0,t) = u_{xx}(l,t) = 0\,, \quad u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(l,t) = 0$$

ergeben.

Sind die Endpunkte der Saite nicht absolut fest, sondern durch elastische Kräfte festgehalten, so tritt zu den Ausdrücken für die potentielle Energie von den Endpunkten her noch je ein Term $h_1 \frac{\mu}{2} u^2(0,t)$ bzw. $h_2 \frac{\mu}{2} u^2(l,t)$. Diese Terme ändern die Bewegungsgleichung (99) nicht, wohl aber ergeben sich jetzt wie in § 5, 2 die Randbedingungen

$$u_x(0,t) = h_1 u(0,t)\,, \qquad u_x(l,t) = -h_2 u(l,t)\,.$$

3. Schwingende Membran und Platte. Prinzipiell nicht anders liegen die Verhältnisse bei der ebenen Membran und Platte. Unter einer Membran verstanden wir einen flächenhaften, in der Ruhelage ebenen elastischen Körper, dessen potentielle Energie proportional der Vergrößerung des Flächeninhalts sich ändert, wobei wir den Proportionalitätsfaktor als Spannung bezeichnen. Platte nannten wir einen flächenhaften elastischen Körper, dessen potentielle Energie durch einen Ausdruck der Form (3) aus § 1, 2 g gegeben wird. Indem wir die potentielle Energie einer Membran wie in § 1, 2 f ausdrücken und für die kinetische den Ausdruck $T = \frac{1}{2}\iint_G \varrho\, u_t^2\, dx\, dy$ heranziehen, wobei ϱ die Massendichte bedeutet, erhalten wir als Hamiltonsches Integral

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\iint_G [\varrho\, u_t^2 - \mu\,(u_x^2 + u_y^2)]\, dx\, dy\, dt\,,$$

allgemeiner, wenn eine äußere Kraft $f(x, y, t)$ wirkt,

$$\int_{t_0}^{t_1}\iint_G \left[\frac{\varrho}{2} u_t^2 - \frac{\mu}{2}(u_x^2 + u_y^2) - f(x,y,t)\, u\right] dx\, dy\, dt$$

und noch allgemeiner, wenn der Rand der Membran nicht fest ist, sondern durch elastische Kräfte in seiner Ruhelage gehalten wird,

$$\int_{t_0}^{t_1}\iint_G \left[\frac{\varrho}{2} u_t^2 - \frac{\mu}{2}(u_x^2 + u_y^2) - f(x,y,t)\, u\right] dx\, dy\, dt - \frac{\mu}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_\Gamma \sigma u^2\, ds\, dt\,,$$

wobei s die Bogenlänge auf der Randkurve bedeutet und die Funktion $\sigma(s)$ die elastische Bindung am Randpunkte s mißt.

Die Eulersche Differentialgleichung des Problems lautet

$$\mu \Delta u - \varrho u_{tt} - f(x, y, t) = 0, \tag{105}$$

und die natürlichen Randbedingungen werden nach § 5, 2

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0. \tag{106}$$

Für die Gleichgewichtslage einer Membran unter dem Einfluß einer Kraft $f(x, y)$ ergibt sich die Differentialgleichung

$$\mu \Delta u - f(x, y) = 0.$$

Ganz ebenso führt der Ausdruck (93′) auf S. 206 für die potentielle Energie einer Platte zu der Differentialgleichung der schwingenden Platte

$$\Delta \Delta u + \varrho u_{tt} = 0, \tag{107}$$

wobei sich für freie Ränder nach den Formeln (95), (96) von § 8 die natürlichen Randbedingungen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial n} \Delta u + (1-\mu) \dfrac{\partial}{\partial s} [\cos\vartheta \sin\vartheta (u_{yy} - u_{xx}) + (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) u_{xy}] = 0 \\ \mu \Delta u + (1-\mu)(\cos^2\vartheta u_{xx} + \sin^2\vartheta u_{yy} + 2\cos\vartheta \sin\vartheta u_{xy}) = 0 \end{cases} \tag{108}$$

ergeben, während der eingespannten Platte die Randbedingungen

$$u = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \tag{109}$$

entsprechen, der gestützten Platte, d. h. der Platte, bei welcher zwar der Rand, nicht aber dort die Tangentialebene festgehalten ist, die Randbedingungen

$$u = 0, \quad \mu \Delta u + (1-\mu)(\cos^2\vartheta u_{xx} + \sin^2\vartheta u_{yy} + 2\cos\vartheta \sin\vartheta u_{xy}) = 0 \tag{110}$$

zugehören. Wir beachten hierbei, daß der Ausdruck $u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2$ als Divergenzausdruck zwar auf die Eulersche Differentialgleichung (107) keinen Einfluß hat, aber für die Gestalt der natürlichen Randbedingungen entscheidend ist.

§ 10. Ergänzungen und Aufgaben zum vierten Kapitel.

1. Geometrische Deutung des Multiplikators von Lagrange. Man kann sich in dem einfachen Falle der Differentialrechnung den Multiplikator λ bei Problemen mit Nebenbedingungen folgendermaßen veranschaulichen. Es sei $f(x, y)$ zum Maximum zu machen unter der Bedingung $g(x, y) = 0$. Das Problem besteht darin, in der Kurvenschar $f(x, y) = c$ eine solche Kurve zu finden, die die Kurve $g(x, y) = 0$ berührt. Der Parameter λ charakterisiert die gemeinsame Tangentenrichtung. (Man beachte jedoch die singulären Fälle.)

2. Variationsproblem zu gegebener Differentialgleichung. Zu einer gegebenen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = f(x, y, y')$ läßt sich stets eine Funktion $F(x, y, y')$ finden, so daß $[F]_y = 0$ nach y'' aufgelöst mit der Differentialgleichung identisch ist. Vgl. *Bolza, O.:* Vorlesungen über Variationsrechnung, S. 37—39.

3. Reziprozität bei isoperimetrischen Problemen. Die Extremalen des Problems $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx = \text{Extr.}$ unter der Bedingung $K = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\, dx = \text{konst.}$ sind dieselben wie die des Problems $K = \text{Extr.}$, $J = \text{konst.}$, abgesehen von dem singulären Fall (§ 6, 1).

4. Kreisförmige Lichtstrahlen. Ist die Geschwindigkeit des Lichtes proportional zu y, so sind die Lichtstrahlen Kreise um Punkte der x-Achse als Mittelpunkte.

5. Das Problem der Dido, mit einer Kurve von gegebener Länge ein möglichst großes Gebiet zu umspannen, werde dahin abgeändert, daß das Land nicht überall gleich wertvoll ist, sondern etwa die Fruchtbarkeit eine Funktion $\varrho(x, y)$ des Ortes ist. Es handelt sich also darum, dem Integral $\iint_G \varrho\, dx\, dy$, erstreckt über das umspannte Gebiet, einen möglichst großen Wert zu erteilen. Man stelle die Differentialgleichung der Extremalen auf.

6. Beispiel eines räumlichen Problems. Die Kugel ist diejenige geschlossene Fläche, die unter allen Flächen, welche das gleiche Volumen einschließen, den kleinsten Flächeninhalt hat. (Literaturangaben bei *Blaschke, W.:* Kreis und Kugel. Leipzig 1916.)

Fragt man nach der Fläche mit kleinstem Inhalt, die bei gegebener Randkurve mit einer gegebenen, von derselben Randkurve begrenzten Fläche ein gegebenes Volumen begrenzt, so ergeben sich als Extremalen die Flächen konstanter mittlerer Krümmung. Läßt man die Nebenbedingung bezüglich des Volumens fortfallen, so kommt man auf die schon in § 3, 4 aufgestellte Differentialgleichung der *Minimalflächen*

$$(1 + z_y^2)\, z_{xx} - 2\, z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2)\, z_{yy} = 0,$$

die das Verschwinden der mittleren Krümmung anzeigt.

7. Das isoperimetrische Problem auf einer krummen Fläche hat als Lösungen die Kurven konstanter geodätischer Krümmung. (Vgl. *Blaschke, W.:* Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie, Bd. 1, S. 99—100. Berlin 1921).

8. Beispiel eines allgemeinen Mayerschen Problems. Ein schwerer Punkt falle auf einer gegebenen Kurve in einem Medium, das der

Bewegung einen von der Geschwindigkeit v abhängenden Widerstand $R(v)$ entgegensetzt. Wie muß die Kurve zwischen zwei gegebenen Punkten gewählt werden, damit bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit die Endgeschwindigkeit ein Maximum wird? (Vgl. *Bolza, O.:* Vorlesungen über Variationsrechnung, S. 578—580.)

9. Die Indikatrix und ihre Anwendungen[1]. Bei dem Problem, das Integral $\int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt$ zum Extremum zu machen ($\mathfrak{F}$ ist positiv-homogen erster Ordnung in $\dot{x}, \dot{y}$), betrachten wir bei festen x, y die Kurve

$$\mathfrak{F}(x, y, \xi, \eta) = 1$$

in der ξ, η-Ebene. Sie heißt *Eichkurve* oder *Indikatrix*. An ihr lassen sich viele wichtige Beziehungen geometrisch deuten. Ganz entsprechend ist beim räumlichen Problem $\mathfrak{F}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 1$ die Gleichung der Eichfläche im ξ, η, ζ-Raum.

Die Richtung $(\delta x, \delta y)$ ist transversal zu $(\dot{x}, \dot{y})$, wenn $\mathfrak{F}_{\dot{x}} \delta x + \mathfrak{F}_{\dot{y}} \delta y = 0$ ist. Nun ist aber die Gleichung der Tangente an die Eichkurve im Punkt $\left(\frac{\dot{x}}{\mathfrak{F}}, \frac{\dot{y}}{\mathfrak{F}}\right)$:

$$\left(\xi - \frac{\dot{x}}{\mathfrak{F}}\right)\mathfrak{F}_{\dot{x}} + \left(\eta - \frac{\dot{y}}{\mathfrak{F}}\right)\mathfrak{F}_{\dot{y}} = 0$$

oder

$$\xi \mathfrak{F}_{\dot{x}} + \eta \mathfrak{F}_{\dot{y}} = 1 .$$

Also ist die transversale Richtung die der Tangente an die Eichkurve im Treffpunkt mit der Halbgeraden, die vom Nullpunkt nach dem Punkt $\dot{x}, \dot{y}$ führt. Fragen wir z. B., bei welchen Problemen Transversalität senkrechtes Schneiden bedeutet, so sehen wir, daß die Eichkurve die Geraden durch den Nullpunkt senkrecht schneiden, d. h. daß sie ein Kreis um den Nullpunkt sein muß. Wegen der Homogenität folgt daraus $\mathfrak{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \varphi(x, y)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. Soll die Beziehung zwischen Extremalen und Transversalenrichtung symmetrisch sein, so muß, wenn man zur Tangente in einem Punkt P der Eichkurve die Parallele durch den Nullpunkt O zieht, die Tangente in ihrem Schnittpunkt mit der Eichkurve parallel zu OP sein.

Besonders lehrreich ist die Betrachtung an der Eichkurve bei der Behandlung der *gebrochenen Extremalen*. Wir fragen, wann eine Kurve, die den Punkt (x_0, y_0) mit (x, y) verbindet und hier in der Richtung $(\dot{x}^-, \dot{y}^-)$ eintrifft, dann in der Richtung $(\dot{x}^+, \dot{y}^+)$ weitergeht und in (x_2, y_2) endigt, ein Extremum liefern kann. Auf den Stücken, wo die Kurve eine stetig veränderliche Tangente hat, muß sie wie immer den Eulerschen Gleichungen genügen. Um die Verhältnisse an der Knick-

[1]) Vgl. *Carathéodory, C.:* Über die starken Maxima und Minima bei einfachen Integralen. Math. Ann. Bd. 62, S. 449—503. 1906.

stelle zu untersuchen, denken wir die Extremale als Glied einer Schar ebenfalls gebrochener Kurven

$$x(t) + \varepsilon\xi(t), \qquad y(t) + \varepsilon\eta(t)$$

mit stetig differenzierbaren, an den Enden verschwindenden Funktionen ξ und η, und bilden die erste Variation, d. h. differenzieren nach ε und setzen $\varepsilon = 0$. Tun wir dies für die beiden Bögen einzeln, so bleiben nur die dem Knickpunkt zukommenden Randglieder stehen; die äußeren Randglieder verschwinden, da wir die Endpunkte festhalten, die Integrale wegen der Extremaleneigenschaft der Bögen. Es bleibt also

$$\xi(t_1)\mathfrak{F}_{\dot{x}}(x_1, y_1, \dot{x}_1^-, \dot{y}_1^-) + \eta(t_1)\mathfrak{F}_{\dot{y}}(x_1, y_1, \dot{x}_1^-, \dot{y}_1^-)$$
$$- \xi(t_1)\mathfrak{F}_{\dot{x}}(x_1, y_1, \dot{x}_1^+, y_1^+) - \eta(t_1)\mathfrak{F}_{\dot{y}}(x_1, y_1, \dot{x}_1^+, \dot{y}_1^+) = 0,$$

und da $\xi(t_1)$ und $\eta(t_1)$ willkürlich sind, so folgt die *„Weierstraß-Erdmannsche* Eckenbedingung"

$$\mathfrak{F}_{\dot{x}}(x_1, y_1, \dot{x}_1^-, \dot{y}_1^-) = \mathfrak{F}_{\dot{x}}(x_1, y_1, \dot{x}_1^+, \dot{y}_1^+),$$
$$\mathfrak{F}_{\dot{y}}(x_1, y_1, \dot{x}_1^-, \dot{y}_1^-) = \mathfrak{F}_{\dot{y}}(x_1, y_1, \dot{x}_1^+, \dot{y}_1^+);$$

d. h. die Tangenten in den Treffpunkten der Vektoren $(\dot{x}_1^-, \dot{y}_1^-)$ und $(\dot{x}_1^+, \dot{y}_1^+)$ mit der Eichkurve fallen zusammen. Die beiden Richtungen der Kurve im Knickpunkt sind die der Strahlen vom Ursprung nach den Berührungspunkten einer Doppeltangente der Eichkurve.

Weitere Anwendungen der Eichkurve werden in einem späteren Kapitel vorkommen.

10. Gleichzeitige Variation der abhängigen und unabhängigen Variablen. Es sei G ein Gebiet der x, y-Ebene und

$$J = \int F(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy$$

ein darüber erstrecktes Integral. Wir wollen die Werte von u als Ordinaten senkrecht zur x,y-Ebene deuten. In § 3 gelangten wir zur ersten Variation, indem wir u durch $u + \varepsilon\zeta$ ersetzten, wo ζ eine Funktion von x und y ist, die am Rande von G verschwindet bzw. anderen vorgeschriebenen Randbedingungen genügt. Die Funktionenschar $u + \varepsilon\zeta$ stellt geometrisch eine Flächenschar vor; dabei sind die Punkte zweier Flächen der Schar einander derart zugeordnet, daß je ein Punkt der einen Fläche dem senkrecht über bzw. unter ihm liegenden der anderen entspricht. Man kann natürlich unter Beibehaltung derselben Flächenschar die gegenseitige Zuordnung der Punkte der verschiedenen Flächen auch in anderer Weise herstellen; alsdann redet man von *gleichzeitiger Variation der unabhängigen und der abhängigen Variablen.* Eine solche allgemeine Zuordnung ergibt sich von selbst, wenn man das Variationsproblem in Parameterdarstellung (§ 3, 6) behandelt. Für

manche Zwecke (vgl. z. B. § 10, 11) ist es aber vorteilhaft, ohne auf die Parameterdarstellung zurückzugehen, explizite Formeln für die Variation eines Integrals bei gleichzeitiger Variation der abhängigen und unabhängigen Variablen zur Hand zu haben. Wir ersetzen in J einfach x, y, u durch $x + \varepsilon\xi(x,y)$, $y + \varepsilon\eta(x,y)$, $u(x,y) + \varepsilon\zeta(x,y)$, wo ξ, η, ζ mit ihren Ableitungen in G stetige Funktionen sind, die den für die Aufgabe vorgeschriebenen Randbedingungen entsprechend gewählt sind, und bilden $\delta J = \varepsilon \frac{\partial J}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$. Indem wir unter $\bar{\delta}$ die Variation verstehen, die entstünde, wenn ξ und η identisch Null wären, und für $\varepsilon\xi$ bzw. $\varepsilon\eta$, die *„Variationen der unabhängigen Veränderlichen"*, der Kürze halber δx bzw. δy schreiben, ergibt sich

$$\delta J = \iint_G \left\{ \bar{\delta} F + \frac{\partial}{\partial x}(F\,\delta x) + \frac{\partial}{\partial y}(F\,\delta y) \right\} dx\,dy$$

$$= \iint_G \Big\{ [F]_u\,\delta u + \frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\,\delta u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\,\delta u_y) + \frac{\partial}{\partial x}(F\,\delta x) + \frac{\partial}{\partial y}(F\,\delta y) \Big\}\, dx\,dy .$$

Ähnliche Formeln gelten natürlich bei mehr unabhängigen und abhängigen Veränderlichen.

11. Die Sätze von E. Noether über invariante Variationsprobleme. Integrale in der Punktmechanik[1]). Das Integral

$$J = \iint_G F(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y)\, dx\,dy$$

bleibe bei den Transformationen einer kontinuierlichen Gruppe

$$\begin{aligned} x' &= X(x, y, u, v, \alpha) \\ y' &= Y(x, y, u, v, \alpha) \\ u' &= U(x, y, u, v, \alpha) \\ v' &= V(x, y, u, v, \alpha) \end{aligned}$$

ungeändert, d. h. es sei

$$J' = \iint_{G'} F(x', y', u', v', u'_{x'}, u'_{y'}, v'_{x'}, v'_{y'})\, dx'\,dy' = \iint_G F\,dx\,dy ,$$

worin G' das Gebiet ist, das der Punkt (x', y') durchläuft, wenn (x, y) das Gebiet G durchläuft. Dem Werte Null des Parameters α entspreche die identische Transformation. Wir untersuchen den Einfluß einer infinitesimalen Transformation auf das Integral J', d. h. wir differenzieren

[1]) *Noether, E.:* Invariante Variationsprobleme. Nachr. Ges. Göttingen (math.-phys.), S. 235–257. 1918.

es nach α und setzen $\alpha = 0$. Schreiben wir allgemein $\mathrm{D}f$ statt $\left.\frac{\partial f(x', y', u', v')}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}$, so wird nach der Formel für die gleichzeitige Variation der unabhängigen und der abhängigen Veränderlichen (Nr. 10)

$$\mathrm{D}J = \iint_G ([F]_u \mathrm{D}u + [F]_v \mathrm{D}v + (F_{u_x}\mathrm{D}u)_x + (F_{u_y}\mathrm{D}u)_y + (F_{v_x}\mathrm{D}v)_x + (F_{v_y}\mathrm{D}v)_y + F_x \mathrm{D}x + F_y \mathrm{D}y + F(\mathrm{D}x)_x + F(\mathrm{D}y)_y)\, dx\, dy = 0.$$

Da dies für jedes Integrationsgebiet gilt, so ist

$$[F]_u \mathrm{D}u + [F]_v \mathrm{D}v = (-F_{u_x}\mathrm{D}u - F_{v_x}\mathrm{D}v - F\mathrm{D}x)_x + (-F_{u_y}\mathrm{D}u - F_{v_y}\mathrm{D}v - F\mathrm{D}y)_y,$$

d. h. die links stehende lineare Kombination der Eulerschen Differentialausdrücke wird gleich dem „Divergenzausdruck" auf der rechten Seite. Die Übertragung auf eine oder mehr als zwei unabhängige Variable oder gesuchte Funktionen liegt auf der Hand. Bei einer unabhängigen Variablen erhält man durch Integration für die Extremalen ein erstes Integral

$$F_{u_x}\mathrm{D}u + F_{v_x}\mathrm{D}v + F\mathrm{D}x = \text{konst.}$$

oder in gewohnter Bezeichnung

$$F_{y'}\mathrm{D}y + F_{z'}\mathrm{D}z + F\mathrm{D}x = \text{konst.},$$

worin aus den Gleichungen der Transformationsgruppe:

$$x' = X(x, y, z, \alpha), \quad y' = Y(x, y, z, \alpha), \quad z' = Z(x, y, z, \alpha)$$

die Ausdrücke

$$\mathrm{D}x = \left.\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}, \quad \mathrm{D}y = \left.\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}, \quad \mathrm{D}z = \left.\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}$$

als Funktionen von x, y und z bekannt sind.

Man bestätige dies an den Beispielen in § 4, indem man aus den hier gegebenen Formeln das erste Integral $F - y'F_{y'} = \text{konst.}$ ableitet.

Kennt man eine mehrere Parameter enthaltende Schar von Transformationen, die das Integral J ungeändert lassen, so erhält man ebensoviele linear unabhängige Kombinationen der Eulerschen Ausdrücke in Divergenzgestalt, bzw. ebensoviele linear unabhängige erste Integrale.

Diese Tatsachen werden erläutert durch die *Integrale der Punktmechanik*. Die Bewegung eines freien Massensystems wird gegeben durch

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt = \text{Min.},$$

worin $T = \frac{1}{2}\sum m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ ist und die potentielle Energie nur von der gegenseitigen Lage der Massenpunkte abhängt, d. h. sich bei Lagenänderung des gesamten Systems nicht ändert.

Daher haben wir z. B. die infinitesimalen Transformationen

$$\mathsf{D}x = 1\,, \qquad \mathsf{D}y = \mathsf{D}z = \mathsf{D}t = 0$$

oder

$$\mathsf{D}x = y\,, \qquad \mathsf{D}y = -x\,, \qquad \mathsf{D}z = \mathsf{D}t = 0\,.$$

Daraus folgt nach dem obigen

$$T_{\dot{x}} = \sum m\dot{x} = \text{konst.}\,,$$
$$y\,T_{\dot{x}} - x\,T_{\dot{y}} = \sum m\,(y\dot{x} - x\dot{y}) = \text{konst.}\,;$$

das ist mit den durch Vertauschung der x, y, z entstehenden Integralen zusammen der *Schwerpunkt- bzw. der Flächensatz.*

Ähnlich ergibt sich das *Energieintegral,* falls T und U die Zeit nicht explizit enthalten, aus der Bemerkung, daß das Integral $\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt$ die Transformation $t' = t + \alpha$, $\mathsf{D}t = 1$ gestattet.

Näheres siehe bei *Bessel-Hagen, E.:* Über die Erhaltungssätze der Elektrodynamik, Math. Ann. Bd. 84, S. 258—276. 1921.

Bleibt das Integral J ungeändert bei Transformationen, die eine willkürliche Funktion p der unabhängigen Variablen und ihre Ableitungen bis zur k^{ten} Ordnung enthält

$$x' = X\Big(x, y, u, v, p\,(x,y), \frac{\partial}{\partial x}p\,(x,y), \ldots, \frac{\partial^k}{\partial y^k}p\,(x,y)\Big)\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so erhält man eine identisch verschwindende Linearkombination der Eulerschen Ausdrücke und ihrer totalen Ableitungen bis zur k^{ten} Ordnung, d. h. die Eulerschen Gleichungen sind nicht unabhängig voneinander.

Das einfachste Beispiel ist die homogene Form der einfachen Integrale

$$J = \int_{t_0}^{t_1}\mathfrak{F}\,(x, y, \dot{x}, \dot{y})\,dt\,.$$

Das Integral ändert sich nicht, wenn man t, $x\,(t)$, $y\,(t)$, $\dot{x}\,(t)$, $\dot{y}\,(t)$ ersetzt durch $t\,(\tau)$, $x\,(t\,(\tau))$, $y\,(t\,(\tau))$, $\frac{dx\,(t(\tau))}{d\tau}$, $\frac{dy\,(t(\tau))}{d\tau}$. Demgemäß sind die Eulerschen Ausdrücke $[\mathfrak{F}]_x$, $[\mathfrak{F}]_y$ verbunden durch die Beziehung

$$\dot{x}\,[\mathfrak{F}]_x + \dot{y}\,[\mathfrak{F}]_y = 0\,.$$

(Vgl. Formel (31) auf S. 176.)

Betreffs genauerer Angaben, Verallgemeinerungen und Anwendungen in der Mechanik, Elektrodynamik und Relativitätstheorie vergleiche

man den oben genannten Aufsatz von *E. Noether* und die dort angegebenen Arbeiten.

12. Transversalität bei mehrfachen Integralen. Soll das Integral

$$\iint_G F(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v)\, du\, dv$$

zum Minimum werden unter der Bedingung, daß der Rand der Fläche $[x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)]$ auf einer gegebenen Fläche $\varphi(x,y,z) = 0$ liegt, so findet man durch formale Übertragung des bei Kurven angewandten Verfahrens die Randbedingung

$$\begin{vmatrix} F_{x_u} & F_{x_v} & \varphi_x \\ F_{y_u} & F_{y_v} & \varphi_y \\ F_{z_u} & F_{z_v} & \varphi_z \end{vmatrix} = 0\,;$$

doch ist die Notwendigkeit dieser Bedingung bisher noch nicht bewiesen worden. (Vgl. *Bolza, O.:* Vorlesungen über Variationsrechnung, S. 670.)

13. Eulersche Differentialausdrücke auf krummen Flächen. Ist $p = p(\xi,\eta)$, $q = q(\xi,\eta)$, $r = r(\xi,\eta)$ die Parameterdarstellung einer krummen Fläche im p,q,r-Raume, $ds^2 = e\,d\xi^2 + 2f\,d\xi\,d\eta + g\,d\eta^2$ das Linienelement auf der Fläche, so wird der Ausdruck

$$Q[u,u] = \frac{g\,u_\xi^2 - 2f\,u_\xi u_\eta + e\,u_\eta^2}{eg - f^2}$$

unabhängig von der Wahl der Parameter. Der zu dem Oberflächenintegral

$$\iint_G Q[u,u]\sqrt{eg - f^2}\, d\xi\, d\eta$$

gehörige Eulersche Differentialausdruck ist

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{g\,u_\xi - f\,u_\eta}{\sqrt{eg - f^2}}\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{-f\,u_\xi + e\,u_\eta}{\sqrt{eg - f^2}}\right],$$

und

$$\frac{\Delta u}{\sqrt{eg - f^2}}$$

ist von der Parameterwahl unabhängig. Mit diesen Ausdrücken für $Q[u,u]$ und Δu gelten dieselben Greenschen Formeln, die in § 9 abgeleitet wurden. (Vgl. *Hurwitz-Courant:* Funktionentheorie, Abschn. III, Kap. V, § 16, S. 385—391.)

14. Tetrazyklische und pentasphärische Koordinaten. Die elliptischen Koordinaten in der Ebene und im Raume lassen noch eine Verallgemeinerung zu, die zu ähnlichen Ausdrücken für das Linienelement

und die Potentialgleichung führt. Es sind dies die tetrazyklischen Koordinaten in der Ebene und die pentasphärischen im Raume. An Stelle der konfokalen Kurven bzw. Flächen zweiter Ordnung treten solche von vierter Ordnung, *Scharen konfokaler Zykliden. Diese Kurven bzw. Flächen sind geometrisch charakterisiert als Kurven bzw. Flächen vierter Ordnung, welche die imaginären Kreispunkte der Ebene bzw. den Kugelkreis des Raumes als Doppelpunkte bzw. Doppelkurve enthalten.*

(Vgl. *Klein, F.:* Einleitung in die höhere Geometrie, Vorlesungen von 1892/93, 2. Aufl. Leipzig 1907 und *Bôcher, M.:* Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie. Leipzig 1894.)

Literatur zum vierten Kapitel.

Wegen ausführlicherer Literaturangaben sei auf die vorzügliche Bibliographie von *Lecat* verwiesen:

Lecat, M.: Bibliographie du calcul des variations 1850—1913. Gand-Paris 1913.
Lecat, M.: Bibliographie du calcul des variations depuis les origines jusqu'à 1850 comprenant la liste des travaux, qui ont préparé ce calcul. Gand-Paris 1916.

Hier seien nur die wichtigsten Lehrbücher genannt:

Lehrbücher und Zusammenfassungen.

Enzyklopädie der math. Wiss., folgende Artikel:

Kneser, A.: Variationsrechnung. Bd 2 A, Artikel 8, S. 571—625. Abgeschlossen 1900.
Zermelo, E. und *H. Hahn:* Weiterentwicklung der Variationsrechnung in den letzten Jahren. Bd. 2 A, Artikel 8a, S. 626—641. Abgeschlossen 1904.
Hellinger, E.: Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua. Bd. 4 D, Artikel 30, S. 601—694. Abgeschlossen 1913.

Französische Ausgabe der Enzyklopädie:

Lecat, M.: Calcul des variations, Tome II, vol. 6, Artikel 31. S. 1—288. Abgeschlossen 1913.

Moigno, M. et *L. L. Lindelöf:* Calcul des variations. Paris 1861.
Kneser, A.: Lehrbuch der Variationsrechnung. Braunschweig 1900.
Bolza, O.: Vorlesungen über Variationsrechnung. Leipzig und Berlin 1909.
Hadamard, J.: Leçons sur le calcul des variations I. Paris 1910.
Tonelli, L.: Fondamenti di Calcolo delle Variazioni I. Bologna 1921.

Fünftes Kapitel.

Die Schwingungs- und Eigenwertprobleme der mathematischen Physik.

§ 1. Allgemeine Bemerkungen über lineare Differentialgleichungen.

1. Das Superpositionsprinzip. Die Differentialgleichungsprobleme der mathematischen Physik, mit denen wir uns nunmehr beschäftigen wollen, tragen alle linearen Charakter. Wir schicken daher einige allgemeine Bemerkungen über lineare Differentialgleichungen voraus. Linear heißt eine Differentialgleichung für eine unbekannte Funktion $u(x, y, \ldots)$ der unabhängigen Variablen $x, y, \ldots$ (deren Anzahl natürlich auch 1 sein kann), wenn sie die Form hat

$$L[u] = A\,u + B\,u_x + \cdots + C\,u_{xx} + \cdots = D,$$

wobei $A, B, \ldots, D$ gegebene Funktionen von $x, y, \ldots$ sind und links ein homogener Ausdruck in u und den Ableitungen $u_x, \ldots u_{xx}, \ldots$ steht. Ist die rechte Seite D identisch Null, so spricht man von einer homogenen, sonst von einer unhomogenen Gleichung.

Die Lösungen der homogenen Gleichung besitzen die fundamentale Superpositionseigenschaft: *Wenn u_1, u_2 zwei Lösungen sind, so ist für willkürliche Werte der Konstanten c_1, c_2 auch $c_1 u_1 + c_2 u_2$ eine Lösung.* Allgemeiner kann man beliebig viele partikuläre Lösungen $u_1, u_2, \ldots$ mit Konstanten $c_1, c_2, \ldots$ zu einer neuen Lösung $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots$ kombinieren. Eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$, die aus einer unendlichen Folge $u_1, u_2, \ldots$ von Lösungen zusammengesetzt ist, stellt dann gewiß eine Lösung dar, wenn sich die Differentialoperation $L[u]$ gliedweise auf die Summe anwenden läßt.

Kennt man eine Lösung $u(x, y, \ldots; \alpha)$ der Differentialgleichung $L[u] = 0$, welche noch von einem willkürlichen Parameter α abhängt, so kann man sich neue Lösungen in folgender Form verschaffen:

$$v = \int w(\alpha)\, u(x, y, \ldots; \alpha)\, d\alpha, \tag{1}$$

wobei $w(\alpha)$ eine willkürliche Funktion ist, das Integrationsgebiet willkürlich gewählt werden kann und nur die Einschränkung zu machen ist, daß das Integral (1) *existiert und die Ausführung des Prozesses L unter dem Integral gestattet ist,* was jedenfalls bei stückweise stetigem $w(\alpha)$ und endlich bleibendem Integrationsgebiet zutrifft.

Beherrscht man die homogene Gleichung vollständig, so braucht man zur Beherrschung der unhomogenen nur die Kenntnis einer einzigen Lösung; denn man erhält alle Lösungen der unhomogenen Gleichung durch Addition einer speziellen zu allen Lösungen der homogenen.

2. Homogene und unhomogene Randbedingungen. Im folgenden werden wir fast stets die Lösungen unserer Differentialgleichungen durch lineare homogene Randbedingungen festzulegen suchen, d. h. durch die Forderung, daß zwischen den Werten, welche die gesuchte Funktion u und ihre Ableitungen $u_x, \ldots$ bei Annäherung an den Rand Γ des betrachteten Gebietes G annehmen, gegebene homogene lineare Bedingungsgleichungen erfüllt sind. Die einfachste solche Bedingung ist $u = 0$, oder auch $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, unter $\frac{\partial}{\partial n}$ wie sonst Differentiation in Richtung der äußeren Normalen verstanden.

Liegen für u lineare unhomogene Randbedingungen vor, z. B. $u = f$, wo mit f vorgegebene nicht überall verschwindende Randwerte bezeichnet sind, so können wir folgendermaßen zu einem äquivalenten Problem mit homogenen Randbedingungen gelangen. Wir nehmen an, es handelt sich um die homogene Gleichung $L[u] = 0$ und es lassen sich die Randwerte f stetig so ins Innere von G fortsetzen, daß $L[f] = g$ eine in G stetige Funktion des Ortes wird; dann erhalten wir für $v = f - u$ sofort die Differentialgleichung $L[v] = g$ mit der homogenen Randbedingung $v = 0$. Allgemein können wir sagen: *Eine homogene Differentialgleichung mit unhomogenen Randbedingungen ist äquivalent einer unhomogenen Differentialgleichung mit homogenen Randbedingungen.*

§ 2. Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad.

1. Integration der Differentialgleichung. Das allereinfachste Beispiel eines Schwingungsproblems bietet das schwingungsfähige System mit einem einzigen, durch die Koordinate q charakterisierten Freiheitsgrade. Die Differentialgleichung lautet $m\ddot{q} + cq = k(t)$ [1]), wobei m die Masse, c die „elastische Kraft" und $k(t)$ die äußere Kraft ist. (Man denke z. B. an die kleinen Schwingungen eines Pendels, einer Magnetnadel, einer Feder, wobei q die Winkel- bzw. Längenänderung von der Ruhelage aus

[1]) Mit Punkten über einem Buchstaben wird die Differentiation nach t bezeichnet.

bedeutet.) Wenn das System eine der Geschwindigkeit $\dot{q}$ proportionale Reibung $\varkappa \dot{q}$ aufweist, so wird diese als negativer Zusatz zur äußeren Kraft aufgefaßt werden können, so daß die Differentialgleichung dann allgemein die Form annimmt

$$m\ddot{q} + \varkappa \dot{q} + c q = k(t), \tag{2}$$

wobei $m, \varkappa, c$ positive Konstanten sind. *Die homogene Gleichung* wird gelöst durch den Ansatz $q = e^{\varrho t}$, welcher für ϱ die quadratische Gleichung $m\varrho^2 + \varkappa \varrho + c = 0$ mit den beiden Wurzeln $\varrho = -\frac{\varkappa}{2m} \pm \sqrt{\frac{\varkappa^2 - 4mc}{4m^2}}$ liefert. Nur wenn diese beiden Wurzeln imaginär sind, wenn also $\varkappa^2 - 4mc < 0$ ist, stellt die Differentialgleichung einen Schwingungsvorgang dar; setzen wir dann

$$\frac{\varkappa}{2m} = \delta, \quad \sqrt{\frac{\varkappa^2 - 4mc}{4m^2}} = i\nu,$$

so erhalten wir die beiden Lösungen $e^{-\delta t} e^{\pm i\nu t}$ oder durch Übergang zu reellen Größen

$$e^{-\delta t}\cos \nu t, \qquad e^{-\delta t}\sin \nu t,$$

woraus sich als allgemeine Lösung

$$q = (c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t)\, e^{-\delta t} = a\, e^{-\delta t}\cos \nu (t - \varphi)$$

mit den Integrationskonstanten c_1, c_2 bzw. a, φ ergibt. Die Zahlen a, φ geben *Amplitude* und *Phase* der Schwingung, die Zahl δ die *Dämpfung* oder das *logarithmische Dekrement*. Die Zahl ν heißt die *Frequenz der Eigenschwingung*. Ist die Dämpfung δ gleich Null, so erhält man die reinen ungedämpften *Sinusschwingungen*.

Auf der Tatsache, daß die trigonometrischen Funktionen $\sin \nu t$, $\cos \nu t$ die Lösungen des einfachsten Schwingungsproblems liefern, beruht ganz wesentlich ihre eminente Bedeutung für die mathematische Physik.

Die Lösung der unhomogenen Gleichung erhalten wir in einer für praktische Zwecke vielfach sehr nützlichen Form, wenn wir zunächst den speziellen Fall einer periodisch mit der Frequenz ω einwirkenden Kraft $k(t) = k e^{i\omega t}$ betrachten, wobei die komplexe Schreibweise wiederum nur zu einer bequemeren und kürzeren Herleitung reeller Resultate dient und k als reell vorausgesetzt wird[1]). Indem wir für die Lösung q den Ansatz $q = \alpha e^{i\omega t}$ machen, wobei nun α nicht mehr

---

[1]) Die Bedeutung der komplexen Schreibweise ist, daß der reelle bzw. imaginäre Teil des Integrals eine Lösung derjenigen Differentialgleichung darstellt, welche aus (2) entsteht, indem man rechts den reellen bzw. den imaginären Teil von $k(t)$ nimmt.

reell vorausgesetzt werden kann, erhalten wir aus (2) für das Verhältnis $\frac{\alpha}{k} = \sigma$ sofort die Gleichung $\sigma(-m\omega^2 + i\varkappa\omega + c) = 1$, woraus sich

$$\sigma = \frac{c - m\omega^2 - i\varkappa\omega}{(c - m\omega^2)^2 + \varkappa^2\omega^2}$$

ergibt. Wir können diese Zahl auch in der Form

$$\sigma = re^{-i\omega\psi}$$

mit

$$r^2 = \frac{1}{(c - m\omega^2)^2 + \varkappa^2\omega^2} = f(\omega), \qquad \operatorname{tg}\omega\psi = \frac{\varkappa\omega}{c - m\omega^2}$$

schreiben und haben dann als Lösung der unhomogenen Gleichung (2) die Funktion

$$q = kre^{i\omega(t-\psi)}.$$

Diese Lösung entsteht also aus der anregenden Kraft durch Multiplikation der Amplitude mit dem Faktor r (*Amplitudenverzerrung*) und Verminderung der Phase ωt um die Größe $\omega\psi$ (*Phasenverschiebung*).

Setzt sich die rechte Seite der Differentialgleichung (2) als Summe von Gliedern der Form $Ae^{i\omega t}$ zusammen, so erhalten wir als Lösung entsprechend eine Summe von Lösungen der Differentialgleichungen mit den einzelnen Summanden als rechten Seiten.

Aus dieser einen Lösung der unhomogenen Gleichung ergibt sich die allgemeinste durch Addition des Ausdruckes $ae^{-\delta t}\cos\nu(t - \varphi)$. Wir sehen, daß bei nicht verschwindender Dämpfung mit der Zeit dieser Bestandteil der Lösung beliebig klein werden, *abklingen* muß, daß also auf die Dauer nur die obige Lösung eine Rolle spielen kann.

2. Anwendungen auf die Theorie der Resonanzerscheinungen und der Registrierapparate. Die Abhängigkeit der Amplitudenverzerrung r von der Frequenz ω ist für die Anwendungen von größter Wichtigkeit und liefert den Schlüssel zu den sogenannten *Resonanzerscheinungen*. Wir denken uns die Funktion $r = \sqrt{f(\omega)} = g(\omega)$ in einer $r\omega$-Ebene durch eine Kurve (Abb. 2) dargestellt. Ist $\varkappa$, also auch die Dämpfung δ gleich Null, so wird für $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ die Amplitudenverzerrung unendlich (was natürlich praktisch entweder wegen des Aufhörens der Gültigkeit von (2) oder wegen Explosion des Apparates nicht eintritt). Wir haben also, wenn die erregende Frequenz nahe an die Eigenfrequenz ω_0 des frei schwingenden ungedämpften Systems kommt, besonders große Schwingungsamplituden. Ist die Dämpfung nicht Null, so besitzt $f(\omega)$ ein endliches Maximum an der Stelle $\bar{\omega}_0 = \sqrt{\frac{2mc - \varkappa^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\varkappa^2}{2m^2}}$, also bei hinreichend kleinem $\varkappa$ immer noch nahe an der Eigenfrequenz ω_0 der freien ungedämpften

Schwingung. Das Maximum der Verzerrungskurve hat den Wert $\sqrt{\varkappa^2 \frac{c}{m} - \frac{1}{4}\frac{\varkappa^4}{m^2}}^{-1}$ und wird daher um so schärfer ausgeprägt sein, je kleiner die Dämpfung, und im übrigen, je kleiner $\frac{c}{m} = \omega_0^2$ ist. Die Resonanzkurven Abb. 2 veranschaulichen unter der Voraussetzung $\omega_0 = 1$, $c = 1$ den Funktionsverlauf für verschiedene Werte von $\varkappa$ oder vielmehr von $D = \frac{\varkappa}{2\sqrt{m}}$. Typisch ist für die Resonanzkurven, daß sie bei $\omega = 0$ mit $r^2 = \frac{1}{c^2}$ beginnen und hinter ihrem Maximum $\bar{\omega}_0$ rasch zu ihrem asymptotischen Werte Null abfallen. Man kann also roh ausgedrückt sagen, daß Erregungen weit oberhalb der Eigenschwingung fast zu Null abgedämpft werden.

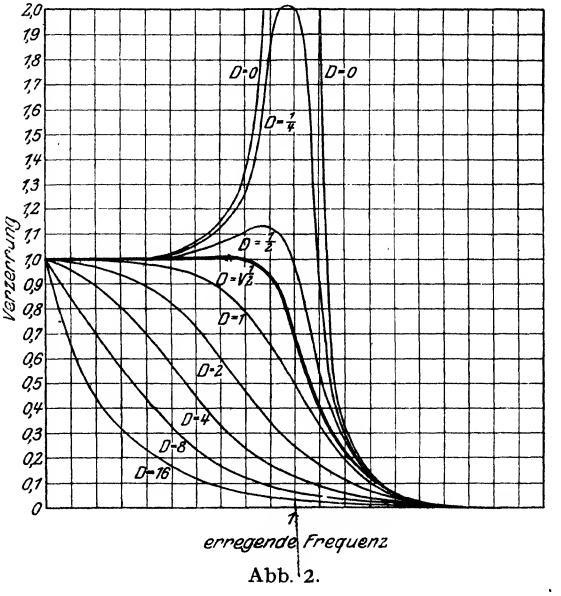


Abb. 2.

Bei einem physikalischen Meß- oder Registrierapparat hat man die Konstanten $m, c, \varkappa$ in weiten Grenzen frei verfügbar. Man wird versuchen, sie so zu wählen, daß die Gestalt der Resonanzkurve den Bedürfnissen der Messung möglichst gut angepaßt ist. Dabei sind gewöhnlich zwei Gesichtspunkte maßgebend. Einmal wird man eine große *Empfindlichkeit* des Apparates wünschen, d. h. mathematisch gesprochen einen großen Wert von $r^2 = f(\omega)$ für die in Frage kommenden Frequenzen ω der Anregung. Für kleine Werte von ω wird angenähert $f(\omega) = \frac{1}{c^2}$, so daß wir in der Zahl $\frac{1}{c}$ ein Maß für die Empfindlichkeit des Instrumentes bei kleinen Erregungsfrequenzen haben. Steigerung der Empfindlichkeit ist also durch Vergrößerung des Quotienten $\frac{1}{c}$, d. h. Verkleinerung der elastischen Bindung möglich.

Zweitens spielt eine wesentliche Rolle die Forderung der *relativen Verzerrungsfreiheit*. Wir denken uns unter der Annahme, daß $k(t)$

periodisch mit der Periode $\frac{2\pi}{\nu}$ ist, die Erregung allgemein in eine Fouriersche Reihe

$$k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{n\nu i t} \tag{3}$$

entwickelt. Dann erhalten wir nach dem Superpositionsprinzip als Lösung der Differentialgleichung (2):

$$q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n \gamma_n e^{n\nu i(t-\psi_n)}, \tag{4}$$

wobei

$$r_n^2 = f(n\nu) = \frac{1}{(c - m n^2 \nu^2)^2 + \varkappa^2 n^2 \nu^2}, \quad \operatorname{tg} n\nu\psi_n = \frac{\varkappa n \nu}{c - m n^2 \nu^2}$$

ist.

Nehmen wir nun an, wir könnten praktisch die Reihe (3) mit den Gliedern $n = \pm N$ abbrechen, d. h. es kämen in der Erregung keine Frequenzen oberhalb $\Omega = N\nu$ vor, so werden wir sagen, unser Apparat registriere die Erregung (3) ohne relative Verzerrung, wenn für alle Frequenzen $|n|\nu \leqq N\nu$ der Verzerrungsfaktor $f(n\nu)$ annähernd denselben Wert besitzt. Diese Forderung ist ganz entscheidend, wenn wir aus den beobachtbaren Bewegungen des Registrierapparates Rückschlüsse auf den erregenden Vorgang ziehen wollen (Seismograph, Mikrophon, Grammophon, Oszillograph, die alle in erster Näherung unter das Schema dieses Paragraphen fallen). Der neuen Forderung der relativen Verzerrungsfreiheit kann man natürlich exakt nicht genügen. Aber man kann die Resonanzkurven mehr und mehr abflachen und schließlich durch die Forderung $\varkappa^2 - 2cm = 0$ in die Gestalt der stark gezeichneten Kurve in Abb. 2 bringen, indem man bei konstantem $\frac{c}{m}$ die Dämpfungskonstante $\varkappa$ bis zu dem Werte $\sqrt{2cm}$ zunehmen läßt; mit anderen Worten: Wir machen die Ableitung von $f(\omega)$ nach dem Argument ω^2 für $\omega = 0$ zu Null. Die Kurve zeigt uns, daß bis in die Nähe der Eigenschwingung des ungedämpften Systems die Registrierung annähernd verzerrungsfrei arbeitet und daß oberhalb dieser Frequenz annähernd vollständige Abdämpfung herrscht. Wenn es also auf Empfindlichkeit nicht so sehr ankommt, kann man relative Verzerrungsfreiheit erzielen, indem man die Eigenschwingung des ungedämpften Systems etwas oberhalb der höchsten in Betracht kommenden erregenden Frequenzen legt und sodann die Dämpfung gleich $\sqrt{2cm}$ macht.

Für die Phasenverschiebung gilt ähnliches wie für die Verzerrung, wie die folgende Betrachtung zeigt: Die Phasenverschiebung ψ ist gleich $\frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\varkappa\omega}{c - m\omega^2}$. Wir stellen uns wieder die Frage, wie der Apparat dimensioniert sein muß, damit diese Funktion von ω^2 für $\omega = 0$

eine verschwindende Ableitung hat, so daß für kleine Werte von ω die Phasenverschiebung annähernd konstant bleibt. Die durch Differentiation sofort sich ergebende Antwort lautet $\varkappa^2 - 3cm = 0$.

Wir erhalten also für die *Konstanz der Phasenverschiebung* eine Bedingung, die mit der Bedingung der Verzerrungsfreiheit $\varkappa^2 - 2cm = 0$ nicht im Einklang steht. In der Praxis wird man geneigt sein, statt der Faktoren 2 bzw. 3 den Mittelwert 2,5 zu wählen.

3. Behandlung der unhomogenen Gleichung im allgemeinen Fall. Auch wenn die erregende Kraft $k(t)$ nicht periodisch und also nicht durch eine Fouriersche Reihe (3) gegeben ist, kann man die Lösung der unhomogenen Gleichung formal direkt angeben, z. B. indem man $k(t)$ gemäß Kap. II, § 6, 3 durch das Fouriersche Integral

$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \quad h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

darstellt. Es ist dann

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) \sqrt{f(\omega)}\, e^{i\omega(t-\psi)}\, d\omega \tag{5}$$

eine Lösung; dabei ist

$$f(\omega) = \frac{1}{(c - m\omega^2)^2 + \varkappa^2\omega^2}; \qquad \psi = \psi(\omega) = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\varkappa\omega}{c - m\omega^2}\ ^{1}).$$

Eine andere Gestalt der Lösung erhält man, wie unmittelbar verifiziert werden kann, in der Formel

$$q(t) = \frac{1}{m\nu} \int_0^t e^{-\delta(t-t')} \sin\nu(t-t')\, k(t')\, dt', \tag{6}$$

wobei $\nu = \frac{1}{2m}\sqrt{4cm - \varkappa^2}$ die Frequenz der Eigenschwingung, $\delta = \frac{\varkappa}{2m}$ die Dämpfung ist.

Zum Schluß sei noch hervorgehoben, daß die willkürlichen Integrationskonstanten in der allgemeinen Lösung der unhomogenen wie der homogenen Gleichung uns erlauben, diese Lösung einem beliebig vorgegebenen Anfangszustand, d. h. vorgegebenen Werten $q_0 = q(t_0)$, $\dot{q}_0 = \dot{q}(t_0)$ von $q, \dot{q}$ zur Zeit $t = t_0$ anzupassen. Man erhält zunächst bei der homogenen Gleichung, indem man diese Werte in die frühere Lösung (S. 223) einführt, ohne Schwierigkeit q in der Gestalt

$$q(t) = e^{-\frac{1}{2}\frac{\varkappa}{m}(t-t_0)} \left\{ \dot{q}_0 \frac{\sin\nu(t-t_0)}{\nu} + q_0 \left[\cos\nu(t-t_0) + \frac{\varkappa}{2m\nu} \sin\nu(t-t_0) \right] \right\}. \tag{7}$$

---

[1]) Damit diese formale Lösung eine Bedeutung hat, müssen wir die Konvergenz der Integrale und die Ausführbarkeit der Differentiation nach t unter dem Integralzeichen im Integral (5) ausdrücklich voraussetzen.

Hieraus kann man folgendermaßen direkt die Lösung (6) der unhomogenen Gleichung gewinnen: Einer Anfangsgeschwindigkeit $\dot{q}(t_0)$ zur Zeit $t = t_0$ entspricht eine Lösung (7) mit $q_0 = 0$. Einer Kraft $k(t)$, die konstant während des kleinen Zeitintervalles $t_0 - \varepsilon \leqq t \leqq t_0$ wirkt, entspricht ein Impuls $m\dot{q}(t_0) = k(t_0)\varepsilon$. Addition solcher Wirkungen und Grenzübergang zu $\varepsilon = 0$ ergibt dann unmittelbar (6).

§ 3. Systeme von endlich vielen Freiheitsgraden.

1. Hauptschwingungen. Bei Systemen von n Freiheitsgraden, die um eine stabile Gleichgewichtslage schwingen, wollen wir von dem Einfluß der Dämpfung absehen und demgemäß die Bewegungsgleichungen in der Lagrangeschen Form

$$(8) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad \ldots, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_n} = -\frac{\partial U}{\partial q_n}$$

zugrunde legen. Dabei charakterisieren die verallgemeinerten Koordinaten oder Lagekoordinaten $q_1, \ldots, q_n$ die Abweichung des Systems von der Gleichgewichtslage $q_1 = 0, \ldots, q_n = 0$, während die Funktion U die potentielle, die Funktion T die kinetische Energie des Systems darstellt. Sind die Schwingungen klein, so ist U als quadratische Form der Koordinaten q_h mit konstanten Koeffizienten b_{hk}, T als quadratische Form der Ableitungen $\dot{q}_h$ der Koordinaten nach der Zeit mit ebenfalls konstanten Koeffizienten a_{hk} anzusehen[1]):

$$T = \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k. \qquad U = \sum_{h,k=1}^{n} b_{hk}q_hq_k;$$

Diese Formen sind ihrer Natur nach positiv definit, die eine, weil die kinetische Energie wesentlich positiv ist, die andere wegen der vorausgesetzten Stabilität des Gleichgewichtes in $q_1 = 0, \ldots, q_n = 0$.

Die vollständige Beherrschung des Schwingungsvorgangs ergibt sich hier leicht aus der Theorie der quadratischen Formen, wie sie in Kap. I entwickelt wurde. Wir betrachten die beiden quadratischen Formen

$$G = \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}x_hx_k, \qquad F = \sum_{h,k=1}^{n} b_{hk}x_hx_k$$

und bringen sie durch eine lineare Transformation

$$(9) \qquad x_h = \sum_{k=1}^{n} t_{hk}y_k$$

der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ gleichzeitig auf die Form

$$G = \sum_{h=1}^{n} y_h^2, \qquad F = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h y_h^2,$$

[1]) Vgl. Kap. IV, § 9, 1.

was wegen des definiten Charakters von U und T und somit auch von F und G mit positiven Werten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ möglich ist. Indem wir entsprechend gemäß (9) in den Gleichungen (8) statt der Koordinaten $q_1, \ldots, q_n$ neue, die sogenannten *Normalkoordinaten* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ einführen, wird

$$T = \sum_{h=1}^{n} \dot{\eta}_h^2, \qquad U = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h \eta_h^2,$$

und die Bewegungsgleichungen der Schwingung transformieren sich in die Gestalt

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} + \lambda_1 \eta_1 = 0, \ \ldots, \ \frac{d^2\eta_n}{dt^2} + \lambda_n \eta_n = 0,$$

wobei alle Variablen voneinander getrennt erscheinen, so daß wir sofort die Lösung in der Form

$$\eta_h = y_h \cos \nu_h (t - \varphi_h), \qquad \nu_h = \sqrt{\lambda_h}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

hinschreiben können. Hierin sind $y_1, \ldots, y_n$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ willkürliche Integrationskonstanten. Die durch (10) dargestellten Sinusschwingungen der Normalkoordinaten nennt man die *Hauptschwingungen* oder *Eigenschwingungen* des Systems, die Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_h$ die *Eigenschwingungszahlen* oder *Eigenfrequenzen* oder mit einem der Akustik entnommenen Ausdruck die *Tonhöhen* des Systems. *Die Bewegung der ursprünglichen Koordinaten ist eine Superposition verschiedener Eigenschwingungen mit verschiedenen Phasen und Amplituden.* In den $2n$ Integrationskonstanten $y_1, \ldots, y_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ haben wir genau so viele willkürliche Parameter zur Verfügung, wie nötig sind, um die Lösung einem willkürlich vorgegebenen Anfangszustand, d. h. Anfangswerten $q_h(t_0)$ und $\dot{q}_h(t_0)$ der Koordinaten und ihrer Geschwindigkeiten anzupassen.

Im übrigen ist es vielfach zweckmäßig, dem Begriff der Normalkoordinaten eine etwas weitere Fassung zu geben, indem man darunter solche Koordinaten versteht, bei welchen die Energien die Form

$$T = c \sum_{h=1}^{n} \dot{\eta}_h^2, \qquad U = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h^* \eta_h^2$$

haben, wobei dann $\lambda_h = \frac{\lambda_h^*}{c}$ die Quadrate der Eigenfrequenzen ν_h sind.

Wir fügen hier die Bemerkung ein, *daß die Eigenschwingungen als solche Bewegungen des Systems definiert werden können, bei denen die gegenseitigen Verhältnisse der Koordinaten q_k von der Zeit unabhängig sind, bei denen also q_k die Form $q_k = v_k g(t)$ mit zeitlich konstantem v_k hat*[1]. *Man sagt: bei einer Eigenschwingung bewegen sich die materiellen Punkte des Systems „synchron".*

[1]) Der Leser wird die Äquivalenz dieser Definition mit der oben gegebenen leicht selbst bestätigen.

Durch die Transformation des Systems auf Normalkoordinaten und die damit gegebene Trennung der Freiheitsgrade erledigt sich auch unmittelbar das Problem der erzwungenen Bewegung, welche durch Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}q_k = k_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dargestellt wird.

2. Allgemeine Eigenschaften der schwingenden Systeme. Ordnet man die Quadrate $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ der Schwingungszahlen nach wachsender Größe: $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_n$, so läßt sich λ_p nach Kap. I, § 4 definieren als das Maximum, welches das Minimum der quadratischen Form $F = \sum_{h,k=1}^{n} b_{hk}x_h x_k$ annehmen kann, wenn die Variablen erstens der Nebenbedingung $G = \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}x_h x_k = 1$ und zweitens noch $p-1$ weiteren Nebenbedingungen der Form

$$\sum_{h=1}^{n} \alpha_{hj}x_h = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p-1) \tag{11}$$

unterworfen werden. Daraus ergeben sich sofort einige allgemeine Sätze über diese Schwingungszahlen bzw. die ihnen entsprechenden Tonhöhen, die schon im Kap. I, § 4 ohne Erörterung der physikalischen Bedeutung ausgesprochen und bewiesen wurden:

Satz I: Der p^{te} Oberton eines schwingenden Systems ist der höchste unter den Grundtönen aller Systeme, welche aus dem gegebenen durch Auferlegung von p irgendwie gewählten Bindungen der Form (11) *entstehen.*

Satz II: Geht ein System S durch Auferlegung von r Zwangsbedingungen der Form (11) *in ein „r-fach gebundenes" System S' über, so sind die Schwingungszahlen $\nu'_1, \ldots, \nu'_{n-r}$ des gebundenen Systems nicht kleiner als die entsprechenden Schwingungszahlen $\nu_1, \ldots, \nu_{n-r}$ des freien Systems, aber auch nicht größer als die Schwingungszahlen $\nu_{r+1}, \ldots, \nu_n$ des freien Systems, d. h. es gelten die Beziehungen*

$$\lambda_p \leqq \lambda'_p \leqq \lambda_{p+r} \quad \text{bzw.} \quad \nu_p \leqq \nu'_p \leqq \nu_{p+r} \quad (p = 1, 2, \ldots, n-r).$$

Satz III: Bei Vergrößerung der Trägheit fällt der Grundton und jeder Oberton oder nimmt wenigstens nicht zu.

Dabei verstehen wir unter einer Vergrößerung der Trägheit den Übergang zu einem System mit einer solchen kinetischen Energie T', daß $T' - T$ nie negativ ist; die potentielle Energie soll dabei unverändert bleiben.

Satz IV: Bei einer Versteifung des Systems steigt der Grundton und jeder Oberton oder nimmt jedenfalls nicht ab.

Dabei bezeichnen wir als Versteifung den Übergang zu einem System mit gleicher kinetischer Energie, dessen potentielle Energie jedoch um eine nicht negative Form vermehrt ist.

Es bedarf kaum einer besonderen Erwähnung, daß sich Grundton und Obertöne im entgegengesetzten Sinne ändern wie nach Satz II bis IV, wenn wir Zwangsbedingungen aufheben, Massen vermindern oder das System lockern, d. h. zu einem System S' übergehen, demgegenüber S als versteift erscheint.

3. Übergang von einem System zu einem benachbarten System. Kennt man die Transformation eines gegebenen schwingungsfähigen Systems auf seine Normalkoordinaten, so kann man auf Grund der Untersuchungen von Kap. I, § 6 leicht die Normalkoordinaten und Eigenschwingungen eines dem ursprünglichen System benachbarten Systems angenähert angeben. Es mögen dem benachbarten System als kinetische und potentielle Energie die quadratischen Formen

$$\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}\,\dot{x}_h\,\dot{x}_k\,, \qquad \sum_{h,k=1}^{n} b_{hk}\,x_h\,x_k$$

entsprechen und das Ausgangssystem in denselben Koordinaten bereits auf die Normalkoordinaten bezogen sein, so daß seine kinetische und potentielle Energie die Gestalt

$$c\sum_{h=1}^{n}\dot{x}_h^2\,, \qquad \sum_{h=1}^{n}\lambda_h^*\,x_h^2$$

haben und die Quadrate der Schwingungszahlen gleich $\lambda_h = \frac{\lambda_h^*}{c}$ sind. Dann sind die Größen a_{hk}, b_{hk} für $h \neq k$ und ebenso die Größen $a_{hh} - c$, $b_{hh} - \lambda_h$ als unendlich klein erster Ordnung anzusehen, und ihre höheren Potenzen dürfen gegenüber niederen vernachlässigt werden. Daher ist die Darstellung der Eigenschwingungen des ursprünglichen Systems bereits durch die Angaben in Kap. I, § 6, 6 erledigt. Für die Amplituden der zugehörigen Einzelschwingungen der einzelnen Koordinaten, und zwar für die Schwingung, die dem Index h entspricht, erhält man

$$A_h^{(h)} = 1\,, \qquad A_k^{(h)} = \frac{a_{hk}\lambda_h^* - b_{hk}\,c}{c\,(\lambda_k^* - \lambda_h^*)} \quad (h \neq k);$$

für die entsprechenden Schwingungszahlen ergibt sich bis zu den Größen dritter Ordnung

$$\bar{\nu}_h^2 = \bar{\lambda}_h = \frac{b_{hh}}{a_{hh}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(b_{hk}\,c - \lambda_h\,a_{hk})^2}{c^2\,(\lambda_k - \lambda_h)}\,.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Eigenwerte λ_h alle voneinander verschieden sind.

§ 4. Systeme von unendlich vielen Freiheitsgraden.

1. Die Methoden des Grenzüberganges zu unendlich vielen Freiheitsgraden. Die oben dargelegten Methoden zur Behandlung der Systeme von endlich vielen Freiheitsgraden legen es nahe, für Systeme, deren Charakterisierung durch endlich viele Parameter nicht mehr möglich ist, die Behandlung durch einen Grenzübergang vorzunehmen. So kann man sich z. B. eine an den Endpunkten eingespannte homogene elastische Saite der Massendichte ϱ und Länge π ersetzt denken durch n Massenpunkte der Masse $\frac{\pi\varrho}{n}$, welche in den Punkten mit den Koordinaten $x_h = \frac{h\pi}{n+1}$ ihre Ruhelage besitzen und so durch elastische Kräfte aneinander gebunden sind, daß die potentielle Energie des Systems, wenn q_h die transversale Elongation des h^{ten} Massenpunktes bedeutet, durch eine quadratische Form $U = \sum_{h,k=1}^{n} b_{hk} q_h q_k$ gegeben ist, während die kinetische Energie $T = \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k$ ist. Indem man für dieses System die Normalkoordinaten und die Eigenschwingungen bestimmt und dann den Grenzübergang $n \to \infty$ vollzieht, kann man leicht die Lösung des Saitenproblems erhalten. Da wir aber sogleich direkt zu ihr gelangen werden, verzichten wir hier auf die vollständige Durchführung dieses Gedankens[1]).

Man kann noch anders vorgehen, indem man von vornherein die Bewegung der Saite durch unendlich viele Parameter charakterisiert. Denkt man sich nämlich die Funktion $u(x,t)$, welche die Gestalt der Saite darstellt, in eine Fouriersche Reihe $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin nx$ entwickelt, so werden die Koeffizienten $q_n(t)$ als Bestimmungsstücke des mechanischen Systems anzusehen sein, deren Kenntnis als Funktionen der Zeit das Ziel der Untersuchung zu sein hat. In diesen unendlich vielen Koordinaten q_n drücken sich zufolge der Vollständigkeitsrelation für die trigonometrischen Funktionen die Größen U, T bei geeigneter Wahl der Einheiten folgendermaßen aus:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \dot{u}(x,t)^2\, dx = \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t)^2; \quad U = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q_n(t)^2.$$

Wir haben also zwei quadratische Formen in den unendlich vielen Variablen q_n bzw. $\dot{q}_n$, beide schon in Quadratsummen transformiert, so daß wir in formaler Übertragung der früheren Untersuchungen für diese

---

[1]) Die angedeutete Methode geht auf *Lagrange* zurück; vgl. *Riemann, B.*: Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. Ges. Werke, 2. Aufl., S. 227—264, insb. S. 231. Leipzig 1892.

als Normalkoordinaten anzusehenden Größen q_n die Differentialgleichungen $\ddot{q}_n(t) + n^2 q_n(t) = 0$ und die Lösungen $q_n = a_n \cos nt + b_n \sin nt$ erhalten. Daher ist als allgemeine Lösung unseres Saitenproblems die Funktion $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx\,(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ mit geeigneten Konstanten a_n, b_n anzusehen. Die physikalisch einleuchtende Tatsache, daß wir den Vorgang jeder Anfangslage $u(x,0)$ und Anfangsgeschwindigkeit $u_t(x,0)$ anpassen können, bedeutet hier mathematisch die Möglichkeit, durch geeignete Wahl der Koeffizienten a_n, b_n willkürliche Anfangsfunktionen $u(x,0)$ und $u_t(x,0)$ darzustellen, womit vom physikalischen Standpunkte aus die Entwickelbarkeit von willkürlichen Funktionen in Fouriersche Reihen plausibel gemacht ist. Wenn die Saite nicht mehr homogen ist, sondern die Energien durch allgemeinere Integrale $T = \int_0^{\pi} \frac{\varrho(x)}{2} u_t(x,t)^2\,dx$, $U = \int_0^{\pi} \frac{p(x)}{2} u_x(x,t)^2\,dx$ dargestellt werden, so kann man zwar wieder unsere Größen q_n als Koordinaten der Saite ansehen; nunmehr aber werden U, T allgemeinere quadratische Formen der unendlich vielen Variablen q_n bzw. $\dot{q}_n$, und die Bestimmung der Normalkoordinaten und Eigenschwingungen würde die simultane Transformation dieser beiden Formen in Quadratsummen erfordern. Bequemer als dieser an und für sich mit den Mitteln der Theorie der Formen von unendlich vielen Variablen durchaus gangbare Weg ist jedoch eine direkte Behandlung der Probleme, der wir uns nunmehr zuwenden.

2. Die homogene Saite. Wir betrachten zunächst das einfachste Beispiel, die Differentialgleichung

$$c u_{xx} = \varrho u_{tt} \quad \text{oder} \quad u_{xx} = \mu^2 u_{tt} \qquad \left(\mu = \sqrt{\frac{\varrho}{c}}\right) \tag{12}$$

der eingespannten homogenen Saite mit den Randbedingungen $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. Die Zeiteinheit denken wir uns der einfacheren Schreibweise wegen so gewählt, daß $\mu = 1$ wird. Zu den Eigenschwingungen gelangen wir in Analogie zu der Bemerkung auf S. 229 durch die Forderung, Lösungen zu finden, die sich in der Gestalt $f(x)\,g(t)$ darstellen, wobei f nur von x, g nur von t abhängt. Die Differentialgleichung (12) läßt sich dann in die Gestalt

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{\ddot{g}(t)}{g(t)}$$

setzen, woraus sich ergibt, daß beide Seiten gleich ein und derselben Konstanten $-\lambda$ sein müssen, da die eine nur von x, die andere nur von t abhängt. Aus der Randbedingung $f(0)\,g(t) = f(\pi)\,g(t) = 0$ folgt sofort $f(0) = f(\pi) = 0$.

Da die Differentialgleichung $f''(x) + \lambda f(x) = 0$ die allgemeine Lösung $c_1 e^{+\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ besitzt, so muß λ eine positive Zahl sein, und zwar eine Zahl der Form n^2, wo n ganz ist. Denn dann und nur dann lassen sich die beiden Randbedingungen befriedigen, und wir erhalten als Lösung $f(x) = \sin nx$. Für $g(t)$ ergibt sich allgemein $g = a\cos nt + b\sin nt$ mit willkürlichen Konstanten a, b. Somit haben wir für jedes ganzzahlige n eine Lösung der Differentialgleichung (12) in der Form $\sin nx\,(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ und können allgemeinere Lösungen in der Gestalt

$$u = \sum_n \sin nx\,(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

ansetzen, wobei die Summe entweder endlich viele Glieder oder auch unendlich viele Glieder besitzen darf, in welch letzterem Falle allerdings ausdrücklich vorauszusetzen ist, daß die Reihe gleichmäßig konvergiert und sich nach jeder der beiden Variablen zweimal gliedweise differenzieren läßt. Die Theorie der Fourierschen Reihe läßt uns sofort erkennen, daß wir durch geeignete Wahl der Koeffizienten a_n, b_n die Lösung einem willkürlich vorgegebenen Anfangszustand anpassen können, wobei die willkürlich vorgegebenen Funktionen $u(x, 0) = \varphi(x)$ und $u_t(x, 0) = \psi(x)$ als stückweise glatt vorauszusetzen sind.

Die durch die einzelnen Glieder $\sin nx\,(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ dargestellten sinusförmigen oder harmonischen Bewegungen heißen die *Eigenschwingungen* der Saite, die Zahlen $n = \nu_n$ sind die zugehörigen *Eigenfrequenzen*.

Ganz analoge Resultate erhalten wir, wenn die Saite anderen Randbedingungen unterworfen ist. Ist z. B. der Anfangspunkt fest, d. h. $u(0, t) = 0$, und der Endpunkt gemäß der Gleichung $u_x = -hu$ elastisch an seine Ruhelage gebunden[1]), so ergibt sich für die Konstante $\lambda = \nu^2$ die Bedingungsgleichung $h \operatorname{tg} \nu\pi = -\nu$, durch welche für die Funktion $u = \sin \nu x\,(a\cos \nu t + b \sin \nu t)$ die Erfüllung der Randbedingungen $u_x = -hu$ an der Stelle $x = \pi$ und $u = 0$ an der Stelle $x = 0$ gewährleistet wird. Die Eigenfrequenzen der Saite sind jetzt einfach die Lösungen der transzendenten Gleichung

$$h \operatorname{tg} \nu\pi = -\nu. \tag{13}$$

Man erhält diese Werte graphisch, indem man die aufeinanderfolgenden Äste der Kurve $z = \operatorname{tg} \nu\pi$ in der $z\nu$-Ebene mit der Geraden $z = -\frac{1}{h}\nu$ zum Schnitt bringt, wobei sich übrigens unmittelbar für die n^{te} Eigenfrequenz ν_n die *„asymptotische" Relation* $\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n}{n} = 1$ ergibt.

[1]) Vgl. Kap. IV, § 9, 2, wo diese Randbedingung aus dem Auftreten eines zusätzlichen Randgliedes in der potentiellen Energie abgeleitet wurde.

Ist speziell das Ende der Saite „frei", d. h. wird $h = 0$, so wird $\nu_n = n - \frac{1}{2}$, und es ergibt sich

$$u_n = \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x \left[a_n \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)t + b_n \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)t\right].$$

Als Lösung werden wir wieder eine Reihe der Form

$$u(x, t) = \sum_n \sin \nu_n x \,(a_n \cos \nu_n t + b_n \sin \nu_n t)$$

ansetzen können und erwarten, daß wir durch geeignete Wahl der Konstanten a_n, b_n diese Lösung einem willkürlichen Anfangszustand anpassen können. Zur Bestätigung dieser Vermutung werden wir *die Frage der Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion $w(x)$ für das Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ nach den Funktionen* $\sin \nu_n x$, *den Eigenfunktionen der Differentialgleichung* (12), mit den Randbedingungen

$$f(0) = 0, \qquad h f(\pi) = -f'(\pi) \tag{14}$$

zu untersuchen haben, was in § 10 durchgeführt werden soll. Schon hier aber sei auf die *Orthogonalitätseigenschaft* der Funktionen $y_n = \sin \nu_n x$ hingewiesen; es ist nämlich

$$\int_0^\pi y_n y_m \, dx = (y_n, y_m) = 0 \quad \text{für} \quad \nu_n \neq \nu_m,$$

wie man unmittelbar bestätigt, indem man die Gleichung $y_n'' + \nu_n^2 y_n = 0$ mit y_m, die Gleichung $y_m'' + \nu_m^2 y_m = 0$ mit y_n multipliziert, sodann die Differenz bildet und integriert. Es ergibt sich

$$(\nu_n^2 - \nu_m^2) \int_0^\pi y_n y_m \, dx + \int_0^\pi \frac{d}{dx}(y_n' y_m - y_m' y_n)\, dx = 0,$$

woraus wegen (14) die Orthogonalitätseigenschaft folgt.

Die gewonnenen Lösungen der Schwingungsgleichung lassen sich alle ohne weiteres in die Form bringen

$$u(x, t) = f(x + t) + g(x - t), \tag{15}$$

wo f eine Funktion des Argumentes $x + t$, g eine Funktion des Argumentes $x - t$ ist. Daß jede Lösung von (12) (für $\mu = 1$) diese Form haben muß, erkennt man leicht, indem man $x + t = \xi$ und $x - t = \eta$ als neue unabhängige Veränderliche in (12) einführt, wodurch (12) in $u_{\xi\eta} = 0$ übergeht. Umgekehrt muß jede Funktion u der Form (15) der Schwingungsgleichung genügen, wofern nur f, g stetige erste und zweite Ableitungen besitzen. Ja, es genügt sogar — und hierin ist diese Form der Lösung der nach Eigenschwingungen fortschreitenden Lösung überlegen — die stückweise Stetigkeit der Ableitungen.

3. Äußere Kräfte. Die Bewegung der Saite unter dem Einfluß einer beliebigen äußeren Kraft $Q(x,t)$ ergibt sich aus der unhomogenen Differentialgleichung

$$u_{xx} = u_{tt} - Q(x,t). \tag{16}$$

Wir denken uns, um dieses Problem zu behandeln, die Funktion $Q(x,t)$ zur Zeit t nach den Eigenfunktionen $\sin nx$ entwickelt:

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \sin nx, \qquad Q_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} Q(x,t) \sin nx\, dx,$$

und ebenso die gesuchte Lösung in der Form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin nx$$

angesetzt. Der Differentialgleichung (16) suchen wir nun zu genügen, indem wir die unendliche Folge von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$-n^2 q_n(t) = \ddot{q}_n(t) - Q_n(t)$$

auflösen, was nach S. 227 — die Dämpfung $\varkappa$ hat hier den Wert Null — durch die Funktionen

$$q_n(t) = \frac{1}{n}\int_0^t \sin n(t-t') Q_n(t')\, dt' + a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

mit willkürlichen Konstanten a_n, b_n erfolgt. Die Konstanten a_n, b_n müssen darnach den gegebenen Anfangsbedingungen gemäß bestimmt werden, so daß — die Konvergenz der Reihe und ihre gliedweise Differenzierbarkeit vorausgesetzt — die Summe $\sum_n q_n(t) \sin nx$ die gewünschte Lösung der Gleichung (16) darstellt. Ein anderer Weg zur Behandlung der inhomogenen Gleichung wird in § 5, 1 in allgemeinerem Zusammenhang entwickelt werden.

Wir erwähnen noch eine weitere Folgerung aus den obigen Formeln. Wirkt eine „*Einzelkraft*" in einem Knotenpunkte einer Eigenschwingung der Saite, d. h. einem Punkte, wo bei der betreffenden Schwingung stets $u_n = 0$ ist, so wird diese Eigenschwingung nicht erregt; mit anderen Worten, der Koeffizient $Q_n(t)$ in der Entwicklung von $Q(x,t)$ ist gleich Null. In der Tat kann eine solche Einzelkraft aufgefaßt werden als der Grenzfall einer gleichmäßig auf ein den Knotenpunkt enthaltendes kleines Intervall verteilten Kraft. Dann gilt für $Q_n(t)$ die Formel

$$Q_n(t) = \frac{2}{\pi}\int Q(x,t) \sin nx\, dx,$$

wobei das Integral über jenes Intervall zu erstrecken ist. Dies ist aber gleich $\frac{2}{\pi} \sin n\xi \int Q(x,t)\, dx$, wo das Integral über $Q(x,t)$ die Resultierende

der Kräfte $Q(x,t)$ und ξ ein Mittelwert aus dem Intervall ist. Beim Grenzübergang verschwindet $\sin n\xi$ und damit auch $Q_n(t)$.

4. Allgemeiner Gedankengang der folgenden Untersuchungen. Die Verhältnisse bei der homogenen schwingenden Saite sind in vieler Hinsicht typisch für allgemeinere kontinuierliche schwingende Systeme, welche den Gegenstand der weiteren Untersuchungen dieses Kapitels bilden. Der allgemeine Gang dieser Untersuchungen ist durch folgende Hauptmomente gekennzeichnet. Wir suchen zunächst in sinngemäßer Verallgemeinerung der Überlegungen bei endlich vielen Freiheitsgraden (S. 229) derartige Bewegungszustände des Systems auf, bei welchen die einzelnen Teile des Systems *synchron* schwingen, d. h. bei denen die betrachtete Elongation $u(x,\ldots,t)$ des durch die Koordinaten $x,\ldots$ festgelegten materiellen Punktes die Form hat $u = v\,g(t)$, wobei $v(x,\ldots)$ von der Zeit t unabhängig ist. Dieser Ansatz für die gesuchte Funktion u wird uns sofort für die Funktion v ein *Eigenwertproblem* liefern, dessen Lösungen uns die *Eigenschwingungen* des Systems geben. Ebenso wie man bei endlich vielen Freiheitsgraden einen beliebigen Schwingungsvorgang, der vorgegebenen Anfangszuständen angepaßt ist, als Superposition der endlich vielen Eigenschwingungen ansehen kann, werden wir hier erwarten dürfen, daß auch bei unserem System von unendlich vielen Freiheitsgraden Analoges gilt; diese Erwartung führt zur Formulierung eines *„Entwicklungssatzes"*, welcher die Entwickelbarkeit einer bis auf gewisse Stetigkeitsvoraussetzungen willkürlichen Ortsfunktion nach den Eigenfunktionen des Schwingungsproblems behauptet. Der Entwicklungssatz wird ebenso wie die Existenz der Eigenwerte und Eigenfunktionen für alle in diesem Kapitel behandelten Probleme am Schluß mit Hilfe der Theorie der Integralgleichungen gemeinsam bewiesen werden. Da wir dabei von den vorangehenden Betrachtungen keinen Gebrauch zu machen haben, so können und wollen wir uns bei den Überlegungen der nächsten Paragraphen zunächst unbedenklich auf den Entwicklungssatz stützen und die Existenz der Eigenwerte als erwiesen voraussetzen.

§ 5. Die unhomogene Saite.

1. Die allgemeine unhomogene Saite und das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem. Den soeben entwickelten Gedankengang wenden wir an auf die Differentialgleichung der unhomogenen Saite

$$(p\,u_x)_x = \varrho\,u_{tt}, \tag{17}$$

in der $p(x)$ den Elastizitätsmodul, multipliziert mit dem Querschnitt, und $\varrho(x)$ die Masse für die Längeneinheit bezeichnet. Man versucht eine

Lösung in der Form $u = f(x)\,g(t)$ zu finden und gelangt mit diesem Ansatz von (17) unmittelbar zu der Gleichung

$$(pf')' : f\varrho = \ddot{g} : g\,,$$

welche nur dann erfüllt sein kann, wenn jede der beiden Seiten gleich einer und derselben Konstanten $-\lambda$ ist. Für die Funktion $y = f(x)$ ergibt sich dann die Differentialgleichung

$$(pf')' + \lambda\varrho y = 0\,, \tag{18}$$

während g der Differentialgleichung $\ddot{g} + \lambda g = 0$ genügen muß. Setzen wir $\lambda = \nu^2$ — daß negative Werte von λ nicht in Betracht kommen, wird sich bald von selbst ergeben —, so wird also u die Form haben

$$u = f(x)\,(a\cos\nu t + b\sin\nu t)\,,$$

während die Funktion $f(x)$ aus der Differentialgleichung (18) gemäß den Randbedingungen zu bestimmen ist. Ebenso wie im Spezialfall des § 4 wird nun die Differentialgleichung (18) auch jetzt nur für spezielle Werte von λ nicht identisch verschwindende Lösungen besitzen, und es entsteht das fundamentale *Eigenwertproblem, diejenigen „Eigenwerte" λ der Differentialgleichung* (18) *zu bestimmen, für welche es eine den Randbedingungen genügende nicht identisch verschwindende Lösung gibt.* Diese Lösung, die zum Eigenwert λ gehörige *Eigenfunktion*, ist nur bis auf einen willkürlichen konstanten Faktor bestimmt Als Randbedingungen kommen vor allem in Frage je zwei von einem der folgenden Typen:

1. $y(0) = 0$ bzw. $y(\pi) = 0$ (eingespannte Saite).
2. $h_0 y(0) = y'(0)$ bzw. $-h_1 y(\pi) = y'(\pi)$ (elastisch befestigtes Ende).
3. $y'(0) = 0$ bzw. $y'(\pi) = 0$ (freies Ende).
4. $y(0) = y(\pi)$ bzw. $y'(0) = y'(\pi)$ (Periodizitätsbedingung).

Ferner betonen wir, daß gemäß der physikalischen Natur unseres Problems die Funktionen p und ϱ für $0 \leqq x \leqq \pi$ positiv sind, und machen ausdrücklich diese Voraussetzung; ferner müssen h_0, h_1 positiv sein, wenn die Ruhelage eine stabile Gleichgewichtslage sein soll[1]).

Das so formulierte Problem heißt nach seinen ersten und erfolgreichsten Bearbeitern das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem. Es läßt sich formal noch etwas verallgemeinern, wenn man statt (18) die Differentialgleichung

$$py'' + p'y' - qy + \lambda\varrho y = 0 \tag{19}$$

betrachtet, wobei q eine gegebene stetige Funktion ist. Im übrigen kann

[1]) Vgl. Kap. IV, § 9, 2.

man die Differentialgleichung (18) bzw. (19) durch die Transformation $z = y\sqrt{\varrho}$ auf die Form

$$\frac{d}{dx}(p^* z') - (q^* - \lambda) z = 0 \tag{20}$$

bringen, wobei

$$p^* = \frac{p}{\varrho}, \qquad q^* = -\frac{1}{\sqrt{\varrho}} \frac{d}{dx}\left(p \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right) + \frac{q}{\varrho}$$

ist; diese Form entspricht dem Fall, daß die Dichte konstant und nur die Elastizität variabel ist. Ebenso kann man für $q = 0$ die Differentialgleichung in die Form

$$z'' + \lambda \sigma(x) z = 0, \qquad \sigma = \varrho p$$

transformieren, indem man statt x eine neue Variable $\xi = \int \frac{dx}{p(x)}$ einführt, und dann wieder ξ durch x ersetzt; diese Form entspricht dem Falle, daß die Elastizität konstant und nur die Dichte variabel ist.

Den Eigenfunktionen y und Eigenwerten λ der Differentialgleichung entsprechen Eigenschwingungen der Saite mit der Frequenz $\nu = \sqrt{\lambda}$, dargestellt durch die Funktionen

$$u = y(x) e^{\pm i \nu t} \qquad \text{bzw.} \qquad y(x)(a \cos \nu t + b \sin \nu t).$$

Die Eigenfunktionen unserer Sturm-Liouvilleschen Probleme liefern Systeme orthogonaler Funktionen. Sind nämlich λ_1, λ_2 zwei verschiedene Eigenwerte, y_1, y_2 zugehörige Eigenfunktionen, so erhält man wie oben in § 4

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\pi \varrho y_1 y_2 \, dx + \int_0^\pi \frac{d}{dx}(p[y_1' y_2 - y_1 y_2']) \, dx = 0,$$

und hier ist der zweite Ausdruck wegen des homogenen Charakters der Randbedingungen gleich Null, so daß tatsächlich für die Funktionen $\sqrt{\varrho} y_i$ die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_0^\pi \varrho y_1 y_2 \, dx = 0$$

besteht. Diese Funktionen können und wollen wir als normiert annehmen. *Wir werden im* § 10 *zeigen, daß die Eigenwerte λ der Differentialgleichung* (19) *bei gegebenen Randbedingungen nach der Größe geordnet eine abzählbare Reihe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ bilden und daß das zugehörige System der Eigenfunktionen ein vollständiges orthogonales Funktionensystem liefert. Weiter werden wir zeigen, daß jede den Randbedingungen des Eigenwertproblems genügende stetige Funktion f mit stückweise stetigen ersten und zweiten Ableitungen in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n, \qquad c_n = \int_0^\pi \varrho f y_n \, dx$$

nach den Eigenfunktionen entwickelbar ist. Dieser Entwicklungssatz ermöglicht genau wie in § 4 *die Anpassung der Lösung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)\,(a_n \cos \nu_n t + b_n \sin \nu_n t)$$

des Saitenproblems an einen vorgegebenen Anfangszustand.

Die Eigenwerte λ des Sturm-Liouvilleschen Problems sind, ausgenommen die des Problems mit Periodizitätsbedingungen [1]), sämtlich einfach, d. h. es kann zu einem Eigenwert λ nicht zwei voneinander linear unabhängige Eigenfunktionen y, y^* geben; gäbe es nämlich zwei solche, so würde in der Form $c\,y + c^*\,y^*$ jede Lösung von (19) enthalten sein; jede solche Lösung müßte dann den vorgegebenen homogenen Randbedingungen genügen, was mit der Tatsache im Widerspruch steht, daß man z. B. eine Lösung mit willkürlich vorgegebenem $y(0)$ und $y'(0)$ finden kann.

Die Eigenwerte $\lambda = \nu^2$ sind für $q \geqq 0$, $h_0 \geqq 0$, $h_1 \geqq 0$ sämtlich positiv. Es ist nämlich

$$\lambda = \lambda \int_0^{\pi} \varrho y^2\,dx = -\int_0^{\pi} [(p\,y')'\,y - q\,y^2]\,dx = \int_0^{\pi} (p\,y'^2 + q\,y^2)\,dx - p\,y'\,y\Big|_0^{\pi},$$

und hier wird der letzte Ausdruck seiner Natur nach positiv sein. *Der positive Charakter der Eigenwerte ist wesentlich dafür, daß alle Eigenfunktionen Schwingungsvorgängen entsprechen. Sobald ein Eigenwert negativ wird, tritt an Stelle der betreffenden Eigenschwingung ein aperiodischer Verlauf, was, wie wir später sehen werden, auch bei negativem q nur endlich oft vorkommen kann* [2]).

Was endlich die *erzwungenen Bewegungen der Saite* betrifft, so kann man entweder so vorgehen, wie in § 4 bei der homogenen Saite. Man kann aber auch das folgende, den Charakter des Problems noch besser kennzeichnende und den früheren Untersuchungen von § 2 mehr entsprechende Verfahren einschlagen. Man denke sich in der unhomogenen Differentialgleichung $(p\,u_x)_x = \varrho\,u_{tt} - Q(x,t)$ die erregende Kraft periodisch von der Form $Q(x,t) = \varphi(x)\,e^{i\omega t}$. Indem man sodann die Lösung u in der Form $u = f(x)\,e^{i\omega t}$ ansetzt, erhält man sofort für $f(x)$ die zu (18) gehörige unhomogene Gleichung

$$(p\,y')' + \lambda \varrho\,y = \varphi(x), \qquad (\lambda = \omega^2)$$

für deren Lösung man eine Reihe der Form $y = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n y_n(x)$ ansetzen wird. Indem man auch $\frac{\varphi(x)}{\varrho(x)}$ in die Gestalt $\frac{\varphi(x)}{\varrho(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$ mit

[1]) Bei diesen ist $\lambda = n^2$ für $n = 1, 2, 3 \ldots$ ein zweifacher Eigenwert von $y'' + \lambda y = 0$ mit den beiden Eigenfunktionen $\sin nx$ und $\cos nx$.

[2]) Vgl. Kap. VI, § 1, 3.

$c_n = \int_0^\pi y_n \varphi(x)\,dx$ setzt, erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n [(p y_n')' + \lambda \varrho y_n] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varrho y_n ,$$

also wegen der Differentialgleichung für die Eigenfunktionen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n (\lambda - \lambda_n) \varrho y_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varrho y_n$$

und daraus

$$\gamma_n = \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n}.$$

Wir werden später sehen, daß diese Entwicklungen vollkommen gerechtfertigt sind, sobald nicht die erregende Frequenz $\omega = \sqrt{\lambda}$ einer der Eigenfrequenzen $\nu_n = \sqrt{\lambda_n}$ gleich ist, d. h. sobald keine Resonanz eintritt.

Den Fall einer beliebigen erregenden Kraft $Q(x, t)$ kann man auf den behandelten Spezialfall zurückführen, indem man mit Hilfe einer Fourierschen Reihe oder eines Fourierschen Integrals die Kraft $Q(x, t)$ als Funktion von t spektral zerlegt (vgl. Kap. II, § 12, 6).

2. Kleine Unhomogenitäten[1]. Für den Fall, daß die Größen p, ϱ in der Differentialgleichung (18) sich von konstanten Werten nur wenig unterscheiden, läßt sich im Sinne der früher entwickelten Gedankengänge eine angenäherte Lösung des Problems leicht aus der Lösung des Problems der homogenen Saite herleiten. Der Kürze halber beschränken wir uns auf den Fall konstanter Elastizität $p = 1$ und fester Enden und setzen sodann $\varrho = \varrho_0 + \varepsilon \sigma(x)$, wobei ε ein kleiner Parameter und $\sigma(x)$ eine beschränkt bleibende Funktion von x ist. Das Ziel ist die Entwicklung der Lösung u nach Potenzen von ε unter Vernachlässigung der höheren Potenzen. Entsprechend den Überlegungen auf S. 231 haben wir vor allem die kinetische und potentielle Energie darzustellen. Wir setzen die Transversalverschiebung in der Form einer Fourierschen Reihe in x an:

$$u = f_1 \sin x + f_2 \sin 2x + \cdots ,$$

dann erhalten wir für die kinetische Energie des variierten Systems

$$T + \delta T = \frac{1}{2} \int_0^\pi \varrho (\dot{f}_1 \sin x + \dot{f}_2 \sin 2x + \cdots)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \dot{f}_\nu^2 \int_0^\pi \varrho \sin^2 \nu x\, dx + \sum_{\nu<\mu} \dot{f}_\nu \dot{f}_\mu \int_0^\pi \varrho \sin \nu x \sin \mu x\, dx .$$

Für die potentielle Energie ergibt sich dagegen

$$U + \delta U = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (f_1 \cos x + 2 f_2 \cos 2x + \cdots)^2 dx = \frac{\pi}{4} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 f_\nu^2 .$$

[1]) Vgl. zum folgenden *Rayleigh, J. W. S.*: The Theory of sound, 2. Aufl., Bd. I, S. 115—118. London 1894.

Fassen wir die Funktionen f_ν als Koordinaten des Systems (mit unendlich vielen Freiheitsgraden [1])) auf, so sehen wir, daß es sich um eine analoge Frage handelt, wie in § 3, 3, nur daß dort die betrachteten quadratischen Formen von endlich vielen Variablen abhingen. Ist $\varrho = \varrho_0$, $\varepsilon = 0$, so gilt $\delta T = 0$, $T = \frac{\pi \varrho_0}{4} \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu^2$. Daher erhält man

$$\frac{\pi \varrho_0}{4} = c, \qquad a_{hh} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \varrho \sin^2 hx\, dx, \qquad a_{hk} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \varrho \sin hx \sin kx\, dx,$$

$$b_{hk} = 0 \ (h \neq k), \quad b_{hh} = \lambda_h^* = \frac{\pi}{4} h^2, \quad \lambda_h = \frac{h^2}{\varrho_0},$$

und die Analoga der dortigen Formeln für die h^{te} Eigenschwingung lauten

$$f_h^{(h)} = f_h, \qquad f_k^{(h)} : f_h^{(h)} = \frac{\frac{h^2 \pi}{8}\int_0^\pi [\varrho_0 + \varepsilon\sigma(x)] \sin hx \sin kx\, dx}{\frac{\pi \varrho_0}{4}(k^2 - h^2)\frac{\pi}{4}}$$

$$= \varepsilon \frac{2}{\pi \varrho_0} \frac{h^2}{k^2 - h^2} \int_0^\pi \sigma(x) \sin hx \sin kx\, dx.$$

Es wird also die h^{te} Eigenschwingung des variierten Systems angenähert gegeben durch die Formeln

$$u_h + \delta u_h = f_1^{(h)} \sin x + f_2^{(h)} \sin 2x + f_3^{(h)} \sin 3x + \cdots,$$

wo die Verhältnisse der $f_i^{(h)}$ durch die obigen Ausdrücke bestimmt sind.

Für das neue $\bar{\lambda}_h$, das durch Variation aus dem λ_h entsteht, erhält man analog bis auf Größen zweiter Ordnung in ε:

$$\bar{\lambda}_h = \frac{\lambda_h^*}{\frac{\pi}{4}\varrho_0 + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^\pi \sigma(x) \sin^2 hx\, dx} = \lambda_h \frac{1}{1 + \frac{2\varepsilon}{\pi \varrho_0}\int_0^\pi \sigma(x) \sin^2 hx\, dx}.$$

Um diese Resultate auf ein Beispiel anzuwenden, berechnen wir mit Rayleigh die Verschiebung des ersten Knotenpunktes, der $h = 2$ entspricht und auf einer homogenen Saite in der Mitte liegt. In der Nähe

---

[1]) Die Überlegungen von § 3, 3 bezogen sich zwar nur auf endlich viele Freiheitsgrade, sollen aber hier nach dem Vorgang von Rayleigh unbedenklich auf unendlich viele Freiheitsgrade angewandt werden. Da wir später auf die Ergebnisse nicht zurückkommen, überlassen wir die Rechtfertigung dem Leser.

des Mittelpunktes der Saite, für $x = \frac{\pi}{2} + \delta x$, lautet der Wert von u näherungsweise, wenn man $(\delta x)^2$ vernachlässigt:

$$u = f_1^{(2)} \sin\frac{\pi}{2} + f_2^{(2)} \sin\frac{2\pi}{2} + f_3^{(2)} \sin\frac{3\pi}{2} + \cdots + \\ + \delta x \left\{ f_1^{(2)} \cos\frac{\pi}{2} + 2 f_2^{(2)} \cos\frac{2\pi}{2} + \cdots \right\}$$

$$= f_1^{(2)} - f_3^{(2)} + f_5^{(2)} - \cdots + \delta x \,(-2 f_2^{(2)} + 4 f_4^{(2)} - 6 f_6^{(2)} + \cdots).$$

Da nun $f_1^{(2)}, f_3^{(2)}, f_4^{(2)}, f_5^{(2)}, \ldots$ mit ε unendlich klein werden, kann man im variierten Knotenpunkt für δx setzen

$$\delta x = \frac{f_1^{(2)} - f_3^{(2)} + f_5^{(2)} - \cdots}{2 f_2^{(2)}}.$$

Nach unseren Formeln gilt hier

$$\frac{f_k^{(2)}}{f_2^{(2)}} = \frac{8\varepsilon}{\pi (k^2 - 4)\, \varrho_0} \int_0^{\pi} \sigma(x) \sin k x \sin 2 x \, dx.$$

Wird z. B. die Inhomogenität dadurch bewirkt, daß im Punkte $x = \frac{\pi}{4}$ ein kleines Gewicht $\varrho_0 \lambda$ angebracht wird, so erhält man für $\frac{f_k^{(2)}}{f_2^{(2)}}$ bzw. δx durch einen leicht auszuführenden Grenzübergang

$$\frac{f_k^{(2)}}{f_2^{(2)}} = \frac{8\lambda \sin\frac{k\pi}{4}}{\pi (k^2 - 4)}, \qquad \delta x = \frac{4\lambda\xi}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1^2 - 4} - \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{3^2 - 4} + \frac{\sin\frac{5\pi}{4}}{5^2 - 4} - \cdots\right)$$

$$= \frac{4\lambda\xi}{\pi\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1^2 - 4} - \frac{1}{3^2 - 4} - \frac{1}{5^2 - 4} + \cdots\right) = -\frac{\lambda\xi}{2},$$

wie eine einfache Rechnung zeigt.

§ 6. Der schwingende Stab.

Bei der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

der *Transversalschwingungen eines homogenen Stabes* — wir beschränken uns hier der Kürze halber auf den homogenen Stab, da der unhomogene uns keine weiteren neuen Gesichtspunkte gegenüber den in § 5 entwickelten lehren würde — handelt es sich wiederum um die Bestimmung der Eigenschwingungen, welche wir durch den Ansatz $u = f(x)\, g(t)$ erhalten. Es ergibt sich wie früher

$$-\frac{f^{IV}}{f} = \frac{\ddot{g}}{g} = -\lambda,$$

d. h.

$$f^{IV} - \lambda f = 0, \qquad \ddot{g} + \lambda g = 0, \tag{21}$$

wobei die Konstante λ so zu bestimmen ist, daß der Stab an seinen Endpunkten den vorgeschriebenen Randbedingungen genügt. Wir nehmen die Länge des Stabes wieder gleich π, als Ruhelage des Stabes das Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ und unterscheiden verschiedene Arten von Randbedingungen (vgl. Kap. IV, § 8 und 9):

1. $f''(x) = f'''(x) = 0$ für $x = 0$ bzw. $x = \pi$ (freies Ende).
2. $f(x) = f''(x) = 0$ für $x = 0$ bzw. $x = \pi$ (gestütztes Ende).
3. $f(x) = f'(x) = 0$ für $x = 0$ bzw. $x = \pi$ (eingespanntes Ende).
4. $\left.\begin{array}{ll} f(0) = f(\pi), & f'(0) = f'(\pi), \\ f''(0) = f''(\pi), & f'''(0) = f'''(\pi) \end{array}\right\}$ (Periodizität).

Für alle diese Fälle lassen sich die Eigenfunktionen und Eigenwerte explizit angeben, da man das allgemeine Integral der ersten Differentialgleichung (21) kennt, nämlich, wenn $\lambda \neq 0$ ist und $\sqrt[4]{\lambda} = \nu$ gesetzt wird:

$$y = c_1 \cos \nu x + c_2 \sin \nu x + c_3 e^{\nu x} + c_4 e^{-\nu x}$$

oder

$$y = \xi_1 \cos \nu x + \xi_2 \sin \nu x + \xi_3 \mathfrak{Cos}\, \nu x + \xi_4 \mathfrak{Sin}\, \nu x.$$

Für $\lambda = 0$ artet die allgemeine Lösung aus in ein Polynom dritten Grades $y = \xi_1 + \xi_2 x + \xi_3 x^2 + \xi_4 x^3$.

Die vier homogenen Randbedingungen, denen der Stab unterworfen ist (zwei für jedes Ende) ergeben nun vier homogene Gleichungen der Form $\sum_{k=1}^{4} a_{ik} \xi_k = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ für die vier Größen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, welche das Verschwinden der Determinante $|a_{ik}|$ fordern, d. h. eine gewisse transzendente Gleichung für die Eigenwerte λ. Jede Wurzel dieser Gleichung liefert eine oder mehrere als normiert wählbare Eigenfunktionen. Speziell erhalten wir für den *beiderseits freien Stab* als transzendente Gleichung für ν die Beziehung:

$$\cancel{\mathfrak{Cos}\, \nu\pi \cos \nu\pi = 1}; \quad \mathfrak{Cos}\, \nu\pi - \cos \nu\pi = 0$$

die zugehörigen noch nicht normierten Eigenfunktionen sind, abgesehen von der zum zweifachen Eigenwert $\lambda = 0$ gehörigen Funktion $\xi_1 + \xi_2 x$,

$$\begin{aligned} y = {} & (\sin \nu\pi - \mathfrak{Sin}\, \nu\pi)\,(\cos \nu x + \mathfrak{Cos}\, \nu x) \\ & - (\cos \nu\pi - \mathfrak{Cos}\, \nu\pi)\,(\sin \nu x + \mathfrak{Sin}\, \nu x). \end{aligned}$$

Die Lösung für den *beiderseits eingespannten Stab* erhalten wir aus der obigen Lösung für den freien Stab durch zweimalige Differentiation, da die so entstehende Funktion erstens der Differentialgleichung, zweitens den Randbedingungen des eingespannten Stabes genügt; und zwar erhält man so jede Eigenfunktion des eingespannten Stabes, da man von einer solchen durch zweimalige unbestimmte Integration bei geeigneter

Wahl der Integrationskonstanten zu einer Eigenfunktion des freien Stabes gelangt. Die Eigenwerte sind die Lösungen derselben transzendenten Geichung wie vorhin, die Eigenfunktionen werden gegeben durch den Ausdruck

$$y = (\sin \nu\pi - \mathfrak{Sin}\, \nu\pi)\overset{l}{\nu}(-\cos \nu x + \mathfrak{Cof}\, \nu x) - (\cos \nu\pi - \mathfrak{Cof}\, \nu\pi)\overset{l}{\nu}(-\sin \nu x + \mathfrak{Sin}\, \nu x).$$

Beim Stabproblem ist im Unterschied gegen das der schwingenden Saite das Auftreten mehrfacher Eigenwerte keineswegs ausgeschlossen. Z.B. besitzt das Problem des beiderseits freien Stabes für den Eigenwert Null die beiden voneinander unabhängigen normierten Eigenfunktionen $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ und $y = x\sqrt{\frac{3}{\pi^3}}$. Beim Übergang zum eingespannten Stab durch zweimalige Differentiation gehen diese beiden Eigenfunktionen und der zugehörige Eigenwert $\lambda = 0$ verloren. — Bei der freien Saite $(y'(0) = y'(\pi) = 0)$ ist ebenfalls $\lambda = 0$ ein Eigenwert, aber nur ein einfacher mit der Eigenfunktion $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

In allen Fällen bilden die Eigenfunktionen der Differentialgleichung (21) ein orthogonales Funktionensystem, wie wir wiederum nach der alten Methode schließen. Sind nämlich λ_n, λ_m zwei verschiedene Eigenwerte und sind y_n, y_m zugehörige Eigenfunktionen, so folgt durch zweimalige Teilintegration

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_0^\pi y_n y_m\, dx = (y_n y_m''' - y_m y_n''' - y_n' y_m'' + y_m' y_n'')\Big|_0^\pi,$$

und hier ist die rechte Seite wegen der homogenen Randbedingungen Null. *Die Vollständigkeit des Eigenfunktionensystems und die Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen mit stetigen ersten und zweiten und stückweise stetigen dritten und vierten Ableitungen wird sich aus den späteren Ausführungen* (§ 10) *ergeben.*

Im übrigen verläuft die Theorie der Transversalbewegungen des Stabes ganz analog der Theorie der Saite und braucht hier nicht weiter ausgeführt zu werden.

§ 7. Die schwingende Membran.

1. Das allgemeine Eigenwertproblem der homogenen Membran. Die Differentialgleichung $\Delta u = u_{tt}$ der schwingenden homogenen Membran führt ganz ebenso wie in den bisher erörterten Fällen zu einem Eigenwertproblem, nur daß hier die Differentialgleichung, für welche das Eigenwertproblem sich ergibt, eine partielle Differentialgleichung wird. Die Membran möge das Gebiet G der xy-Ebene mit der Berandung Γ bedecken; die übrigen Voraussetzungen und Bezeichnungen

bleiben ebenfalls dieselben wie in Kap. IV, § 8, 5. Als Randbedingung nehmen wir zunächst die einfachste, nämlich $u = 0$, d. h. wir betrachten die *eingespannte Membran*. Der Ansatz $u(x, y, t) = v(x, y)\, g(t)$ liefert sofort für die Funktionen $v(x, y)$, $g(t)$ die Beziehung

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\ddot{g}}{g} = -\lambda,$$

aus der sich ergibt, daß λ eine Konstante sein muß, die wir gleich ν^2 setzen. Die Funktion $v(x, y)$ ergibt sich wie oben aus dem Eigenwertproblem, den Parameter λ als „Eigenwert" so zu bestimmen, daß es eine zugehörige in G mit ihren Ableitungen stetige Funktion $v(x, y)$ gibt, welche der Differentialgleichung

$$\Delta v + \lambda v = 0 \tag{22}$$

genügt, am Rande verschwindet und normiert gewählt werden kann. Die Eigenwerte λ müssen positive Zahlen sein, wie das schon durch die Schreibweise $\lambda = \nu^2$ ausgedrückt ist. In der Tat folgt durch Anwendung der Greenschen Formel (vgl. Kap. IV, (89)) auf die mit v multiplizierte Gleichung (22)

$$\iint_G (v_x^2 + v_y^2)\, dx\, dy = -\iint_G v\, \Delta v\, dx\, dy = \lambda \iint_G v^2\, dx\, dy,$$

woraus sich das positive Vorzeichen von λ ergibt. Danach wird die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\frac{\ddot{g}}{g} = -\lambda = -\nu^2$ die Gestalt $g = a \cos \nu t + b \sin \nu t$ haben, also eine periodische Funktion der Zeit sein. Die Lösung

$$u(x, y, t) = v(x, y)\, (a \cos \nu t + b \sin \nu t)$$

der Schwingungsgleichung entspricht dann einer *Eigenschwingung mit der Frequenz* $\nu = \sqrt{\lambda}$.

Die Existenz der Eigenschwingungen, genauer die Existenz einer unendlichen abzählbaren Folge von Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ und zugehörigen Eigenfunktionen $v_1(x, y)$, $v_2(x, y)$, $v_3(x, y)$, ... werden wir in § 10 nachweisen, ebenso die zugehörigen *Entwicklungssätze*. Schon hier sei aber wieder auf die *Orthogonalitätseigenschaft* der Eigenfunktionen hingewiesen, die sich in dem Satze ausspricht: zwei zu verschiedenen Eigenwerten λ_i und λ_k gehörige Eigenfunktionen v_i, v_k sind zueinander orthogonal, d. h. es gilt

$$\iint_G v_i v_k\, dx\, dy = 0.$$

Der Beweis folgt nach dem uns schon geläufigen Muster, indem wir

mit Hilfe der Greenschen Formel und der Randbedingung $u = 0$ schließen

$$(\lambda_i - \lambda_k)\iint_G v_i v_k \, dx\, dy = -\iint_G (v_k \Delta v_i - v_i \Delta v_k)\, dx\, dy = 0 .$$

Die Bewegung einer frei schwingenden eingespannten Membran bei willkürlich vorgegebenen Anfangsbedingungen $u(x, y, 0) = f(x, y)$, $\dot{u}(x, y, 0) = g(x, y)$ läßt sich genau wie früher mit Hilfe des Entwicklungssatzes durch Entwicklung nach den Eigenfunktionen charakterisieren, nämlich in der Form

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, y)\,(a_n \cos \nu_n t + b_n \sin \nu_n t)\,, \tag{23}$$

wobei die Koeffizienten a_n, b_n durch die Anfangsbedingungen als

$$a_n = \iint_G f(x, y)\, v_n(x, y)\, dx\, dy\,, \qquad b_n = \frac{1}{\nu_n}\iint_G g(x, y)\, v_n(x, y)\, dx\, dy$$

festgelegt sind. Hierbei ist stillschweigend vorausgesetzt, daß die Reihe (23) konvergiert und sich hinreichend oft gliedweise differenzieren läßt.

Ganz analog wie bei der eingespannten Membran liegen die Verhältnisse, wenn entsprechend einer elastischen Bindung der Membran am Rande eine Randbedingung der Form $\frac{\partial u}{\partial n} = -\sigma u$ gegeben ist, wobei σ eine positive, im allgemeinen mit dem Orte am Rande veränderliche Größe bedeutet. Die potentielle Energie der Membran hat hier nach Kap. IV, § 9, 3 den Wert $U = \frac{1}{2}\iint_G (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy + \frac{1}{2}\int_{\Gamma} \sigma u^2 \, ds$. Das Eigenwertproblem formuliert sich genau wie oben, ebenso die Lösung des Anfangswertproblems auf Grund des Entwicklungssatzes. Der wesentlich positive Charakter der potentiellen Energie U verbürgt uns wieder, daß die Eigenwerte λ positive Zahlen sind. Multiplizieren wir nämlich die Differentialgleichung (22) mit v und integrieren über G, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Greensche Formel Kap. IV, (89) und die Randbedingung $\sigma v + \frac{\partial v}{\partial n} = 0$ sofort

$$\lambda = \lambda \iint_G v^2\, dx\, dy = \iint_G (v_x^2 + v_y^2)\, dx\, dy + \int_{\Gamma} \sigma v^2 \, ds\,.$$

Die Zahlen $\nu = \sqrt{\lambda}$ sind die Frequenzen der entsprechenden Eigenschwingungen. Die zu verschiedenen Eigenwerten λ_i, λ_k gehörigen Eigenfunktionen sind zueinander orthogonal.

Von Interesse ist der Grenzfall $\sigma = 0$ der *freien Membran*, der durch geeignete Vorrichtungen auch physikalisch realisiert werden kann. Während bei allen anderen Randbedingungen jeder Eigenwert

positiv ist, gibt es hier den Eigenwert $\lambda = 0$ mit der zugehörigen Eigenfunktion $v(x, y) =$ konst.

2. Erzwungene Bewegungen. Auch die der Differentialgleichung

$$\Delta u = u_{tt} - Q(x, y, t) \tag{24}$$

genügenden erzwungenen Bewegungen der Membran lassen sich ganz nach dem Muster von § 4, 3 behandeln. Entweder denke man sich die äußere Kraft $Q(x, y, t)$ und ebenso die gesuchte Funktion u in eine Reihe $Q(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) v_n(x, y)$ bzw. $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n(x, y)$ nach den Eigenfunktionen $v_n(x, y)$ der frei schwingenden Membran entwickelt und bestimme dann die Koeffizienten $u_n(t)$ aus den Differentialgleichungen

$$\ddot{u}_n + \lambda_n u_n = q_n ;$$

oder man denke sich, indem man eine periodische äußere Kraft annimmt, diese in eine Fouriersche Reihe entwickelt; dann braucht man die Gleichung (24) nur für den Fall einer rein periodischen Kraft $\varphi(x, y) e^{i\omega t}$ durch eine Funktion $v(x, y) e^{i\omega t}$ zu lösen. Für die Funktion $v(x, y)$ ergibt sich sofort die Differentialgleichung

$$\Delta v + \lambda v = \varphi(x, y), \qquad (\lambda = \omega^2) \tag{25}$$

deren Lösung wir z. B. erhalten, indem wir $v(x, y)$ in eine Eigenfunktionenreihe $v = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n v_n$ entwickelt denken; die Koeffizienten dieser Reihe bestimmen sich, wenn wir mit diesem Ansatz in die Differentialgleichung (25) hineingehen und die rechte Seite ebenfalls in die Form $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$, $c_n = \iint_G \varphi v_n \, dx \, dy$ setzen; es ergibt sich wie oben

$$\gamma_n = \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n} \qquad (\lambda = \omega^2).$$

Bei allen diesen Operationen ist natürlich stillschweigend vorausgesetzt, daß die auftretenden Reihen konvergieren und daß die nötigen Differentiationen gliedweise ausführbar sind. Beide Methoden unterscheiden sich im wesentlichen nur durch die verschiedene Reihenfolge, in der die Entwicklungen vorgenommen sind.

3. Knotenlinien. Ebenso wie bei einer Saite oder einem Stabe diejenigen Punkte ein besonderes Interesse darbieten, an welchen eine Eigenfunktion y verschwindet, die *„Knotenpunkte"* der zugehörigen Eigenschwingung $y_n e^{i\nu_n t}$, spielen bei den Eigenschwingungen der Membran *Knotenlinien* eine Rolle, d. h. Kurven $v_n(x, y) = 0$. Längs dieser Knotenlinien bleibt die Membran bei Ausführung der Eigenschwingungen

stets in Ruhe. Für ein tieferes Studium der Natur der Eigenfunktionen ist die Betrachtung der Knotenlinien und ihrer Eigenschaften von der größten Bedeutung. Wir können hier nicht allgemein auf diese Fragen eingehen, kommen aber an Hand von Beispielen darauf zurück (vgl. auch Kap. VI, § 5).

4. Rechteckige Membran. Entsprechend der Tatsache, daß das Eigenwertproblem der Membran von der willkürlichen Wahl des Gebietes abhängt, steckt in dem allgemeinen Problem noch eine große Fülle von Einzelfragen, von denen wir hier einige besonders herausgreifen wollen. Wir betrachten zunächst eine rechteckige Membran, welche das Gebiet G $(0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b)$ bedeckt. Für die Randbedingungen $u = 0$ oder $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ lassen sich die Eigenwerte und Eigenfunktionen sofort angeben. Im ersten Falle sind die Eigenwerte die Zahlen $\lambda = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)$ $(n, m = 1, 2, 3, \ldots)$, die zugehörigen Eigenfunktionen die Produkte $\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$. Im zweiten Falle sind die Eigenwerte die Zahlen $\lambda = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)$ $(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$ und die zugehörigen Eigenfunktionen werden durch $\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$ gegeben; hier ist auch $\lambda = 0$ ein Eigenwert, wie schon früher hervorgehoben wurde.

Daß wir auf diese Art alle Eigenfunktionen des Problems erhalten haben, geht aus der Tatsache unmittelbar hervor, daß z. B. die Funktionen $\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$ für das Gebiet G ein vollständiges orthogonales Funktionensystem bilden, so daß eine weitere auf den angegebenen orthogonale Eigenfunktion nicht existieren kann. Jede andere Eigenfunktion müßte nämlich, falls ihr Eigenwert mit keinem der obigen λ übereinstimmt, orthogonal auf allen obigen Sinusprodukten sein; stimmt ihr Eigenwert mit einem der obigen λ überein, so bleibt nach Subtraktion einer geeigneten Linearkombination der angehörigen Sinusprodukte eine zu diesen und wie vorher auch zu den anderen Sinusprodukten orthogonale, also identisch verschwindende Funktion übrig.

Die Entwicklungssätze usw. reduzieren sich hier einfach auf die aus Kap. II bekannten Tatsachen über Fouriersche Reihen. Wir können beim Rechteck auf Grund der expliziten Kenntnis der Eigenwerte und Eigenfunktionen eine Reihe von Fragen viel eingehender studieren als im allgemeinen Falle. Zunächst die *Verteilung der Eigenwerte*, die uns durch eine Doppelreihe gegeben sind. Vor allem interessiert uns die Frage, wieviele Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ unterhalb einer gegebenen Schranke λ liegen, mit anderen Worten, wieviele Lösungen in ganzen nicht negativen Zahlen die Ungleichung $\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \leqq \frac{\lambda}{\pi^2}$ besitzt. Wenn diese Frage auch nicht in einfacher Weise exakt beantwortet werden kann,

so läßt sich doch die gesuchte Anzahl $A(\lambda)$ für große Werte von λ *asymptotisch* angeben. Diese Anzahl ist nämlich genau gleich der Anzahl der Gitterpunkte im positiven Quadranten der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{\lambda}{\pi^2}$. Bei hinreichend großem λ wird der Quotient des Flächeninhalts dieses Ellipsenquadranten dividiert durch die Anzahl der in ihm liegenden Gitterpunkte beliebig nahe an 1 liegen. Ordnet man nämlich jedem Gitterpunkt das rechts oben von ihm gelegene Gitterquadrat zu, so enthält der von diesen Quadraten gebildete Bereich den Ellipsenquadranten; läßt man dagegen die vom Ellipsenbogen durchschnittenen Quadrate weg — ihre Anzahl sei $B(\lambda)$ —, so ist der übrigbleibende Bereich im Ellipsenquadranten enthalten. Wir haben also die Ungleichung zwischen den Flächeninhalten

$$A(\lambda)-B(\lambda)\leqq\lambda\frac{ab}{4\pi}\leqq A(\lambda).$$

Der in zwei aufeinanderfolgenden Randquadraten eines Quadranten enthaltene Ellipsenbogen hat aber mindestens die Länge 1; daher ist $B(\lambda)-1$ höchstens gleich der doppelten Länge der Viertelellipse, und diese wächst nun proportional mit $\sqrt{\lambda}$. So ergibt sich die gesuchte asymptotische Formel $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{A(\lambda)}{\lambda}=\frac{ab}{4\pi}$ oder

$$A(\lambda)\sim\lambda\frac{ab}{4\pi}.$$

Genauer können wir schreiben

$$A(\lambda)=\frac{ab}{4\pi}\lambda+\vartheta c\sqrt{\lambda},$$

wobei c eine von λ unabhängige Konstante, $|\vartheta|$ ein echter Bruch ist. Diese Formel gilt für beide betrachteten Randbedingungen. Denken wir uns die Eigenwerte nach wachsender Größe in eine Reihe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ geordnet, so können wir hieraus *asymptotisch den n^{ten} Eigenwert berechnen*, indem wir $A(\lambda_n)=n$ setzen. Es ergibt sich

$$\lambda_n\sim\frac{4\pi}{ab}A(\lambda_n)\sim\frac{4\pi}{ab}n$$

oder

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{n}=\frac{4\pi}{ab}.$$

Das Beispiel des Rechteckes zeigt uns, daß bei der Membran sehr wohl *mehrfache Eigenwerte* auftreten können. Dies tritt immer dann ein, wenn das Seitenverhältnis $a:b$ rational ist, weil dann die Gleichung $\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=\frac{m'^2}{a^2}+\frac{n'^2}{b^2}$ stets nicht triviale Lösungen in ganzen Zahlen >0 besitzt. Z. B. ist beim Quadrat $a=b=1$ eine solche Lösung $m'=n$,

$n' = m$, wozu die Eigenfunktionen $\sin mx \sin ny$ und $\sin nx \sin my$ gehören. Die Frage nach der Vielfachheit eines Eigenwertes kommt dann auf das zahlentheoretische Problem hinaus, wie oft sich eine Zahl ν^2 als Summe $\nu^2 = n^2 + m^2$ von zwei Quadraten darstellen läßt[1]).

Die Knotenlinien für die Eigenfunktionen $\sin nx \sin my$ sind einfach Parallelen zu den Koordinatenachsen. Bei mehrfachen Eigenwerten können aber noch ganz andere Knotenlinien auftreten, z. B. die Nullstellen der Funktion $\alpha \sin mx \sin ny + \beta \sin nx \sin my$ beim Quadrat. Die folgenden Abbildungen[2]) geben einige charakteristische Beispiele dafür. Dabei ist zur Abkürzung $u_{mn} = \sin mx \sin ny$ gesetzt.

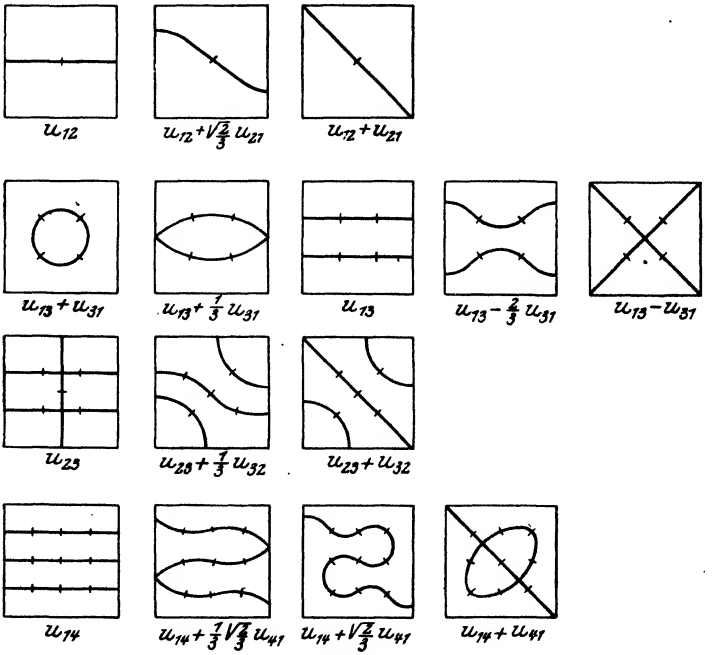


Abb. 3.

5. Kreisförmige Membran. Besselsche Funktionen. Die kreisförmige Membran, deren Radius wir, nötigenfalls nach einer Änderung des Maßstabes, als 1 annehmen können, gestattet ebenfalls eine explizite Behandlung. Die Differentialgleichung ihres Eigenwertproblems nimmt in Polarkoordinaten nach Kap. IV, § 7, 2 die Gestalt an

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\vartheta\vartheta} + \lambda v = 0 . \tag{26}$$

[1]) Vgl. hierzu *Dirichlet-Dedekind:* Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl., § 68, S. 164—166. Braunschweig 1894.

[2]) Sie sind dem im Literaturverzeichnis genannten Buch von *Pockels* entnommen.

Wenn wir wieder den Fall der eingespannten Membran betrachten, so haben wir die Randbedingung $v(1, \vartheta) = 0$. Es liegt nahe, die Lösung der Differentialgleichung (26) durch den Ansatz $v(r, \vartheta) = f(r)\,g(\vartheta)$ zu versuchen, welcher sofort die Beziehung

$$\frac{r^2\left(f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + \lambda f(r)\right)}{f(r)} = -\frac{g''(\vartheta)}{g(\vartheta)} = \alpha = \text{konst.}$$

liefert. Da die Funktion $v(r, \vartheta)$, also auch $g(\vartheta)$ eine periodische Funktion von ϑ mit der Periode 2π sein muß — sonst wäre v keine eindeutige Funktion des Ortes —, so folgt für α ein Wert $\alpha = n^2$, wobei n eine beliebige nicht negative ganze Zahl ist. Man erhält

$$g(\vartheta) = a \cos n\vartheta + b \sin n\vartheta$$

sowie für $f(r) = y$ die Differentialgleichung

$$r^2 y'' + r y' + (r^2\lambda - n^2)\, y = 0, \tag{27}$$

und es handelt sich darum, Eigenwerte λ zu finden, für welche es eine bei $r = 0$ stetige Lösung dieser Differentialgleichung gibt, die obendrein noch der Randbedingung $f(1) = 0$ genügt. Durch die Transformation $r\sqrt{\lambda} = \varrho$ oder $kr = \varrho$, wenn wir $\lambda = k^2$ setzen, geht die Gleichung (27) in die Gestalt

$$\frac{d^2y}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dy}{d\varrho} + \left(1 - \frac{n^2}{\varrho^2}\right) y = 0 \tag{28}$$

über. Die Lösungen dieser *„Besselschen Differentialgleichung"*, die sogenannten *Besselschen Funktionen*, spielen in der Analysis und mathematischen Physik eine besonders wichtige Rolle und werden uns später noch ausführlicher beschäftigen. Hier sei nur hervorgehoben, daß wir durch den Potenzreihenansatz $y(\varrho) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \varrho^m$ aus (28) fast unmittelbar die Lösung

$$\left\{\begin{aligned} y(\varrho) &= J_n(\varrho) \\ &= \frac{\varrho^n}{2^n \cdot n!}\left\{1 - \frac{\varrho^2}{2(2n+2)} + \frac{\varrho^4}{2\cdot 4\cdot (2n+2)(2n+4)} - + \cdots\right\} \end{aligned}\right. \tag{29}$$

erhalten, welche man die *Besselsche Funktion n^{ter} Ordnung* nennt. Die Reihe (29) konvergiert auf Grund der einfachsten Kriterien für jeden Wert von ϱ, d. h. die Besselschen Funktionen $J_n(\varrho)$ sind ganze transzendente Funktionen. Speziell gilt die Reihenentwicklung

$$J_0(\varrho) = 1 - \frac{\varrho^2}{2^2} + \frac{\varrho^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{\varrho^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots.$$

Wir erhalten nunmehr die Lösungen von (27) in der Form

$$y_n = J_n(kr), \qquad (k^2 = \lambda) \tag{30}$$

wobei die Konstante k durch die Randbedingung $y_n(1) = 0$ zu bestimmen ist, d. h. durch die Bedingung $J_n(k) = 0$. Die Eigenwerte $\lambda = k^2$ von (27) sind also die Quadrate der Nullstellen der Besselschen Funktionen. Was die Existenz dieser Nullstellen anbetrifft, so werden wir später zeigen, daß tatsächlich jede der Funktionen J_n unendlich viele reelle Nullstellen besitzt, die wir $k_{n,m}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ nennen wollen. Mit dieser Bezeichnung schreiben sich die Eigenfunktionen in der Gestalt

$$J_n(k_{n,m} r)\,(\alpha \cos n\vartheta + \beta \sin n\vartheta),$$

und die Eigenschwingungen werden dargestellt durch

$$u = J_n(k_{n,m} r)\,(\alpha \cos n\vartheta + \beta \sin n\vartheta)\,(a \cos k_{n,m} t + b \sin k_{n,m} t).$$

Dabei sind die Konstanten α, β, a, b noch beliebig, was uns zeigt, daß, abgesehen von den zu $n = 0$ gehörigen Eigenfunktionen, alle Eigenwerte zweifach sind, indem die linear unabhängigen Eigenfunktionen $J_n \cos n\vartheta$, $J_n \sin n\vartheta$ zu ihnen gehören. *Die Knotenlinien sind hier stets Kreise* $\varrho =$ konst. *bzw. Radien* $\vartheta =$ konst.

Wenn wir die allgemeinere Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial r} = -\sigma u$ mit konstantem σ zugrunde legen, so bleibt fast alles in unseren obigen Überlegungen bestehen. Nur die Randbedingung, aus der die Eigenwerte zu bestimmen sind, lautet dann etwas anders, nämlich

$$k J_n'(k) = -\sigma J_n(k).$$

Unsere Funktionen sind die einzigen Eigenfunktionen der Membran. Man kann den Beweis z. B. führen, indem man von der Bemerkung ausgeht, daß jede Eigenfunktion v und ihre Ableitungen v_ϑ, $v_{\vartheta\vartheta}$, $v_{\vartheta\vartheta\vartheta}$, $v_{\vartheta\vartheta\vartheta\vartheta}$, ... periodische und mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung versehene Funktionen von ϑ mit der Periode 2π sind, sich also in Fouriersche Reihen

$$v(r, \vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r)\, e^{in\vartheta}$$

entwickeln lassen müssen. Geht man mit diesen Reihen in die Differentialgleichung (26) hinein, so ergibt sich sofort, daß jedes einzelne Glied $f_n(r)\, e^{in\vartheta}$ der Differentialgleichung genügt. Man kann auch folgendermaßen verfahren: Indem man die Differentialgleichung nach ϑ differenziert, erkennt man, daß zugleich mit $v(r, \vartheta)$ auch alle Ableitungen v_ϑ, $v_{\vartheta\vartheta}$, $v_{\vartheta\vartheta\vartheta}$, $v_{\vartheta\vartheta\vartheta\vartheta}$, ... der Differentialgleichung (26) genügen müssen; da sie außerdem auch alle die Randbedingungen erfüllen, so muß zwischen endlich vielen von ihnen eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten bestehen: $cv + c_1 \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \cdots + c_h \frac{\partial^h v}{\partial \vartheta^h} = 0$. Dabei stützen wir

uns auf die erst später allgemein zu beweisenden Sätze, daß jeder Eigenwert nur endlich vielfach sein kann und daß jede zweimal differenzierbare Lösung von (22) Ableitungen beliebiger Ordnung besitzt. Die obige lineare Relation ist eine lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für $v(r, \vartheta)$ als Funktion von ϑ; da sie durch eine periodische Funktion von ϑ befriedigt werden muß, so ergibt sich von selbst für v die Gestalt $v = f(r)\, e^{in\vartheta}$ und daraus die Differentialgleichung (27) für $f(r)$.

Aus dem allgemeinen Entwicklungssatz folgt, daß man eine am Rande verschwindende und sonst im Kreise mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetige Funktion $w(r, \vartheta)$ in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe der Form

$$w(r, \vartheta) = \sum_{n,\, m=0}^{\infty} a_{nm} J_n(k_{n,m} r) \cos n(\vartheta - \vartheta_n)$$

entwickeln kann, worin z. B. für den Fall, daß w nicht von ϑ abhängt, *die Entwickelbarkeit einer willkürlichen, für $r = 1$ verschwindenden Funktion von r im Intervalle $0 \leqq r \leqq 1$ in eine Reihe nach den Besselschen Funktionen $J_0(k_{0,m} r)$ enthalten ist.*

Aus der allgemeinen Orthogonalitätsrelation für die Eigenfunktionen der Membrangleichung folgt für die Besselschen Funktionen bzw. für die Funktionen (30) durch Integration nach ϑ sofort die *Orthogonalitätsrelation*

$$\int_0^1 r J_n(k_{n,i} r)\, J_n(k_{n,j} r)\, dr = 0 \qquad (i \neq j),$$

die man auch direkt nach dem hier schon öfter angewandten Verfahren aus der Differentialgleichung (27) ableiten kann. Man erkennt übrigens unmittelbar, daß die Orthogonalität auch bei der allgemeineren Randbedingung $k J_n'(k) = -\sigma J_n(k)$ bestehen bleibt.

Zur Normierung dieser Funktionen $J_n(k_{n,m} r)$ bedienen wir uns zweckmäßigerweise der Relation

$$2 \int_0^1 J_n^2(kr)\, r\, dr = J_n'^2(k), \tag{31}$$

die man folgendermaßen beweist: Setzen wir $v = J_n(kr) \cos n\vartheta$, $v' = J_n(k'r) \cos n\vartheta$, so ergibt wegen $\Delta v + k^2 v = 0$, $\Delta v' + k'^2 v' = 0$ die Greensche Formel (Kap. IV, (90))

$$(k^2 - k'^2) \iint_G v v'\, dx\, dy = \iint_G (v \Delta v' - v' \Delta v)\, dx\, dy$$
$$= \int_F \left(v \frac{\partial v'}{\partial n} - v' \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

Wählen wir als Gebiet G den Einheitskreis, dividieren durch $k' - k$ und gehen zur Grenze $k' = k$ über, so erhalten wir

$$2\int_0^1 J_n^2(kr)\,r\,dr = J_n'^2(k) + \left(1 - \frac{n^2}{k^2}\right) J_n^2(k), \tag{32}$$

also im Falle $J_n(k) = 0$ die obige Gleichung (31). Es sind also für die Gleichung (27) die Funktionen

$$\frac{\sqrt{2}}{J_n'(k_{n,m})} J_n(k_{n,m} r)$$

die *normierten Eigenfunktionen*. Näheres über die Besselschen Funktionen möge der Leser in Kap. VII und weiterhin in Spezialwerken nachsehen.

6. Die unhomogene Membran. Die verallgemeinerte Differentialgleichung der unhomogenen Membran

$$p\,\Delta u + p_x u_x + p_y u_y - q\,u = \varrho(x, y)\,u_{tt},$$

wobei p und ϱ überall in G positiv sind, führt auf ein Eigenwertproblem, welches dem allgemeinen Sturm-Liouvilleschen von § 5 analog ist, nämlich auf das Problem, diejenigen Werte von λ zu bestimmen, für welche die Differentialgleichung

$$L[v] + \lambda\varrho v = p\,\Delta v + p_x v_x + p_y v_y - q v + \lambda\varrho v = 0$$

eine normierte, den vorgegebenen homogenen Randbedingungen genügende Lösung besitzt. Mit Hilfe der Greenschen Formel

$$\iint_G (v_2 L[v_1] - v_1 L[v_2])\,dx\,dy = \int_\Gamma p\left(v_2 \frac{\partial v_1}{\partial n} - v_1 \frac{\partial v_2}{\partial n}\right) ds = 0$$

(Kap. IV, § 8, 5) ergibt sich wie oben für Eigenfunktionen v_i, v_j, die zu verschiedenen Eigenwerten λ_i, λ_j gehören, die Relation

$$\iint_G \varrho v_i v_j\,dx\,dy = 0.$$

Wir wollen die Eigenfunktionen im allgemeinen so festlegen, daß die Funktionen $\sqrt{\varrho}\,v_i$ ein normiertes orthogonales Funktionensystem bilden, d. h. wir wollen

$$\iint_G \varrho v_i^2\,dx\,dy = 1$$

setzen. Die *Existenz der Eigenwerte und der Entwicklungssatz*, welcher die Entwickelbarkeit einer den Randbedingungen genügenden und mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung versehenen Funktion $f(x, y)$ in eine Reihe $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x, y)$ mit $c_n = \iint_G \varrho f v_n\,dx\,dy$ besagt, wird im Paragraphen 10 dieses Kapitels bewiesen werden.

§ 8. Die schwingende Platte.

1. Allgemeines. Bei der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta u + u_{tt} = 0 \tag{33}$$

der homogenen schwingenden Platte können wir uns hier kurz fassen, indem wir nur das prinzipiell gegenüber den früheren Entwicklungen neu Hinzukommende erwähnen. Das Eigenwertproblem, welches sich wieder durch den Ansatz $u = v(x, y)\, g(t)$ ergibt, lautet

$$\Delta\Delta v - \lambda v = 0 \tag{34}$$

mit $\lambda = \nu^2$, $g(t) = \alpha e^{\pm i\nu t}$ oder $g(t) = a\cos\nu t + b\sin\nu t$. Als Randbedingungen kommen hauptsächlich in Betracht

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{d. h.} \quad v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0$$

(*eingespannte Platte*); auf die Schwingungen der *freien Platte*, deren Randbedingungen in Kap. IV, § 8 angegeben sind, wollen wir hier nicht eingehen. Die *Orthogonalität zweier zu verschiedenen Eigenwerten gehöriger Eigenfunktionen* wird nach demselben Muster bewiesen wie früher, wobei die Greensche Formel Kap. IV, (97) benutzt wird. Der einzige prinzipielle Unterschied ist, daß hier zwei homogene Randbedingungen zur Charakterisierung des Eigenwertproblems gehören, entsprechend der Tatsache, daß wir es hier mit einer partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung zu tun haben.

2. Kreisförmige Begrenzung. Die analytischen Schwierigkeiten des Problems sind naturgemäß hier wesentlich größer als bei der Membran. Z. B. gelingt es keineswegs, den Fall rechteckiger Begrenzung mit explizit bekannten Funktionen zu behandeln. Die einzige Begrenzung, für welche eine solche explizite Behandlung gelungen ist, ist der Kreis. Hier werden wir wieder auf Besselsche Funktionen geführt, wenn wir Polarkoordinaten r, ϑ einführen. Wir können mit $\lambda = k^4$ die Differentialgleichung in die ohne weiteres verständliche symbolische Gestalt

$$(\Delta\Delta - k^4)\, v = 0$$

oder

$$(\Delta - k^2)(\Delta + k^2) v = 0$$

setzen, wobei der Operator Δ die Bedeutung

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}$$

hat. Denkt man sich v in eine Fouriersche Reihe entwickelt

$$v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n(r)\, e^{in\vartheta},$$

so erkennt man sofort, daß jedes Glied der Reihe für sich der Differentialgleichung genügen und daß daher y_n eine Lösung von

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r^2}-k^2\right)\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r^2}+k^2\right)y=0$$

sein muß. Wir können sofort zwei voneinander unabhängige, für $r=0$ reguläre Lösungen dieser Differentialgleichung angeben, nämlich $J_n(kr)$ und $J_n(ikr)$ mit $i=\sqrt{-1}$, und haben also in der Funktion

$$v(r,\vartheta)=J_n(kr)(a_1\cos n\vartheta+b_1\sin n\vartheta)+J_n(ikr)(a_2\cos n\vartheta+b_2\sin n\vartheta)$$

eine Lösung von (34). Um den Randbedingungen $v(1,\vartheta)=0$, $v_r(1,\vartheta)=0$ zu genügen, haben wir zu setzen

$$\begin{aligned} J_n(k)a_1+J_n(ik)a_2&=0, & J_n(k)b_1+J_n(ik)b_2&=0,\\ J_n'(k)a_1+iJ_n'(ik)a_2&=0, & J_n'(k)b_1+iJ_n'(ik)b_2&=0, \end{aligned}$$

woraus sich für die Eigenfrequenz k die transzendente Gleichung

$$\frac{J_n'(k)}{J_n(k)}=\frac{iJ_n'(ik)}{J_n(ik)}$$

ergibt; in ihr tritt, wie die Reihenentwicklungen (29) zeigen, die imaginäre Einheit i nicht mehr wirklich auf. Im einzelnen sei hier wieder auf die Literatur verwiesen.

§ 9. Andere Eigenwertprobleme.

Mit den oben entwickelten Problemstellungen ist der Kreis derjenigen Fragen aus der Differentialgleichungstheorie noch nicht erschöpft, welche auf Eigenwerte und Eigenfunktionen führen. Wir wollen hier noch einige andere typische Fälle erörtern.

1. Probleme vom Sturm-Liouvilleschen Typus. Besselsche Funktionen, Legendresche Funktionen beliebiger Ordnung. Jacobische, Hermitesche, Laguerresche, Tschebyscheffsche Polynome. Eigenwertprobleme vom Sturm-Liouvilleschen Typus, d. h. solche, die zu Differentialgleichungen der Form

$$(py')'-qy+\lambda\varrho y=0$$

gehören, treten in vielfachen mathematischen Zusammenhängen auf. Dies gilt z. B. für die oben behandelte Besselsche Differentialgleichung

$$(xy')'-\frac{n^2}{x}y+\lambda xy=0, \tag{35}$$

die sich bei den verschiedensten Fragen der mathematischen Physik ergibt. *Die Besselsche Gleichung ist vom Sturm-Liouvilleschen Typus*; nur gilt hier nicht mehr die in § 5,1 gemachte Voraussetzung, daß $p>0$

im ganzen Grundgebiet $0 \leqq x \leqq 1$ ist, sondern es ist $p(0) = 0$. Die Stelle $x = 0$ ist also im Sinne der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen ein *singulärer Punkt der Besselschen Differentialgleichung, und daher stellt es eine besondere Randbedingung für die Lösung dar, wenn wir reguläres Verhalten oder Endlichbleiben in diesem Punkte verlangen.* Die Randbedingungen unseres Sturm-Liouvilleschen Problems lauten also hier: Endlichbleiben für $x = 0$ und Verschwinden für $x = 1$.

Wenn wir statt der Besselschen Funktionen $y = J_n(\sqrt{\lambda}x)$ die zugehörigen Orthogonalfunktionen $z = \sqrt{x} J_n(\sqrt{\lambda}x)$ betrachten wollen, so können wir sie durch die Differentialgleichung

$$z'' - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2} z + \lambda z = 0 \tag{36}$$

charakterisieren, welche sich ohne weiteres aus der Besselschen ergibt. (Es handelt sich hier um ein Beispiel zu der auf S. 239 allgemein ausgeführten Transformation.) Für die Funktion $\zeta = \frac{z}{x} = \frac{J_n(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{x}}$ ergibt sich die Differentialgleichung

$$(x^2 \zeta')' - (n^2 - \tfrac{1}{4})\zeta + \lambda x^2 \zeta = 0. \tag{37}$$

Ein Problem ähnlicher Art bieten die *Legendreschen Funktionen.* Sie genügen der Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichung

$$[(1 - x^2) y']' + \lambda y = 0 \tag{38}$$

für die Eigenwerte $\lambda = n(n+1)$, wobei $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ist. Die Randbedingungen lauten: y bleibt regulär für $x = +1$ und $x = -1$, die beiden singulären Stellen der Differentialgleichung. Das Grundgebiet ist $-1 \leqq x \leqq +1$.

Wir können leicht zeigen, *daß die Legendreschen Polynome die einzigen Lösungen dieses Eigenwertproblems sind.* Zu diesem Zwecke beachten wir, daß zugleich mit $y = f(x)$ auch die Funktion $f(-x)$ der obigen Differentialgleichung genügt und daß also dasselbe von den Funktionen $f(x) + f(-x)$ und $f(x) - f(-x)$ gilt, von denen die eine grade, die andere ungrade ist und wenigstens eine nicht identisch verschwindet, da y als nicht identisch Null vorausgesetzt war. Wir brauchen also nur zu zeigen, daß jede grade und jede ungrade Lösung y von (38), welche für $-1 \leqq x \leqq 1$ stetig ist, ein Legendresches Polynom ist und dabei λ eine Zahl der Form $n(n+1)$ sein muß. Setzen wir y in Form einer Potenzreihe an: $y = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, so liefert (38) sofort die Rekursionsformel

$$a_\nu = \frac{(\nu - 1)(\nu - 2) - \lambda}{\nu(\nu - 1)} a_{\nu-2}. \tag{39}$$

Ist y gerade, so sind alle a_ν mit ungeradem ν Null, ist y ungerade, so gilt dasselbe für a_ν mit geradem ν. Aus (39) folgt sofort

$$(40)\quad a_\nu = \frac{1}{\nu}\left[1-\frac{\lambda}{(\nu-1)(\nu-2)}\right]\left[1-\frac{\lambda}{(\nu-3)(\nu-4)}\right]\cdots\left[1-\frac{\lambda}{(\nu-2h+1)(\nu-2h)}\right]k a_k,$$

wenn $k = \nu - 2h$ gesetzt wird. Unsere Reihe für y bricht dann und nur dann ab, wenn λ die Form $n(n+1)$ hat; y stellt dann, wie man sofort sieht, das n^{te} Legendresche Polynom dar. Für alle anderen Werte von λ erhalten wir eine unendliche Potenzreihe, die nach elementaren Regeln für $|x|<1$ konvergiert. Wir wählen k fest und so groß, daß alle Faktoren des obigen Produktes positiv sind (a_k darf als positiv angenommen werden). Da bei wachsendem ν das mit eckigen Klammern geschriebene Produkt rechts in (40) nach bekannten Sätzen gegen einen positiven Grenzwert strebt, so gilt für $\nu > k$ sicher $a_\nu > \frac{c}{\nu}$, wo c eine positive Konstante ist. Daher wird $\sum_{n=k}^{\nu} a_n x^n$ absolut genommen beliebig groß, wenn $|x|$ hinreichend nahe an 1 liegt und ν genügend groß gewählt wird. Hieraus aber folgt, daß $\lim_{x\to\pm 1} |y(x)| = \infty$ wird, daß also λ kein Eigenwert sein kann[1]).

Ein zweiter Beweis ergibt sich ohne Rechnung aus der uns von früher bekannten Tatsache, daß die Legendreschen Polynome ein vollständiges orthogonales Funktionensystem bilden; eine Eigenfunktion der obigen Differentialgleichung (38), welche kein Legendresches Polynom wäre, müßte wegen der Orthogonalitätseigenschaften der Eigenfunktionen orthogonal auf allen Legendreschen Polynomen sein, was deren Vollständigkeit widerspricht.

Aus der Differentialgleichung der Legendreschen Polynome können wir durch einen Gedanken von weiter tragender Allgemeinheit leicht andere Klassen von orthogonalen Eigenfunktionssystemen ableiten. Wenn wir nämlich die Gleichung (38) nach x differenzieren, so erhalten wir eine Differentialgleichung für die Funktion $y'(x)$, und genau wie oben folgt, daß nur für $\lambda = n(n+1)$ eine an beiden Endpunkten des Intervalles endlich bleibende reguläre Lösung, nämlich $P_n'(x)$, existiert. Die so für $P_n'(x)$ entstehende Gleichung ist noch nicht sich selbst adjungiert. Wir machen sie zu einer sich selbst adjungierten, indem wir die Funktion $P_n'(x)\sqrt{1-x^2} = z_n$ als Unbekannte einführen. Dann lautet die neue Gleichung

$$(1-x^2)z'' - 2xz' - \frac{z}{1-x^2} + \lambda z = 0;$$

[1]) Vgl. zur obigen Überlegung, die übrigens eng mit dem Raabeschen bzw. Gaußschen Konvergenzkriterium zusammenhängt, *Kneser, A.*: Zur Theorie der Legendreschen Polynome. Tôhoku math. J. Bd. 5, S. 1—7. 1914.

die zugehörigen Eigenwerte sind $\lambda = n(n+1)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ mit den Eigenfunktionen

$$z_n = \sqrt{1-x^2}\, P_n'(x).$$

Die Funktionen $z_n = P_{n,1}(x)$ heißen *zugeordnete Legendresche Funktionen erster Ordnung*. (Die Funktionen $P_n(x) = P_{n,0}(x)$ werden wir gelegentlich als Legendresche Funktionen nullter Ordnung bezeichnen.) Die $P_{n,1}$ genügen der Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{1} P_{n,1}\, P_{m,1}\, dx = 0 \qquad \text{für} \qquad n \neq m.$$

Ebenso erhalten wir durch h-malige Differentiation von (38) für die Funktion

$$\sqrt{1-x^2}^{\,h} \frac{d^h}{dx^h} P_n(x) = P_{n,h}(x)$$

die Differentialgleichung

$$(1-x^2)\, z'' - 2x\, z' - \frac{h^2 z}{1-x^2} + \lambda z = 0 \tag{41}$$

mit den Eigenwerten $\lambda = n(n+1)$ $(n = h, h+1, \ldots)$ und den zugehörigen Eigenfunktionen $P_{n,h}(x)$, welche ebenfalls zueinander orthogonal sind und *Legendresche Funktionen h^{ter} Ordnung* heißen. Ihre *Normierung* geschieht mit Hilfe der leicht zu bestätigenden Gleichung

$$\int_{-1}^{1} P_{n,h}^2\, dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+h)!}{(n-h)!}.$$

Daß wir hiermit alle Eigenwerte und Eigenfunktionen von (41) haben, zeigt man ebenso wie bei den Legendreschen Polynomen.

Eine Verallgemeinerung der Legendreschen Polynome bilden die *Jacobischen Polynome* aus Kap. II, § 10, deren Differentialgleichung wir in der folgenden ebenfalls Sturm-Liouvilleschen Form schreiben können:

$$[(1-x)^p (1+x)^q x\,(1-x)\, y']' + \lambda (1-x)^p (1+x)^q y = 0.$$

Zum n^{ten} Jacobischen Polynom gehört der Eigenwert $\lambda = n(p+n)$ bei den Randbedingungen: Regularität für $x = \pm 1$. Daß es andere Lösungen dieses Eigenwertproblems als die Jacobischen Polynome nicht gibt, folgt ebenso wie oben auf beiden Wegen.

Ein weiteres Beispiel bieten die *Tschebyscheffschen Polynome*, welche zu der Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichung

$$\left(\sqrt{1-x^2}\, y'\right)' + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}\, y = 0$$

gehören, ebenfalls bei den Randbedingungen der Regularität bei

$x = \pm 1$. Der zum Tschebyscheffschen Polynom $T_n(x)$ gehörige Eigenwert ist $\lambda = n^2$, und ebenso wie oben sind damit alle Eigenwerte und Eigenfunktionen erschöpft.

Ähnlich sind die Polynome $H_n(x)$ von *Hermite* bzw. die zugehörigen *Hermiteschen Orthogonalfunktionen* $H_n e^{-\frac{x^2}{2}}$ die Lösungen der folgenden Eigenwertprobleme (vgl. Kap. II, § 10, 4):

$$(e^{-x^2} y')' + \lambda e^{-x^2} y = 0 \tag{42}$$

bzw.

$$y'' + (1 - x^2) y + \lambda y = 0 \tag{43}$$

mit den Eigenwerten $\lambda = 0, 2, 4, 6, \ldots$ Das Grundgebiet ist die ganze Gerade $-\infty \leqq x \leqq +\infty$, und die Randbedingung zu (42) lautet hier, daß die Eigenfunktion für $x = \pm\infty$ nur wie eine endliche Potenz von x unendlich werden soll. Daß außer diesen Polynomen das Hermitesche Eigenwertproblem keine anderen Lösungen besitzt, kann man direkt ohne funktionentheoretische Hilfsmittel folgendermaßen zeigen: Wir schreiben die Differentialgleichung in der Form $y''(x) - 2xy' + \lambda y = 0$ und setzen für y eine Potenzreihe $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ an. Wie oben bei der Differentialgleichung (38) können wir annehmen, daß y eine gerade oder eine ungerade Funktion ist, daß also in der Potenzreihe nur gerade oder nur ungerade Potenzen von x vorkommen. Die Differentialgleichung liefert für die nicht verschwindenden Koeffizienten die Rekursionsformel $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)}$, woraus zunächst folgt, daß unsere Reihe entweder abbricht (wenn nämlich $\lambda = 2n$ eine gerade ganze nicht negative Zahl ist) und dann eben das Hermitesche Polynom H_n liefert oder daß sie für alle Werte von x konvergiert. Sobald $2n - \lambda$ positiv ist, haben alle auftretenden Koeffizienten a_n dasselbe Vorzeichen. Da nun im zweiten Falle Glieder $a_n x^n$ mit beliebig großem n auftreten, welche jede gegebene Potenz von x bei hinreichend großem x überwiegen, so kann y keine Eigenfunktion unseres Problems sein. Hiermit sind die Hermiteschen Polynome als die einzigen Lösungen des Eigenwertproblems nachgewiesen.

Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse bei den *Laguerreschen Polynomen* (Kap. II, § 10, 5). Hier ist das Grundgebiet die positive Halbachse $0 \leqq x < \infty$; die Differentialgleichung der Laguerreschen Polynome L_n lautet

$$(x e^{-x} y')' + \lambda e^{-x} y = 0, \tag{44}$$

die Differentialgleichung der zugehörigen Orthogonalfunktionen $L_n e^{-\frac{x}{2}}$ ist

$$x y'' + y' + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right) y + \lambda y = 0; \tag{45}$$

die Randbedingungen von (44) lauten: Regularität für $x = 0$ und Unendlichwerden nicht höher als eine Potenz von x für $x = \infty$. Die Eigenwerte sind $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$, die Eigenfunktionen die zugehörigen Laguerreschen Polynome. Daß es keine anderen Eigenwerte und Eigenfunktionen gibt, erkennt man genau nach dem obigen Muster.

2. Wärmeleitung und Eigenwertprobleme. Ganz ähnlich wie die Theorie der mechanischen Schwingungen führt die Wärmeleitungstheorie auf Eigenwertprobleme. Die Differentialgleichung der Wärmeleitung in homogenen isotropen Körpern lautet bei passender Wahl der Zeit- und Längeneinheit

$$\Delta u = u_t, \tag{46}$$

wobei u die Temperatur als Funktion des Ortes x, y, z und der Zeit t bedeutet. Die Ausstrahlung eines homogenen Körpers G mit der Oberfläche Γ, in welchem die obige Gleichung (46) gilt, in ein unendliches Medium konstanter Temperatur Null wird an der Oberfläche Γ durch eine Randbedingung der Form

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$$

charakterisiert, wobei σ eine Materialkonstante ist; d. h. das *Temperaturgefälle nach dem Innern des Körpers ist dem Temperatursprung nach außen proportional.*

Wir machen für u den Ansatz $u = v(x, y, z)\, g(t)$ und erhalten aus (46) sofort die Gleichung

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\dot{g}}{g} = -\lambda.$$

Es ergibt sich also für v das Eigenwertproblem $\Delta v + \lambda v = 0$ in G und $\frac{\partial v}{\partial n} + \sigma v = 0$ an der Oberfläche Γ; die zu einem Eigenwert λ und der Eigenfunktion v gehörige Lösung der Differentialgleichung hat die Form

$$u = a v e^{-\lambda t}.$$

Der Entwicklungssatz für die Eigenfunktionen gibt dann wie früher die Möglichkeit, die Lösung einem vorgegebenen Anfangszustand anzupassen, so daß $u(x, y, z, 0)$ gleich einer willkürlichen vorgegebenen mit ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung in G stetigen und der Randbedingung genügenden Funktion $\varphi(x, y, z)$ wird. Ist nämlich $v_1, v_2, \ldots$ bzw. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ das vollständige System der normierten Eigenfunktionen und Eigenwerte, so wird die gesuchte Lösung durch die Formel

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x, y, z)\, e^{-\lambda_n t}$$

gegeben, wobei $c_n = \iiint_G \varphi v_n \, dx\, dy\, dz$ ist.

3. Schwingungen dreidimensionaler Kontinua. Beim Wärmeleitungsproblem waren wir auf ein Eigenwertproblem im Dreidimensionalen gestoßen. Dasselbe tritt ein, wenn es sich um Schwingungsprobleme dreidimensionaler Kontinua handelt, wie sie in der Akustik, Elastizitätstheorie und Hydrodynamik betrachtet werden. Im einfachsten typischen Fall handelt es sich immer wieder um das Eigenwertproblem der Schwingungsgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ bei entsprechenden homogenen Randbedingungen.

Wir betrachten als Beispiel die *Schwingungsgleichung für das Gebiet einer Kugel* $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$ mit dem Radius 1. Führen wir Polarkoordinaten r, ϑ, φ ein, so geht die Schwingungsgleichung über in (vgl. Kap. IV, § 7, 2)

$$\Delta u + \lambda u = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\vartheta\, u_r) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}(u_\vartheta \sin\vartheta)\right] + \lambda u = 0,$$

und wir versuchen, ihr zu genügen, indem wir den Ansatz $u = Y(\varphi, \vartheta) f(r)$ machen, wo Y nur von φ und ϑ, f nur von r abhängt. Es ergibt sich sofort

$$\frac{(r^2 f')' + \lambda r^2 f}{f} = -\frac{r^2 \Delta Y}{Y} = -\frac{1}{Y \sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{Y_\varphi}{\sin\vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}(Y_\vartheta \sin\vartheta)\right] = k,$$

wobei k eine Konstante sein muß. Diese Konstante kann nicht willkürlich sein; sie muß so gewählt werden, daß die Differentialgleichung

$$\Delta^* Y + kY = \frac{1}{\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{Y_\varphi}{\sin\vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}(Y_\vartheta \sin\vartheta)\right] + kY = 0$$

eine auf der ganzen Kugelfläche stetige Lösung, d. h. eine in φ mit der Periode 2π periodische und für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ noch reguläre (und bei Annäherung an diese Punkte mit einem von φ unabhängigen Grenzwert versehene) Lösung besitzt. In Nr. 4 werden wir sehen, daß dieser Forderung nur für die Werte $k = n(n+1)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ genügt werden kann, und zwar durch die *Kugelfunktionen* $Y_n(\vartheta, \varphi)$. Für $f(r)$ ergibt sich die Differentialgleichung

$$(r^2 f')' - n(n+1) f + \lambda r^2 f = 0,$$

welche wir aus (37) als Differentialgleichung für die Funktion $\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}\, r)}{\sqrt{r}} = S_n(\sqrt{\lambda}\, r)$ kennen. Der Parameter λ ist nunmehr aus der Randbedingung zu bestimmen, z. B. bei der Randbedingung $u = 0$ durch die Gleichung $J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}) = 0$, und wir haben, wenn wir mit $\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \ldots$ die Wurzeln dieser Gleichung bezeichnen, Lösungen unseres Randwertproblems in der Form $u = Y_n(\vartheta, \varphi)\, S_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\, r)$. Daß wir so alle Eigenfunktionen und Eigenwerte unserer Differentialgleichung erhalten, werden wir später in Kap. VII beweisen, wo wir weitergehend zeigen werden, daß wir jede auf der Kugeloberfläche mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetige Funktion $g(\vartheta, \varphi)$ in eine absolut

und gleichmäßig konvergente Reihe der Form $g(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \varphi)$ entwickeln können.

Ein anderes Beispiel bietet die *Schwingungsgleichung für ein zylindrisches Gebiet*, das über dem Gebiete G der xy-Ebene errichtet ist und von den Ebenen $z = 0$, $z = \pi$ begrenzt werden möge. Als Randbedingung nehmen wir etwa $u = 0$. Wir können dieses Problem durch den Ansatz $u = f(z)\, v(x, y)$ sofort auf das entsprechende für das ebene Gebiet G zurückführen; wir erhalten nämlich

$$-\frac{f''}{f} = \frac{\Delta v}{v} + \lambda = k = \text{konst.},$$

$$f = \sin \sqrt{k}\, z$$

und aus der Randbedingung die Werte $k = 1^2, 2^2, 3^2, \ldots$; für v bleibt die Gleichung $\Delta v + (\lambda - n^2) v = 0$, deren Eigenwerte sich von denen des ebenen Gebietes nur durch den Summanden n^2 unterscheiden und deren Eigenfunktionen mit denen des ebenen Gebietes G identisch sind.

Daß wir so wieder alle Eigenfunktionen des Zylinders erhalten, folgt in der mehrfach durchgeführten Art aus der Tatsache, daß wir nach ihnen jede im Zylinder willkürlich vorgegebene, am Rande verschwindende und mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetige Funktion entwickeln können.

Nehmen wir speziell einen Zylinder, der über einem Rechteck errichtet ist, d. h. ein rechtwinkeliges Parallelepiped, z. B. den Würfel $0 \leqq x, y, z \leqq \pi$, so erhalten wir auf diese Weise als beinahe selbstverständliche Lösung des Eigenwertproblems die Eigenwerte $l^2 + m^2 + n^2$ $(l, m, n = 1, 2, 3, \ldots)$ und die Eigenfunktionen $\sin lx \sin my \sin nz$.

4. Eigenwertprobleme der Potentialtheorie. Kugelfunktionen. Wichtige Beispiele für Eigenwertprobleme liefert uns die *Potentialtheorie*, d. h. die Theorie der Differentialgleichung $\Delta u = 0$. Wir betrachten den Fall des räumlichen Potentials, wobei $u = u(x, y, z)$ eine Funktion der drei räumlichen Koordinaten ist, und fragen zunächst nach Potentialen $u(x, y, z)$, welche sich in eine Taylorsche Reihe der Form

$$u = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots$$

entwickeln lassen, wobei U_n eine ganze rationale homogene Funktion n^{ten} Grades der Variablen x, y, z ist. Die Forderung des identischen Verschwindens von Δu zieht die des Verschwindens aller einzelnen Ausdrücke ΔU_n nach sich. Nun ist ΔU_n ein homogener Ausdruck $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades in x, y, z, dessen Koeffizienten sich aus denen des Ausdruckes U_n linear und homogen zusammensetzen und sämtlich identisch verschwinden müssen. Da ΔU_n als homogener Ausdruck $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades $\frac{(n-1)n}{2}$ Koeffizienten besitzt, so haben wir für die $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Koeffizienten des Ausdruckes U_n gerade $\frac{(n-1)n}{2}$ Be-

dingungsgleichungen, so daß unter den Koeffizienten von U_n mindestens $\frac{(n+1)(n+2)-(n-1)n}{2} = 2n+1$ unabhängig bleiben. Jede solche ganze rationale homogene Funktion n^{ten} Grades U_n ist ein Potential, und wir werden später (Kap. VII, § 4, 2) in der Tat sehen, daß es genau $2n+1$ linear unabhängige solche Potentiale n^{ten} Grades gibt. Indem wir Polarkoordinaten r, ϑ, φ einführen, setzen wir U_n in die Gestalt

$$U_n = r^n Y_n(\vartheta, \varphi).$$

Die so definierten Funktionen $Y_n(\vartheta, \varphi)$ heißen die *Laplaceschen Kugelfunktionen* n^{ter} Ordnung. Sie können als Ortsfunktionen auf der Kugeloberfläche $r = 1$ aufgefaßt werden. *Diese Kugelfunktionen sind ebenfalls Lösungen eines Eigenwertproblems.* Indem wir nämlich die Gleichung $\Delta u = 0$ auf Polarkoordinaten transformieren und nach solchen Lösungen fragen, welche sich in der Form $f(r)\,Y(\vartheta, \varphi)$ darstellen lassen, erhalten wir ebenso wie auf Seite 263 sofort die Beziehung

$$\frac{(r^2 f')'}{f} = \frac{-1}{Y \sin\vartheta}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{\partial Y}{\partial \vartheta}\sin\vartheta\right)\right].$$

Es muß also der gemeinsame Wert beider Seiten gleich einer Konstanten λ sein, und es ergibt sich für Y die schon aus Nr. 3 bekannte Gleichung

$$\Delta^* Y + \lambda Y = 0. \tag{47}$$

Die Konstante λ muß so bestimmt werden, daß die Differentialgleichung *eine nicht identisch verschwindende und auf der ganzen Kugel reguläre Lösung* besitzt. Die Forderung der Regularität bedeutet dabei, daß auch für $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$, d. h. für die Pole der Kugel, die Lösung noch endlich und stetig bleibt (vgl. auch unten).

Für f ergibt sich die Differentialgleichung

$$(r^2 f')' - \lambda f = 0,$$

welche die allgemeine Lösung

$$f = c_1 r^{\alpha_1} + c_2 r^{\alpha_2}$$

besitzt, wobei α_1, α_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\alpha(\alpha+1) = \lambda$$

bedeuten.

Indem wir uns Rechenschaft davon geben, daß der Ausdruck Δu gegen Drehungen des Koordinatensystems invariant ist, erkennen wir, daß auch der Ausdruck $\Delta^* u$ auf der Kugel, d. h. der aus Δu für $r = 1$ hervorgehende Ausdruck, bei Einführung anders orientierter Polarkoordinaten, d. h. eines anderen Systems von Längen- und Breitenkreisen, invariant bleiben muß und daß die Besonderheit der Differential-

gleichung (47) für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ nur in der Unsymmetrie des Koordinatensystems begründet liegt. Auf Grund dieser Einsicht können wir unserer Regularitätsforderung den weitergehenden Sinn beilegen, daß bei Drehung des Koordinatensystems die Pole der Kugel ihre Ausnahmestellung für die Funktion Y verlieren, d. h. daß Y als Ortsfunktion auf der Kugel überall denselben Stetigkeitsbedingungen genügt.

Für die Eigenwerte $\lambda = n(n+1)$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ sind die oben definierten Laplaceschen Kugelfunktionen Eigenfunktionen des Problems. Daß es keine anderen Lösungen des Eigenwertproblems gibt, werden wir später Kap. VII, § 4, 2 erkennen.

Indem wir speziell nach solchen Kugelfunktionen fragen, welche nur von der geographischen Poldistanz ϑ, nicht aber von der geographischen Länge φ abhängen, indem wir also $\frac{\partial Y}{\partial \varphi} = 0$ setzen, gelangen wir zur Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(Y_\vartheta \sin\vartheta) + \lambda Y = 0,$$

welche durch die Transformation $x = \cos\vartheta$ in die Differentialgleichung (38) der Legendreschen Polynome übergeht. *Die Legendreschen Polynome* $P_n(\cos\vartheta)$ *sind also spezielle Kugelfunktionen.*

Zu einer *Verallgemeinerung der Kugelfunktionen* gelangen wir, wenn wir ein beliebiges Gebiet G auf der Kugeloberfläche betrachten und die Differentialgleichung

$$\Delta^* Y + \lambda Y = 0$$

durch eine in G reguläre Funktion $Y(\vartheta, \varphi)$ zu integrieren suchen, welche am Rande von G homogenen Randbedingungen genügt, z. B. verschwindet. Die zu diesem Gebiet gehörigen Eigenfunktionen $Y_1, Y_2, \ldots$ heißen allgemeine Kugelflächenfunktionen [1]). Aus den obigen Rechnungen folgt, daß die Funktion $r^\alpha Y(\vartheta, \varphi) = u(x, y, z)$ eine im Kegel mit der Grundfläche in G und der Spitze im Kugelmittelpunkt, höchstens abgesehen vom Nullpunkt, stetige, der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügende Funktion ist, wenn zwischen α und λ die Gleichung

$$\alpha(\alpha+1) = \lambda$$

besteht.

Die Differentialgleichung $\Delta^* Y + \lambda Y = 0$ für die Kugelfunktionen ist ein spezieller Fall der allgemeinen Differentialgleichung

$$(48)\quad \Delta^* Y + \lambda Y = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{e\frac{\partial Y}{\partial y} - f\frac{\partial Y}{\partial x}}{\sqrt{eg-f^2}} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{g\frac{\partial Y}{\partial x} - f\frac{\partial Y}{\partial y}}{\sqrt{eg-f^2}}\right) + \lambda Y = 0,$$

welche zu einer beliebigen krummen Fläche mit dem Linienelement

[1]) Vgl. *Thomson, W.* und *Tait, P. G.:* Treatise on Natural Philosophy, Bd. 1, S. 171—218. Cambridge 1886.

$ds^2 = e\,dx^2 + 2f\,dx\,dy + g\,dy^2$ gehört und deren invarianter Charakter im Kap. IV betont worden ist. Wir können diese Differentialgleichung auffassen als die Schwingungsgleichung einer *„krummen Membran"*, welche auf unserer Fläche liegt. Für die Kugelfläche geht sie bei Einführung von Polarkoordinaten in die Gleichung (47) über.

Wir merken noch die Form an, welche diese Gleichung der Kugelfunktionen annimmt, wenn man statt ϑ, φ durch stereographische Projektion auf die Ebene $z = 0$ die Koordinaten $x = \frac{\sin\vartheta\cos\varphi}{1+\cos\vartheta}$, $y = \frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{1+\cos\vartheta}$ als Bestimmungsstücke des Kugelpunktes einführt. Durch direkte Rechnung oder bequemer durch Beachtung des invarianten Charakters der linken Seite von (48) erhält man leicht

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{4\lambda}{(1+x^2+y^2)^2}\,Y = 0 \qquad (\lambda = n(n+1))$$

als Differentialgleichung der Kugelfunktionen in stereographischer Projektion.

5. Randwertaufgabe der Potentialtheorie und Eigenwertprobleme. Lamésches Problem. Das Grundproblem der Potentialtheorie, welches uns in voller Allgemeinheit später beschäftigen wird, besteht in der Bestimmung einer Funktion $u(x, y, z)$, welche in einem gegebenen Gebiete G mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetig ist, der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt und am Rande des Gebietes vorgegebene Randwerte annimmt. In speziellen Fällen führt dieses Randwertproblem auf Eigenwertprobleme. Setzen wir der Kürze halber ein für allemal voraus, daß die Randwerte mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetige Ortsfunktionen auf dem Rande seien, so ist z. B. das Randwertproblem für die Kugel durch eine Funktion der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n Y_n$ gelöst, sobald wir wissen, daß die Oberflächenfunktion sich in eine Reihe der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n Y_n$ entwickeln läßt. Da auch die Funktionen $r^{-(n+1)} Y_n$ der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügen, wovon man sich leicht aus den früheren Formeln überzeugt, so kann man durch geeignete Wahl der Konstanten a_n, b_n auch das Randwertproblem für eine Kugelschale durch eine Funktion der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-(n+1)})\, Y_n$$

lösen.

Ein weiteres lehrreiches Beispiel bietet ein Zylinder, der über dem Gebiet G der xy-Ebene errichtet und von den Ebenen $z = 0$, $z = \pi$ begrenzt ist. Wir denken uns der Kürze halber auf dem Mantel die Randwerte identisch Null gegeben, auf den ebenen Stirnflächen beliebig. Nun machen wir für die Lösung von $\Delta u = 0$ den

Ansatz $u = f(z)\,v(x,y)$ und erhalten sofort analog zu früher für f und v die Differentialgleichungen $\frac{f''}{f} = -\frac{\Delta v}{v} = \lambda$, in welchen λ so bestimmt werden muß, daß dazu eine Eigenfunktion $v(x,y)$ existiert. Ist $v_1, v_2, \ldots$ das volle System der Eigenfunktionen mit den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, so lehrt der Entwicklungssatz, daß wir durch eine Reihe der Form $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n e^{\sqrt{\lambda_n}z} + b_n e^{-\sqrt{\lambda_n}z})v_n(x,y)$ für $z=0$ und $z=\pi$ beliebige nach Maßgabe der oben gemachten Einschränkungen vorgegebene Funktionen darstellen können. Wir haben also in dieser Reihe die Lösung unseres Randwertproblems, falls diese Reihe gleichmäßig konvergiert und dasselbe auch noch gilt, nachdem wir sie ein oder mehrere Male nach beliebigen der Variablen x, y, z differenziert haben; jedes einzelne Glied genügt der Potentialgleichung.

Der im wesentlichen allgemeinste Fall, in welchem man die Randwertaufgabe der Potentialtheorie durch einen Zerspaltungsprozeß auf das Problem der Auffindung von Funktionen einer einzigen Variablen zurückführen kann, die ihrerseits durch ein Eigenwertproblem charakterisiert werden, ist der eines *konfokalen Rechtflaches*. Wir verstehen darunter ein Gebiet, welches begrenzt wird von je zwei Stücken zweier Ellipsoide, zweier einschaliger und zweier zweischaliger Hyperboloide, die sämtlich ein und derselben konfokalen Schar

$$\frac{x^2}{s-e_1} + \frac{y^2}{s-e_2} + \frac{z^2}{s-e_3} = 1$$

angehören (vgl. Kap. IV, § 7, 3). *Fast alle sonst explizit zu behandelnden Fälle der Randwertaufgabe lassen sich als Spezialfälle oder Grenzfälle dieses „Laméschen" Problems auffassen.* Führen wir in den Bezeichnungen von Kap. IV elliptische Koordinaten $\varrho = f(u)$, $\sigma = g(v)$, $\tau = h(w)$ ein, so geht die Potentialgleichung $\Delta T = 0$ über in

$$\Delta T = \frac{[g(v)-h(w)]\,T_{uu} + [f(u)-h(w)]\,T_{vv} + [f(u)-g(v)]\,T_{ww}}{[g(v)-h(w)][f(u)-h(w)][f(u)-g(v)]} = 0.$$

Wir versuchen nun, dieser Gleichung zu genügen, indem wir den Ansatz

$$T = U(u)\,V(v)\,W(w)$$

machen; wir können dann der Differentialgleichung $\Delta T = 0$ genügen, wenn wir mit zwei beliebigen Konstanten λ, μ die drei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$U'' + [\lambda f(u) + \mu]\,U = 0, \tag{49}$$

$$V'' - [\lambda g(v) + \mu]\,V = 0, \tag{50}$$

$$W'' + [\lambda h(w) + \mu]\,W = 0 \tag{51}$$

befriedigen. Dabei liegen die Variablen u, v, w in verschiedenen Intervallen, welche durch die Bedingungen

$$\varrho_2 \leqq f(u) \leqq \varrho_1, \quad \sigma_2 \leqq g(v) \leqq \sigma_1, \quad \tau_2 \leqq h(w) \leqq \tau_1$$

festgelegt sind, denen Bedingungen

$$u_2 \leqq u \leqq u_1, \quad v_2 \leqq v \leqq v_1, \quad w_2 \leqq w \leqq w_1$$

entsprechen. Unser Rechtflach ist dabei gegeben durch Bedingungen der Form $\varrho_2 \leqq \varrho \leqq \varrho_1 \leqq \sigma_2 \leqq \sigma \leqq \sigma_1 \leqq \tau_2 \leqq \tau \leqq \tau_1$.

Wenn wir statt u, v, w die Koordinaten ϱ, σ, τ benutzen und ohne Unterscheidung die unabhängige Variable mit s, die abhängige mit Y bezeichnen, so können wir die Gleichungen (49), (50), (51) in der gemeinsamen Form schreiben

$$\varphi(s)\frac{d^2Y}{ds^2} + \frac{\varphi'(s)}{2}\frac{dY}{ds} + (\lambda s + \mu)Y = 0,$$

wobei

$$4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3) = \varphi(s)$$

gesetzt ist. Die Lösungen dieser Gleichung, der sogenannten *Lamé-schen Gleichung*, sind Funktionen, welche von der Wahl der Konstanten λ, μ abhängen und sich im allgemeinen nicht auf die elementaren transzendenten Funktionen zurückführen lassen. Sie führen den Namen *Lamésche Funktionen* und sind Gegenstand vieler Untersuchungen geworden, wenngleich man bisher noch verhältnismäßig wenig Mittel zu ihrer numerischen Beherrschung entwickelt hat. Wir begnügen uns hier mit der Aufstellung des zugehörigen Eigenwertproblems. Offenbar kann man die Randwertaufgabe der Potentialtheorie für ein konfokales Rechtflach lösen, wenn man sie für den speziellen Fall beherrscht, daß die vorgegebenen Randwerte auf fünf von den sechs Seitenflächen Null sind. Die Lösung des allgemeinen Randwertproblems stellt sich dann als Summe von sechs solchen speziellen Lösungen dar. Es möge nun z. B. $\tau = \tau_2$ diejenige Seitenfläche sein, für welche nicht der Randwert Null vorgeschrieben ist. Dann sehen wir uns veranlaßt, nach solchen Lösungen U, V, W der Lamé-schen Gleichungen (49), (50), (51) zu fragen, für welche die Bedingungen $U(u_1) = U(u_2) = V(v_1) = V(v_2) = W(w_1) = 0$ bestehen, während für $W(w_2)$ keine Bedingung gestellt wird. Das Produkt

$$T = U(u)V(v)W(w)$$

wird dann eine Lösung von $\Delta T = 0$ sein, die für $\varrho = \varrho_2$, $\varrho = \varrho_1$, $\sigma = \sigma_2$, $\sigma = \sigma_1$, $\tau = \tau_1$ verschwindet. Nun kann, wie sich herausstellen wird, den angegebenen Bedingungen nicht bei beliebiger Wahl der Konstanten λ, μ genügt werden. Wir stellen vielmehr das Problem, diese Konstanten

so zu wählen, daß den Forderungen durch geeignete Lamésche Funktionen genügt werden kann. Damit haben wir ein neuartiges Eigenwertproblem, ein sogenanntes *zweiparametriges Eigenwertproblem* vor uns, bei dem es sich um die Bestimmung von Paaren zusammengehöriger Eigenwerte λ, μ handelt, für welche die Differentialgleichung (49) eine für $u = u_1$ und $u = u_2$ sowie die Differentialgleichung (50) eine für $v = v_1$ und für $v = v_2$ verschwindende Lösung besitzt. (Daß es eine für $w = w_1$ verschwindende Lösung von (51) gibt, ist nach den allgemeinen Existenzsätzen der Differentialgleichungstheorie selbstverständlich.)

Auch bei diesem Eigenwertproblem bestehen ähnliche Verhältnisse wie beim gewöhnlichen einparametrigen Problem, nämlich die folgenden: *Es gibt unendlich viele Paare von Eigenwerten λ_i, μ_i und zugehörige Lösungen U_i, V_i des Eigenwertproblems. Jede in dem Rechteck $u_2 \leqq u \leqq u_1$, $v_2 \leqq v \leqq v_1$ mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetige, am Rande des Rechtecks verschwindende Funktion von u, v ist in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe der Form*

$$\sum_{i=1}^{\infty}{}' c_i U_i(u) V_i(v)$$

entwickelbar, wobei rechts über alle zu Eigenwertpaaren gehörigen Laméschen Produkte $U_i(u) V_i(v)$ zu summieren ist. Diese Laméschen Produkte erfüllen im übrigen die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{u_2}^{u_1}\int_{v_2}^{v_1} [f(u) - g(v)]\, U_i(u) V_i(v) U_k(u) V_k(v)\, du\, dv = 0,$$

sobald sie zu verschiedenen Eigenwertpaaren gehören. Das Lamésche Produkt $U_i(u) V_i(v) W_i(w) = T$ genügt der Potentialgleichung $\Delta T = 0$, und eine Summe der Form $\sum c_i U_i(u) V_i(v) W_i(w)$ liefert die gewünschte Lösung der Randwertaufgabe der Potentialtheorie für unser Rechtflach. Hierbei müssen wir allerdings beachten, daß den vorgegebenen Oberflächenwerten von T in Anbetracht der obigen Formulierung des Entwicklungssatzes noch die Beschränkung auferlegt werden muß, auf allen Kanten des Rechtflaches zu verschwinden. In der Tat aber ist diese Beschränkung nicht nötig, worauf wir jedoch hier nicht eingehen wollen.

An dieser Stelle begnügen wir uns damit, zu zeigen, daß unser zweiparametriges Eigenwertproblem sich in naturgemäßer Weise auf ein einparametriges der uns geläufigen Gestalt zurückführen läßt, allerdings auf das einer partiellen Differentialgleichung. Bilden wir nämlich die Funktion $Z(u, v) = U(u) V(v)$, wobei $U(u)$ der Differentialgleichung (49) und $V(v)$ der Differentialgleichung (50) genügt, so erhalten wir aus diesen beiden Gleichungen, wenn wir die erste mit V,

die zweite mit U multiplizieren und dann addieren, die partielle Differentialgleichung

$$Z_{uu} + Z_{vv} + \lambda [f(u) - g(v)] Z = 0 \tag{52}$$

für die Funktion $Z(u,v)$. Der Eigenwert $\lambda = \lambda_i$ und die zugehörige Eigenfunktion $Z_i = U_i(u) V_i(v)$ lösen das Eigenwertproblem dieser Differentialgleichung für das Rechteck G: $u_2 \leqq u \leqq u_1, v_2 \leqq v \leqq v_1$ bei der Randbedingung $Z = 0$. (Wir hätten übrigens diese Differentialgleichung auch aus $\Delta T = 0$ durch den Ansatz $T = Z(u,v) W(w)$ erhalten können.) Die Differentialgleichung (52) hat die Form $\Delta Z + \lambda \varrho Z$, wobei die Funktion $\varrho = f(u) - g(v)$ im ganzen Rechteck G positiv ist; wir haben daher hier ein Eigenwertproblem mit dem einen Parameter λ ganz im früheren Sinne vor uns, für welches die Fragen der Existenz der Eigenfunktionen und des Entwicklungssatzes sich vollkommen in das uns geläufige Schema einordnen. Indem wir die Beantwortung dieser Fragen vorwegnehmen[1]), können wir also die Existenz unendlich vieler Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ und zugehöriger am Rande verschwindender Eigenfunktionen $Z_1, Z_2, \ldots$ für das Rechteck G behaupten, nach welchen man willkürliche Funktionen im oben gekennzeichneten Rahmen entwickeln kann. Alles, was zu zeigen bleibt, ist, daß wirklich sämtliche Eigenfunktionen Z_i Lamésche Produkte $U(u) V(v)$ oder höchstens Summen endlich vieler zum selben Eigenwert λ gehöriger Lamé'scher Produkte sind.

Zu diesem Zwecke bezeichnen wir das vollständige System der Eigenwerte und Eigenfunktionen von (52) mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ bzw. $Z_1, Z_2, \ldots$. Ist λ_h ein Eigenwert, so betrachten wir nunmehr das Eigenwertproblem der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 X}{du^2} + [\lambda_h f(u) + \mu] X = 0 \tag{53}$$

und bezeichnen die zugehörigen unendlich vielen Eigenwerte und normierten Eigenfunktionen mit $\mu_1, \mu_2, \ldots$ bzw. $X_1, X_2, \ldots$ Nach diesen können wir eine für $u = u_1$ und $u = u_2$ verschwindende, im Intervalle $u_2 \leqq u \leqq u_1$ mit den Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetige, sonst willkürliche Funktion entwickeln. Insbesondere gilt diese Entwickelbarkeit für die noch von v als Parameter abhängende Funktion $Z(u,v)$; wir schreiben die Entwicklung in der Form

$$Z(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(v) X_n(u), \tag{54}$$

wobei

$$Y_n(v) = \int_{u_2}^{u_1} Z(u, v) X_n(u) \, du$$

[1]) Siehe §§ 10 und 11.

gesetzt ist. Differenzieren wir Y_n zweimal nach v und formen wir durch partielle Integration um, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{d^2 Y_n}{dv^2} &= \int_{u_2}^{u_1} Z_{vv}(u, v)\, X_n(u)\, du \\ &= \int_{u_2}^{u_1} (-Z_{uu} - \lambda_h [f(u) - g(v)] Z) X_n\, du \\ &= \int_{u_2}^{u_1} Z \left(-\frac{d^2 X_n}{du^2} - \lambda_h [f(u) - g(v)] X_n\right) du \\ &= (\mu_n + \lambda_h g(v)) Y_n,\end{aligned}$$

d. h. die Funktion Y_n ist Eigenfunktion der Differentialgleichung (50) für das Gebiet $v_2 \leqq v \leqq v_1$ und die gegebene Randbedingung; mit anderen Worten das Wertepaar λ_h, μ_n mit den zugehörigen Funktionen $X_n(u)$, $Y_n(v)$ ist eine Lösung unseres zweiparametrigen Eigenwertproblems — sofern nicht die betreffende Funktion $Y_n(v)$ identisch verschwindet. Nun ist aber den Ausgangsbetrachtungen zufolge das Produkt $X_n Y_n$ eine zum Eigenwert λ_h gehörige Eigenfunktion von (52), und jeder Eigenwert dieser Differentialgleichung kann zufolge der allgemeinen (erst im nächsten Paragraphen zu begründenden) Theorie nur eine endliche Vielfachheit haben. Somit können unter den Funktionen $X_n Y_n$ der beiden Variabeln u und v nur eine endliche Anzahl k linear unabhängiger vorkommen. Außerdem dürfen wir annehmen, daß keine der Funktionen X_n und Y_n identisch verschwindet; denn sonst können wir das betreffende Glied einfach weglassen. Zwischen je $k+1$ von den Produkten $X_n Y_n$ besteht dann eine lineare Beziehung

$$\sum_{\nu=1}^{k+1} c_\nu X_{n_\nu} Y_{n_\nu} = 0.$$

Erteilen wir hierin den Variabeln u bzw. v einen Wert, für den alle X_{n_ν} bzw. Y_{n_ν} von Null verschieden sind, so erhalten wir eine lineare Gleichung zwischen den Y_{n_ν} bzw. X_{n_ν}. Da aber zu verschiedenen Eigenwerten μ gehörige Eigenfunktionen linear unabhängig sind, können in der Darstellung $Z = \sum X_n Y_n$ überhaupt nur endlich viele Glieder auftreten, wie wir zeigen wollten.

Nun können wir eine mit den oben genannten Beschränkungen willkürliche Funktion nach den Produkten Z entwickeln und erhalten damit das Ergebnis: Jede im Rechteck $u_2 \leqq u \leqq u_1$, $v_2 \leqq v \leqq v_1$ mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetige, am Rande verschwindende Funktion läßt sich in eine Reihe Lamé scher Produkte entwickeln.

§ 10. Die Greensche Funktion und die Lösung der Eigenwertprobleme mit Hilfe der Integralgleichungstheorie.

Zur Lösung der Eigenwertprobleme, die wir im vorangehenden Paragraphen diskutiert haben, fehlt uns noch der wichtigste Schritt, nämlich der Nachweis, daß diese Lösungen wirklich existieren und daß die fraglichen Reihenentwicklungen nach den Eigenfunktionen tatsächlich „willkürlich" vorgegebene Funktionen darzustellen imstande sind. Wir werden in diesem Paragraphen diese Lücke ausfüllen, indem wir unsere Eigenwertprobleme auf Eigenwertprobleme von Integralgleichungen mit symmetrischem Kern zurückführen[1]) und auf diese dann die allgemeine Theorie der linearen Integralgleichungen aus Kap. III anwenden. Die Zurückführung auf Integralgleichungen ergibt sich sogleich aus einer sowohl mathematisch als auch physikalisch naheliegenden Überlegung, welche auf die sogenannte *Greensche Funktion* oder *Einflußfunktion* führt.

1. Die Greensche Funktion für gewöhnliche Differentialgleichungen. Wir betrachten zunächst einen linearen homogenen sich selbst adjungierten Differentialausdruck zweiter Ordnung

$$L[y] = py'' + p'y' - qy$$

für die Funktion $y(x)$ im Grundgebiete G: $x_0 \leqq x \leqq x_1$, worin p, p' und q stetige Funktionen von x sind und $p > 0$ ist; die zugehörige unhomogene Differentialgleichung lautet

$$L[y] = -\varphi(x), \tag{55}$$

wobei $\varphi(x)$ eine in G stückweise stetige Funktion bedeutet. Wenn es sich um das Problem handelt, eine Lösung $y = f(x)$ der Gleichung (55) zu finden, welche am Rande von G gegebenen homogenen Randbedingungen genügt, z. B. der Randbedingung $f = 0$, so liegt folgender Gedanke nahe: Wir deuten die Differentialgleichung (55) gemäß den früheren Überlegungen durch die Einstellung einer Saite unter dem Einfluß einer über die Saite verteilten zeitlich konstanten Kraft, deren Dichte durch die Funktion $\varphi(x)$ gegeben ist. Machen wir nun einen Grenzübergang von der kontinuierlich verteilten Kraft $\varphi(x)$ zu einer „Einzelkraft", d. h. einer nur in einem einzigen Punkte $x = \xi$ mit der Intensität 1 oder auch einer anderen Intensität angreifenden Kraft, und ist $K(x, \xi)$ die Elongation der Saite unter dem Einfluß dieser Einzelkraft, wobei stets die der Saite auferlegten Randbedingungen gewahrt bleiben sollen, so wird man die Wirkung der kontinuierlich verteilten Kraft $\varphi(x)$ als Superposition der Wirkungen kontinuierlich verteilter Einzelkräfte

[1]) In Kap. VI werden wir noch einen zweiten Weg zur Lösung der Eigenwertprobleme kennen lernen.

auffassen können, deren Dichte an der Stelle ξ gleich $\varphi(\xi)$ ist; man kann also erwarten, daß die gesuchte Lösung in der Form

$$f(x) = \int_{x_0}^{x_1} \mathsf{K}(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \tag{56}$$

erscheint. Die Funktion $\mathsf{K}(x, \xi)$, welche wir als *Einflußfunktion* oder als *Greensche Funktion* des Differentialausdruckes $L[y]$ bezeichnen, muß ihrer Definition nach den vorgegebenen Randbedingungen für $x = x_0$ und $x = x_1$ genügen, für jeden Wert des Parameters ξ; daraus folgt unmittelbar, daß die in der Gleichung (56) durch den Kern $\mathsf{K}(x, \xi)$ mit der Quellendichte $\varphi(x)$ quellenmäßig dargestellte Funktion $f(x)$ ebenfalls diesen Randbedingungen genügt.

Die Einflußfunktion $\mathsf{K}(x, \xi)$ muß überall außer an der Stelle $x = \xi$ der Differentialgleichung

$$L[\mathsf{K}] = 0$$

genügen, da sie ja der Kraft Null für $x \neq \xi$ entspricht. An der Stelle $x = \xi$ muß die Funktion $\mathsf{K}(x, \xi)$ eine Singularität aufweisen, auf welche wir durch folgende Plausibilitätsbetrachtung geführt werden: Wir denken uns die Einzelkraft entstanden durch Grenzübergang aus einer Kraft $\varphi_\varepsilon(x)$, die für $|x - \xi| > \varepsilon$ in G Null ist und deren Gesamtintensität durch die Gleichung

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x)\, dx = 1$$

gegeben wird. Die zugehörige Elongation der Saite werde mit $\mathsf{K}_\varepsilon(x, \xi)$ bezeichnet; sie genügt also der Gleichung $L[\mathsf{K}_\varepsilon] = -\varphi_\varepsilon(x)$. Wir integrieren diese Gleichung zwischen den Grenzen $\xi - \varepsilon$ und $\xi + \varepsilon$ und erhalten

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \left(p \frac{d^2 \mathsf{K}_\varepsilon}{dx^2} + p' \frac{d \mathsf{K}_\varepsilon}{dx} - q \mathsf{K}_\varepsilon \right) dx = -1 .$$

Machen wir nun den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ und berücksichtigen dabei, daß die Funktion $\mathsf{K}(x, \xi)$ stetig bleiben soll, so ergibt sich für $\mathsf{K}(x, \xi)$ sofort die Beziehung

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d \mathsf{K}(x, \xi)}{dx} \Bigg|_{x=\xi-\varepsilon}^{x=\xi+\varepsilon} = -\frac{1}{p(\xi)},$$

welche die charakteristische Singularität der Greenschen Funktion ausdrückt.

Diese heuristische Überlegung kehren wir nunmehr um und machen sie so zu einer strengen mathematischen Theorie. Wir definieren von vornherein als *Greensche Funktion* $\mathsf{K}(x, \xi)$ des Differentialausdruckes $L[y]$ bei gegebenen homogenen Randbedingungen eine Funktion von x und ξ, welche folgende Bedingungen befriedigt:

1. $K(x, \xi)$ ist bei festem ξ eine stetige Funktion von x und erfüllt die vorgegebenen homogenen Randbedingungen.

2. Die Ableitungen erster und zweiter Ordnung von K nach x sind, abgesehen von der Stelle $x = \xi$, überall in G stetig; an der Stelle $x = \xi$ macht die erste Ableitung einen Sprung, der durch

$$\frac{dK(x,\xi)}{dx}\Big|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0} = -\frac{1}{p(\xi)} \tag{57}$$

gegeben wird.

3. Außer an der Stelle $x = \xi$ genügt K als Funktion von x überall in G der Differentialgleichung $L[K] = 0$.

Für eine stetige Funktion, welche nur die Bedingungen 2, 3, aber nicht notwendig die homogenen Randbedingungen erfüllt, führen wir die Bezeichnung *„Grundlösung"* der Differentialgleichung (55) ein. Die Frage der Existenz der Greenschen Funktion werden wir später in Nr. 3 erörtern; jetzt stellen wir uns auf den Standpunkt, daß wir im Besitze dieser Funktion seien, und behaupten: *Die Greensche Funktion eines sich selbst adjungierten Differentialausdruckes ist symmetrisch in Parameter und Argument,* d. h. es gilt

$$K(x, \xi) = K(\xi, x).$$

Der Beweis folgt fast unmittelbar aus der Greenschen Formel Kap. IV, (81), wenn wir dort $z = K(x, \eta)$, $y = K(x, \xi)$ einsetzen und das Integrationsgebiet aus den drei getrennt zu behandelnden Stücken $x_0 \leqq x \leqq \xi$, $\xi \leqq x \leqq \eta$, $\eta \leqq x \leqq x_1$ zusammensetzen; die Berücksichtigung der Sprungrelation (57) an den Stellen $x = \xi$ und $x = \eta$ und den Randbedingungen ergibt dann die Behauptung. *Die Symmetrie der Greenschen Funktion ist in vielen Fällen der prägnante Ausdruck einer in der Physik häufig vorkommenden Reziprozität: Wenn die Kraft* 1, *an der Stelle* ξ *angebracht, die Wirkung* $K(x, \xi)$ *an der Stelle* x *hervorbringt, so bringt die Kraft* 1 *an der Stelle* x *angreifend, in* ξ *dieselbe Wirkung hervor.*

Die Anwendungen der Greenschen Funktion beruhen auf den folgenden Zusammenhängen. Wenn $\varphi(x)$ eine stetige oder stückweise stetige Funktion von x ist, so genügt die Funktion

$$f(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \tag{58}$$

der Differentialgleichung

$$L[f] = -\varphi(x) \tag{59}$$

und den Randbedingungen. Genügt umgekehrt die Funktion $f(x)$ der Differentialgleichung (59) und den Randbedingungen, so wird sie durch (58) dargestellt. Zum Beweise der ersten Behauptung brauchen wir nur die elementaren Regeln über Differentiation eines Integrals

nach einem Parameter anzuwenden. Danach erhalten wir unter Berücksichtigung von (57) der Reihe nach die folgenden Gleichungen

$$f'(x) = \int_{x_0}^{x_1} \mathsf{K}'(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi;$$

$$f''(x) = \int_{x_0}^{x} \mathsf{K}''(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi + \int_{x}^{x_1} \mathsf{K}''(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$
$$- \mathsf{K}'(x-0,x)\,\varphi(x) + \mathsf{K}'(x+0,x)\,\varphi(x);$$
$$= \int_{x_0}^{x_1} \mathsf{K}''(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi - \frac{\varphi(x)}{p(x)};$$

also

$$pf'' + p'f' - qf = \int_{x_0}^{x_1} (p\mathsf{K}'' + p'\mathsf{K}' - q\mathsf{K})\,\varphi(\xi)\,d\xi - \varphi(x),$$

womit wegen $L[\mathsf{K}] = 0$ der gewünschte Nachweis erbracht ist.

Zum Nachweis der Umkehrung benutzen wir wieder die Greensche Formel Kap. IV, (81), setzen darin $z = \mathsf{K}$, $y = f$ und wenden sie auf die beiden Integrationsgebiete $x_0 \leqq x \leqq \xi$ und $\xi \leqq x \leqq x_1$ an. Aus der Sprungrelation und den Randbedingungen folgt dann unmittelbar die Formel (58) mit Vertauschung von x und ξ.

Die Frage nach der Existenz und Konstruktion der Greenschen Funktion werden wir sogleich aufnehmen. Zunächst wenden wir die gewonnenen Einsichten an, um durch *Übergang zu einer Integralgleichung* mit dem Kern $K(x,\xi) = \mathsf{K}(x,\xi)$ bzw. $K(x,\xi) = \sqrt{\varrho(x)\,\varrho(\xi)}\,\mathsf{K}(x,\xi)$ die zugehörigen Eigenwertprobleme ihrer Lösung zuzuführen.

2. Zusammenhang mit der Integralgleichungstheorie. Wir betrachten nunmehr die Differentialgleichung

$$L[y] + \lambda\varrho y = \psi(x), \qquad (\varrho(x) > 0) \tag{60}$$

wo $\psi(x)$ eine gegebene stückweise stetige Funktion, λ ein Parameter ist. Mit Hilfe der Greenschen Funktion erhalten wir aus der Formel (58) für $\varphi(x) = \lambda\varrho y - \psi$ nun sofort die mit (60) vollständig äquivalente Gleichung

$$y(x) = \lambda \int_{x_0}^{x_1} \mathsf{K}(x,\xi)\,\varrho(\xi)\,y(\xi)\,d\xi + g(x), \tag{61}$$

wobei

$$g(x) = -\int_{x_0}^{x_1} \mathsf{K}(x,\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi \tag{62}$$

eine gegebene stückweise stetige Funktion von x ist. Die Bestimmung einer Lösung von (60) bei den vorgegebenen Randbedingungen ist also

äquivalent mit der Auflösung der Integralgleichung (61). Der homogenen Gleichung

$$L[y] + \lambda \varrho y = 0$$

entspricht wegen $g = 0$ die homogene Integralgleichung

$$y(x) = \lambda \int_{x_0}^{x_1} \mathsf{K}(x, \xi)\, \varrho(\xi)\, y(\xi)\, d\xi$$

oder, wenn wir

$$y(x) \sqrt{\varrho(x)} = z(x)$$

als neue unbekannte Funktion einführen, die Integralgleichung mit $\sqrt{\varrho(x)}$ multiplizieren und $K(x, \xi) = \mathsf{K}(x, \xi) \sqrt{\varrho(x)\, \varrho(\xi)}$ setzen,

$$z(x) = \lambda \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi)\, z(\xi)\, d\xi . \tag{63}$$

Der Kern $K(x, \xi)$ unserer Integralgleichung (63) ist symmetrisch, da $L[y]$ sich selbst adjungiert ist[1]; wir können alle entsprechenden Sätze aus Kap. III anwenden und erhalten aus ihnen sofort die folgenden Resultate für die Differentialgleichung (60):

Es gibt zu dem Eigenwertproblem der Differentialgleichung (60) *eine Reihe von Eigenwerten* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *und zugehörigen Eigenfunktionen* $y_1, y_2, \ldots$ *Für jeden Wert* λ, *der kein Eigenwert ist, besitzt die unhomogene Gleichung* (60) *bei den vorgegebenen Randbedingungen eine und nur eine Lösung, wie auch immer die rechte Seite* $\psi(x)$ *gewählt werden mag. Ist dagegen* $\lambda = \lambda_i$ *ein Eigenwert, so besitzt die unhomogene Gleichung* (60) *dann und nur dann eine den Randbedingungen genügende Lösung* $y(x)$, *wenn die Bedingung* $\int_{x_0}^{x_1} \varrho(x)\, y_i(x)\, g(x)\, dx = 0$, *oder, was wegen* (62) *und* (62′) *unter Beachtung von* $\mathsf{K}(x, \xi) = \mathsf{K}(\xi, x)$ *auf dasselbe hinauskommt,* $\int_{x_0}^{x_1} y_i(x)\, \psi(x)\, dx = 0$ *besteht, wenn also* $\psi(x)$ *auf der zu* λ_i *gehörigen Eigenfunktion orthogonal ist. Endlich: Jede mit Hilfe der Greenschen Funktion* $\mathsf{K}(x, \xi)$ *durch eine stückweise stetige Funktion* $h(\xi)$ *quellenmäßig in der Form* $w(x) = \int_{x_1}^{x_0} \mathsf{K}(x, \xi)\, h(\xi)\, d\xi$ *darstellbare Funktion* $w(x)$ *läßt sich in eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe*

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \qquad c_n = \int_{x_0}^{x_1} w \varrho y_n\, dx$$

nach den Eigenfunktionen entwickeln.

[1]) Auf dieser Folgerung und ihren weiteren Konsequenzen beruht die Bedeutung der über $L[y]$ gemachten Voraussetzung.

Wir können die Gesamtheit der nach diesem Satze entwickelbaren Funktionen noch anders und einfacher charakterisieren. Infolge der Grundeigenschaft der Greenschen Funktion folgt nämlich aus (58) die Gleichung $L[w] = -h(x)$; umgekehrt, wenn wir irgend eine den Randbedingungen genügende und mit stetiger erster sowie stückweise stetiger zweiter Ableitung versehene Funktion $w(x)$ betrachten, können wir durch die Gleichung $L[w] = -h(x)$ zu ihr eine Quellenverteilung $h(x)$ hinzukonstruieren. Wir erhalten also das Resultat: *Jede den Randbedingungen genügende mit stetiger erster und stückweise stetiger zweiter Ableitung versehene Funktion $w(x)$ läßt sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe $w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$ entwickeln.*

Aus diesem Satze folgt unmittelbar nicht nur, *daß die Anzahl der Eigenwerte und Eigenfunktionen unendlich ist, sondern sogar noch, daß die Eigenfunktionen ein vollständiges orthogonales Funktionensystem bilden.* Denn jede in G stetige Funktion läßt sich im Mittel beliebig genau durch eine stetige den Randbedingungen genügende Funktion mit stetiger erster und zweiter Ableitung approximieren, also dem eben genannten Entwicklungssatz zufolge auch durch ein endliches Aggregat der Form $\sum_{n=1}^{m} c_n y_n(x)$.

Zu einer *Verschärfung des Entwicklungssatzes* führt uns die schon früher gemachte Bemerkung, daß alle Eigenwerte positiv sind[1]), daß also in der Sprache der Integralgleichungstheorie der Kern $K(x, \xi)$ definit ist. Da außerdem $K(x, \xi)$ eine stetige Funktion von x und ξ ist, so können wir den Mercerschen Satz aus Kap. III, § 5, 4 anwenden und schließen, daß die Reihenentwicklung des Kernes

$$(64) \qquad K(x, \xi) = \sqrt{\varrho(x)\varrho(\xi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x) y_n(\xi)}{\lambda_n} \quad \text{bzw.} \quad \mathsf{K}(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x) y_n(\xi)}{\lambda_n}$$

gleichmäßig und absolut konvergiert. Diese Formel, welche Greensche Funktion und Eigenfunktionen explizit verknüpft und kurz die *bilineare Relation* genannt wird, stellt bei konstantem ξ eine Reihenentwicklung einer stetigen Funktion mit stückweise stetiger erster Ableitung dar. Indem wir eine lineare Kombination

$$S = \alpha_1 \mathsf{K}(x, \xi_1) + \alpha_2 \mathsf{K}(x, \xi_2) + \ldots$$

bilden, erhalten wir eine stetige Funktion, deren erste Ableitung an vorgegebenen Stellen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ vorgegebene Sprünge $-\frac{\alpha_1}{p(\xi_1)}, -\frac{\alpha_2}{p(\xi_2)}, \ldots$ macht und die sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Eigenfunktionenreihe entwickeln läßt. Da wir von jeder Funktion mit

[1]) Vgl. S. 240.

stückweise stetigen ersten und zweiten Ableitungen eine solche spezielle Funktion S abziehen können, daß die Differenz den Bedingungen des obigen Entwicklungssatzes genügt, so erhalten wir unmittelbar das Resultat: *Für die Gültigkeit des Entwicklungssatzes reicht es hin, wenn die erste und zweite Ableitung der stetigen Funktion $w(x)$ stückweise stetig sind.*

Die unhomogene Gleichung (60) können wir, nachdem wir einmal den Entwicklungssatz haben, entweder genau nach dem Muster von § 5,1 auflösen, indem wir bedenken, daß das dortige Verfahren nunmehr durch unseren Entwicklungssatz gerechtfertigt ist, oder auch dasselbe Resultat durch direkte Anwendung der Formeln (60) aus Kap. III erhalten. Die Auflösungsformel lautet (vgl. S. 241)

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n y_n(x), \qquad \gamma_n = \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n}, \qquad c_n = \int_{x_0}^{x_1} y_n(x)\, \psi(x)\, dx.$$

Sie setzt die Tatsache in Evidenz, daß die Lösbarkeit der Gleichung (60), falls $\lambda = \lambda_i$ ein Eigenwert ist, zur notwendigen und hinreichenden Bedingung das Bestehen der Orthogonalitätsrelation $\int_{x_0}^{x_1} \psi y_i\, dx = 0$ hat. Physikalisch gesprochen: *Ist die äußere Kraft in Resonanz mit einer Eigenschwingung, so gibt es dann und nur dann einen stationären Zustand, wenn diese Kraft an dem rein in der betreffenden Eigenschwingung sich bewegenden System keine Arbeit leistet.*

3. Die Konstruktion der Greenschen Funktion und die Greensche Funktion im erweiterten Sinne. Mit den obigen Betrachtungen ist das Eigenwertproblem der Differentialgleichung (60) vollständig erledigt, sobald wir wirklich eine zu den betreffenden Randbedingungen gehörige Greensche Funktion für $L[y]$ finden können. Zur Konstruktion einer solchen Greenschen Funktion verfahren wir folgendermaßen. Wir betrachten eine Lösung $y_0(x)$ der Differentialgleichung $L[y] = 0$, die für $x = x_0$ der vorgegebenen Randbedingung genügt, z. B. verschwindet, dann ist $c_0 y_0(x)$ die allgemeinste solche Lösung; ebenso sei $c_1 y_1(x)$ die Schar der Lösungen von $L[y] = 0$, welche der Randbedingung für $x = x_1$ genügen. Nun sind zwei Fälle möglich. Entweder die beiden Scharen sind voneinander verschieden — was als der allgemeine Fall zu gelten hat —, oder sie fallen zusammen. Im ersten Falle sind die Funktionen y_0, y_1 linear voneinander unabhängig, d. h. es ist einem bekannten Satze zufolge $y_0 y_1' - y_0' y_1 \neq 0$ [1]); im zweiten Falle unterscheiden sich y_0 und y_1 nur durch einen konstanten Faktor; jede Lösung

[1]) Es ist nämlich $y_0 y_1' - y_0' y_1 = \frac{c}{p}$ mit konstantem c, wie man leicht bestätigt, indem man für die linke Seite aus der gegebenen Differentialgleichung eine solche erster Ordnung herleitet.

der einen Schar gehört auch der anderen an. In diesem Falle genügt also die Funktion $y_0(x)$ nicht nur der Anfangs-, sondern auch der Endbedingung; die Differentialgleichung $L[y] = 0$ besitzt also die den Randbedingungen genügende nicht identisch verschwindende Lösung $y_0(x)$, oder mit anderen Worten $\lambda = 0$ ist ein Eigenwert von (60). Im ersten Falle wird eine Kurve der ersten Schar eine der zweiten Schar nie im Grundgebiete berühren können (da es eben keine einzige beiden Scharen angehörige überall glatte Kurve geben darf), und wir können die beiden Konstanten c_0, c_1 so wählen, daß der Schnittpunkt zu einer vorgegebenen Abszisse $x = \xi$ im Intervalle G gehört und der Sprung der Ableitung dort genau den Wert $-\frac{1}{p(\xi)}$ besitzt; auf diese Art erhalten wir die Greensche Funktion explizit durch die Formeln

$$x \leqq \xi: \quad y = c_0 y_0, \qquad c_0 = \frac{-y_1(\xi)}{p(\xi)\,[y_0(\xi)\,y_1'(\xi) - y_0'(\xi)\,y_1(\xi)]},$$

$$x \geqq \xi: \quad y = c_1 y_1, \qquad c_1 = \frac{-y_0(\xi)}{p(\xi)\,[y_0(\xi)\,y_1'(\xi) - y_0'(\xi)\,y_1(\xi)]},$$

womit die gewünschte Konstruktion geleistet ist.

Im zweiten Falle versagt diese Konstruktion, es existiert keine Greensche Funktion. Trotzdem können wir alle unsere Überlegungen unter Nr. 2 retten, wenn wir an Stelle der Greenschen Funktion eine *Greensche Funktion im erweiterten Sinne* einführen. Auch zu ihr führt eine einfache, der physikalischen Anschauung entspringende heuristische Überlegung. Wir erinnern uns daran (vgl. § 5, 1), daß ein Eigenwert λ und die zugehörige normierte Eigenfunktion y die Bedeutung besitzt, daß unsere Saite unter dem Einfluß einer äußeren Kraft der Form $\varphi(x)\,e^{i\sqrt{\lambda}\,t}$ unstabil wird (Resonanz), falls nicht $\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,y(x)\,dx = 0$ ist. Für $\lambda = 0$ bedeutet das Instabilität unter dem Einfluß einer zeitlich konstanten äußeren Kraft; insbesondere wird unter dem Einfluß einer Einzelkraft mit beliebigem Angriffspunkt die Saite sich nicht in eine Gleichgewichtslage einstellen. Wollen wir eine solche Einzelkraft auf das System wirken lassen, ohne daß das System sich beliebig weit aus seiner Ruhelage entfernt, so müssen wir es zuerst durch eine fest gegebene zeitlich konstante Gegenkraft stützen. Diese Gegenkraft können wir beliebig wählen, nur nicht gerade orthogonal zu der Eigenfunktion $y(x)$, weil sie dann gegenüber der Erregung der Eigenfrequenz Null unwirksam wäre. Am bequemsten nehmen wir die Gegenkraft in der symmetrischen Form $\varphi(x) = -y(x)\,y(\xi)$ an; dann wird die Einflußfunktion $K(x, \xi)$ einer im Punkte $x = \xi$ angreifenden Einzelkraft außer den Randbedingungen noch, abgesehen vom Punkte $x = \xi$, der Differentialgleichung

$$L[K] = y(x)\,y(\xi)$$

genügen und für $x = \xi$ die Sprungbedingung (57) befriedigen müssen. Die Lösung dieses Problems ist nur bis auf eine willkürliche additive Funktion $c(\xi)\,y(x)$ bestimmt; wir beseitigen diese Unbestimmtheit durch die Forderung

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathsf{K}(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = 0$$

und nennen die so definierte Funktion $\mathsf{K}(x, \xi)$ die Greensche Funktion im erweiterten Sinne zur Differentialgleichung $L[y] = -\varphi(x)$. Benutzen wir die Voraussetzung, daß $L[y]$ ein sich selbst adjungierter Differentialausdruck sei, dann ergibt sich genau wie S. 275 die *Symmetrieeigenschaft*

$$\mathsf{K}(x, \xi) = \mathsf{K}(\xi, x)$$

der erweiterten Greenschen Funktion.

Der Leser mag sich diese Überlegungen an dem einfachsten Beispiele der beiderseits freien homogenen Saite veranschaulichen (vgl. auch § 11, 1). Hier ist $y =$ konst. Eigenfunktion für $\lambda = 0$, und wir werden als Gegenkraft längs der Saite überall dieselbe konstante Kraft nehmen.

Die Konstruktion der Greenschen Funktion im erweiterten Sinne verläuft wieder genau so wie oben die der gewöhnlichen Greenschen Funktion. Sie könnte nur dann versagen, wenn $\lambda = 0$ ein mehrfacher Eigenwert wäre, wenn es also noch eine weitere zu $y = y_0(x)$ orthogonale Eigenfunktion für $\lambda = 0$ gäbe. Bei unseren Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist dies ausgeschlossen, da, wie wir früher schon erkannten, jeder Eigenwert einfach ist. Im einzigen Ausnahmefall der Periodizität bleibt $\lambda = 0$ trotzdem einfacher Eigenwert. Im Hinblick auf allgemeinere Fälle sei jedoch hier kurz angegeben, daß man im Falle eines mehrfachen Eigenwertes $\lambda = 0$ lediglich dafür Sorge zu tragen hat, mit einer geeigneten Gegenkraft sämtliche zur Frequenz Null gehörige Eigenschwingungen abzustützen, d. h. eine Gegenkraft zu wählen, die auf keiner der zugehörigen orthogonalen und normierten Eigenfunktionen $y_0, y_1, \ldots, y_n$ orthogonal steht; dies wird in der einfachsten symmetrischen Art erreicht, wenn wir die Gegenkraft in der Form

$$\varphi(x) = -y_0(x)\, y_0(\xi) - y_1(x)\, y_1(\xi) - \cdots$$

wählen, worauf dann alle Betrachtungen wie früher verlaufen.

Ganz ähnlich gestaltet sich die Konstruktion der Greenschen Funktion, wenn jede der Randbedingungen sich auf beide Endpunkte bezieht, z. B. bei der Periodizitätsbedingung. Wir haben dann eben aus der allgemeinen, zwei willkürliche Konstanten c_1, c_2 linear enthaltenden Lösung $c_1 y_1 + c_2 y_2$ von $L[y] = 0$ zwei einparametrige Scharen herauszugreifen, deren jede einer der Randbedingungen genügt. Zwei Individuen je einer

der beiden Scharen fügen wir dann wie oben zur Greenschen Funktion zusammen, was stets möglich ist, außer in dem Ausnahmefall, wo beide Scharen zusammenfallen. In diesem Ausnahmefall müssen wir wieder eine Greensche Funktion im erweiterten Sinne konstruieren. Im einzelnen möge man diese Dinge an den Beispielen des nächsten Paragraphen verfolgen.

Die Greensche Funktion im erweiterten Sinne leistet genau dieselben Dienste wie früher die gewöhnliche Greensche Funktion. Wir beachten zuvor, daß jede stückweise stetige Funktion $h(x)$, die aus einer den vorgegebenen homogenen Randbedingungen genügenden Funktion $w(x)$ durch die Gleichung $L[w] = -h(x)$ gewonnen wird, auf der zum Eigenwert 0 gehörigen Eigenfunktion $y(x)$ orthogonal sein muß, wie man sofort erkennt, wenn man die Gleichung $L[w] + h(x) = 0$ mit $y(x)$ multipliziert, über das Gebiet G integriert und die Greensche Formel anwendet. Weiter beachten wir, daß die Lösung $w(x)$ einer Differentialgleichung $L[w] = -h(x)$ nur bis auf eine beliebige additive Funktion $cy(x)$ bestimmt ist und daher durch die Forderung $\int_{x_0}^{x_1} w y \, dx = 0$ festgelegt werden kann. Nunmehr sprechen wir den Satz aus: Besteht zwischen der zu $y(x)$ orthogonalen Funktion $w(x)$ mit stetiger erster und stückweise stetiger zweiter Ableitung und der stückweise stetigen Funktion $h(x)$ die Relation

$$L[w] = -h(x),$$

so besteht auch die Relation

$$w(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, \xi)\, h(\xi)\, d\xi \tag{65}$$

und umgekehrt.

Der Beweis wird genau so geführt wie der entsprechende bei der gewöhnlichen Greenschen Funktion, wobei nur weiter zu beachten ist, daß jede Funktion $w(x)$ der Form (65) auf $y(x)$ orthogonal sein muß, weil die Greensche Funktion $K(x, \xi)$ es ist.

Nach diesem Ergebnis bleiben alle weiteren Überlegungen, die sich auf die Zurückführung des Eigenwertproblems von (60) auf ein Integralgleichungsproblem beziehen, unverändert gültig. Für den Entwicklungssatz kommt als weitere Bedingung immer noch die Orthogonalität auf der zu $\lambda = 0$ gehörigen Eigenfunktion $y(x)$ hinzu. Diese Bedingung aber verschwindet aus der endgültigen Formulierung des Entwicklungssatzes vollständig, wenn wir die zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehörigen Eigenfunktionen mitzählen. Wir werden übrigens später[1]) bei einer anderen Behandlungsmethode des Eigenwertproblems auf Grund

[1]) Vgl. Kap. VI.

der Variationsrechnung ganz deutlich sehen, daß tatsächlich das Auftreten eines Eigenwertes Null keinerlei innere Besonderheit bedeutet.

4. Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung. Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung treten keine wesentlich neuen Gesichtspunkte auf. Wir können uns daher auf die kurze Betrachtung eines typischen Beispieles beschränken, nämlich der Differentialgleichung $y^{IV} - \lambda y = 0$ bzw. $y^{IV} - \lambda \varrho y = 0$ des homogenen bzw. unhomogenen Stabes. Wir verstehen wiederum unter der Einflußfunktion oder Greenschen Funktion $\mathsf{K}(x, \xi)$ die Elongation des Stabes unter dem Einfluß einer im Punkte $x = \xi$ angreifenden Einzelkraft im Gleichgewichte bei den vorgegebenen homogenen Randbedingungen. Genau wie oben erhalten wir für diese Funktion die folgenden charakteristischen Bedingungen:

1. Die Funktion $\mathsf{K}(x, \xi)$ ist für jeden Parameterwert ξ mit ihren beiden ersten Ableitungen stetig und genügt den vorgegebenen Randbedingungen.

2. Für jeden von $x = \xi$ verschiedenen Wert ist auch die dritte und vierte Ableitung nach x stetig. Für $x = \xi$ gilt dagegen die Sprungbedingung

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [\mathsf{K}'''(\xi + \varepsilon, \xi) - \mathsf{K}'''(\xi - \varepsilon, \xi)] = -1 .$$

3. Außer für $x = \xi$ ist überall die Differentialgleichung

$$L[\mathsf{K}(x, \xi)] = \mathsf{K}^{IV}(x, \xi) = 0$$

befriedigt.

Die charakteristische Haupteigenschaft der Greenschen Funktion drückt sich in folgendem Zusammenhange aus: Wenn zwischen einer stetigen, den Randbedingungen genügenden Funktion $f(x)$ mit stetigen Ableitungen erster, zweiter, dritter und stückweise stetiger Ableitung vierter Ordnung einerseits und einer stückweise stetigen Funktion $\varphi(x)$ andererseits die Relation

$$L[f] = f^{IV} = -\varphi(x)$$

besteht, so besteht auch die Relation

$$f(x) = \int_{x_0}^{x_1} \mathsf{K}(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

und umgekehrt.

Das Eigenwertproblem der allgemeineren Differentialgleichung

$$y^{IV} - \lambda \varrho y = 0,$$

der zugehörige Entwicklungssatz, die Theorie der unhomogenen Gleichung

$$y^{IV} - \lambda \varrho y = -\psi(x)$$

usw. erledigen sich hier genau wie die entsprechenden Fragen in Nr. 2

durch Zurückführung auf eine Integralgleichung mit dem symmetrischen Kern $K(x,\xi) = \mathsf{K}(x,\xi)\sqrt{\varrho(x)\,\varrho(\xi)}$. *Das Resultat ist die Existenz eines unendlichen Systems von Eigenwerten* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *und zugehörigen Eigenfunktionen* $y_1, y_2, \ldots$, *so daß die Funktionen* $\sqrt{\varrho}\,y_i$ *ein vollständiges orthogonales Funktionensystem bilden und sich jede den Randbedingungen genügende, mit stetigen Ableitungen bis zur dritten und stückweise stetigen Ableitungen vierter Ordnung versehene Funktion* $w(x)$ *nach ihnen in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln läßt. Weiter lehrt der Mercersche Satz*[1]) *das Bestehen der bilinearen Relation*

$$\mathsf{K}(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x)\,y_n(\xi)}{\lambda_n},$$

aus welcher sich ergibt, daß wir die Gültigkeit des Entwicklungssatzes ohne weiteres auch auf solche Funktionen ausdehnen können, deren dritte Ableitung nur noch stückweise stetig ist.

Die Frage der Existenz und Konstruktion der Greenschen Funktion bzw. der Greenschen Funktion im erweiterten Sinne bietet hier keine neuen Schwierigkeiten; sie wird im nächsten Paragraphen an Hand von Beispielen erläutert werden.

5. Partielle Differentialgleichungen. Genau dieselben allgemeinen Gedanken wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen führen auch bei partiellen zum Ziele. Wir betrachten zunächst als einfachstes typisches Beispiel die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\Delta v = -\varphi(x,y)$$

in der xy-Ebene für ein Gebiet G bei einer homogenen Randbedingung, z. B. $v = 0$, welche die Gestalt einer eingespannten, unter dem Einfluß einer zeitlich konstanten Kraft der Dichte $\varphi(x,y)$ im Gleichgewicht befindlichen Membran charakterisiert. Die Lösung dieser Gleichung können wir wiederum mit Hilfe einer Greenschen Funktion $\mathsf{K}(x,y;\xi,\eta)$ erhalten, welche den Einfluß einer im Punkte ξ,η angreifenden Einzelkraft darstellt. Diese Funktion muß überall außer im Punkte $x = \xi$, $y = \eta$ mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetig sein und der Differentialgleichung $\Delta\mathsf{K} = 0$ genügen, ferner die gegebene Randbedingung befriedigen und schließlich im *Quellpunkte* $x = \xi$, $y = \eta$ eine die *Einzelkraft* charakterisierende Singularität besitzen. Die Natur dieser Singularität ergibt sich, indem man den Quellpunkt mit einem Kreise k vom Radius ε und der Peripherie $\varkappa$ umgibt, eine äußere Kraft der Dichte $\varphi_\varepsilon(x,y)$ annimmt, welche außerhalb k gleich Null ist und für welche $\iint_k \varphi_\varepsilon(x,y)\,dx\,dy = 1$ gilt, und die Greensche Funktion

[1]) Vgl. Kap. III, § 5, 4; der definite Charakter des Kernes folgt hier ebenso wie beim Problem der schwingenden Saite (vgl. S. 278).

$K(x, y; \xi, \eta)$ als Grenzwert für verschwindendes ε derjenigen Lösung $K_\varepsilon(x, y; \xi, \eta)$ von $\Delta K = -\varphi_\varepsilon$ auffaßt, welche der gegebenen Randbedingung genügt. Indem man die Gleichung $\Delta K = -\varphi_\varepsilon$ über den Kreis k integriert und die Greensche Formel Kap. IV, (90) anwendet, erhält man

$$\int_k \frac{\partial}{\partial r} K_\varepsilon \, ds = -1,$$

unter $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ den Abstand des Punktes x, y vom Punkte ξ, η verstanden. Wir werden daher unsere zu charakterisierende Greensche Funktion der Forderung

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_k \frac{\partial}{\partial r} K(x, y; \xi, \eta) \, ds = -1$$

zu unterwerfen haben. Dieser Forderung genügen wir, indem wir verlangen, daß K in der Umgebung des Quellpunktes die Gestalt hat

$$K(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \log r + \gamma(x, y; \xi, \eta),$$

wobei $\gamma(x, y; \xi, \eta)$ mit seinen Ableitungen erster und zweiter Ordnung bezüglich x und y stetig ist.

Wir kehren nun diese heuristische Betrachtung um, indem wir eine Greensche Funktion K durch folgende Forderungen definieren:

1. Die Funktion $K(x, y; \xi, \eta)$ ist abgesehen vom Quellpunkte $x = \xi, y = \eta$ mit ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig. In der Umgebung des Quellpunktes hat sie die Form

$$K(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \log r + \gamma(x, y; \xi, \eta),$$

wo $\gamma(x, y; \xi, \eta)$ mit den Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetig ist.

2. K genügt den vorgegebenen Randbedingungen.

3. Überall, außer im Quellpunkt, ist die Differentialgleichung $\Delta K = 0$ erfüllt.

Die so definierte Greensche Funktion genügt der *Symmetriebedingung*

$$K(x, y; \xi, \eta) = K(\xi, \eta; x, y).$$

Der Beweis dieses Symmetriegesetzes, welches wieder genau dieselbe physikalische *Reziprozität* ausdrückt, die wir früher hervorgehoben haben, ergibt sich auch hier fast unmittelbar aus der Greenschen Formel. Wir wenden diese Formel für die Funktionen $K(x, y; \xi, \eta)$ und $K(x, y; \xi', \eta')$ auf ein Gebiet an, welches aus G entsteht, indem man um die Punkte ξ, η bzw. ξ', η' je einen Kreis k bzw. k' vom Radius ε ausschneidet; führt man dann unter Berücksichtigung der Singularitätseigenschaft der Greenschen Funktion den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ aus, so erhält man unmittelbar — das Randintegral über den Rand Γ von G verschwindet

wegen der Randbedingung — die Symmetrieformel in der Gestalt $K(\xi', \eta'; \xi, \eta) = K(\xi, \eta; \xi', \eta')$.

Die Grundeigenschaft der Greenschen Funktion drückt sich hier wiederum in folgendem Zusammenhange aus: Ist $f(x, y)$ irgend eine den Randbedingungen genügende in G stetige und mit stetigen ersten und stückweise stetigen zweiten Ableitungen versehene Funktion und gilt

$$L[f] = \Delta f = -\varphi(x, y),$$

so besteht die Relation

$$f(x, y) = \iint_G K(x, y; \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta .$$

Ist andererseits $\varphi(x, y)$ irgend eine mit ihren Ableitungen erster Ordnung in G stetige Funktion, so genügt die in G stetige Funktion

$$f(x, y) = \iint_G K(x, y; \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

der Randbedingung, besitzt stetige erste und zweite Ableitungen und genügt der Differentialgleichung

$$\Delta f = -\varphi(x, y) .$$

Man beachte, daß im zweiten Teil für die Funktion $\varphi(x, y)$ schärfere Voraussetzungen gemacht werden als im ersten Teil, was bei gewöhnlichen Differentialgleichungen nicht notwendig war.

Der erste Teil des Satzes folgt wieder fast unmittelbar aus der Greenschen Formel Kap. IV, (90). Wir wenden diese für $u = f$, $v = K(x, y; \xi, \eta)$ auf das Gebiet $G - k$ an, welches aus G entsteht, wenn man um den Punkt x, y einen kleinen Kreis k vom Radius ε mit der Peripherie $\varkappa$ ausschneidet; da im Integrationsgebiet $\Delta K = 0$ ist und das Randintegral über den Rand Γ verschwindet, so bleibt

$$\int_\varkappa \left(f \frac{\partial K}{\partial n} - K \frac{\partial f}{\partial n}\right) ds = \iint_{G-k} K \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta .$$

Beim Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ strebt $\int_\varkappa f \frac{\partial K}{\partial n} ds$ gegen f, $\int_\varkappa K \frac{\partial f}{\partial n} ds$ gegen Null, woraus sich das gewünschte Resultat

$$f = \iint_G K \varphi\, d\xi\, d\eta$$

ergibt. Der zweite Teil des Satzes wird am einfachsten mit Hilfe eines von Riemann eingeführten Kunstgriffes bewiesen, wobei allerdings die Stetigkeit der ersten Ableitungen von $\varphi(x, y)$ vorausgesetzt werden

muß. Wir zerlegen die Funktion $f(x,y) = \iint_G \mathsf{K}(x,y;\ \xi,\eta)\,\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$ in zwei Summanden, welche der Zerlegung $\mathsf{K} = -\frac{1}{2\pi}\log r + \gamma(x,y;\ \xi,\eta)$ der Greenschen Funktion entsprechen, nämlich $f = \psi + \chi$, mit

$$2\pi\psi(x,y) = -\iint_G \varphi(\xi,\eta)\log r\,d\xi\,d\eta\,,$$

$$\chi(x,y) = \iint_G \gamma(x,y;\ \xi,\eta)\,\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\,.$$

Da die Funktion $\gamma(x,y;\ \xi,\eta)$ überall mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetig ist, so können wir $\Delta\chi$ durch Differentiation unter dem Integralzeichen bilden und erhalten wegen $\Delta\gamma = 0$ sofort auch $\Delta\chi = 0$. Wir brauchen also, um Δf zu berechnen, nur $\Delta\psi$ zu bilden. Die erste Ableitung ψ_x können wir noch durch Differentiation unter dem Integralzeichen erhalten; bei Einführung von Polarkoordinaten r, ϑ nimmt das Integral $\iint_G \varphi(\xi,\eta)\log r\,d\xi\,d\eta$ die Gestalt $\iint_G \varphi\, r\log r\,dr\,d\vartheta$ an; differenzieren wir vor Einführung der Polarkoordinaten nach x, so erhält das Integral die Gestalt $\iint_G \varphi\cos\vartheta\,dr\,d\vartheta$, wobei der Integrand stetig bleibt. Wir erhalten, wenn wir zur Abkürzung für den Augenblick $-\frac{\log r}{2\pi} = S(x,y;\ \xi,\eta)$ setzen,

$$\psi_x = \iint_G S_x\varphi\,d\xi\,d\eta\,.$$

Hier beachten wir nun die Tatsache, daß $S_x = -S_\xi$ ist, so daß wir auch schreiben können

$$\psi_x = -\iint_G S_\xi\varphi\,d\xi\,d\eta\,,$$

und diese Formel erlaubt uns, durch Teilintegration die Ableitung S_ξ herauszuschaffen, so daß wir dann noch einmal unter dem Integral differenzieren können. Wir erhalten

$$\psi_x = -\int_\Gamma S\varphi\,d\eta + \iint_G S\varphi_\xi\,d\xi\,d\eta$$

und weiter

$$\psi_{xx} = -\int_\Gamma S_x\varphi\,d\eta + \iint_G S_x\varphi_\xi\,d\xi\,d\eta = \int_\Gamma S_\xi\varphi\,d\eta - \iint_G S_\xi\varphi_\xi\,d\xi\,d\eta$$

Ebenso ergibt sich

$$\psi_{yy} = -\int_{\Gamma} S_\eta \varphi \, d\xi - \iint_G S_\eta \varphi_\eta \, d\xi \, d\eta$$

und somit

$$\Delta\psi = \int_{\Gamma} \frac{\partial S}{\partial n} \varphi \, ds - \iint_G (S_\xi \varphi_\xi + S_\eta \varphi_\eta) \, d\xi \, d\eta .$$

Wenn wir nun rechts das Doppelintegral nicht über das ganze Gebiet G erstrecken, sondern über ein Gebiet G_ε, welches aus G durch Ausschneiden eines kleinen Kreises k mit dem Radius ε und der Peripherie $\varkappa$ um (x, y) entsteht, so können wir schreiben

$$\Delta\psi = \int_{\Gamma} \frac{\partial S}{\partial n} \varphi \, ds - \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{G_\varepsilon} (S_\xi \varphi_\xi + S_\eta \varphi_\eta) \, d\xi \, d\eta .$$

Hier formen wir rechts das Doppelintegral nach der Greenschen Formel um und erhalten, da in G überall $\Delta S = 0$ ist,

$$\Delta\psi = \int_{\Gamma} \frac{\partial S}{\partial n} \varphi \, ds - \int_{\Gamma} \frac{\partial S}{\partial n} \varphi \, ds + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varkappa} \frac{\partial S}{\partial n} \varphi \, ds = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varkappa} \frac{\partial S}{\partial n} \varphi \, ds .$$

Das rechts übrig bleibende Randintegral über $\varkappa$ geht aber für $\varepsilon \to 0$ in $-\varphi(x, y)$ über, wie wir schon früher sahen, und somit ist das Bestehen der „*Poissonschen Gleichung*" $\Delta f = -\varphi$ bewiesen.

Ganz genau so verläuft die Überlegung für den Differentialausdruck Δu im Raume. Nur hat man da statt der Funktion $\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r}$ die Funktion $\frac{1}{4\pi r}$ in Betracht zu ziehen.

Schon an dieser Stelle wollen wir endlich die anschauliche Bedeutung der Lösungen von $\Delta u = 0$ bzw. $\Delta u = -\varphi$ hervorheben, indem wir wegen einer ausführlichen Behandlung auf die spätere Darstellung der Potentialtheorie in Band II verweisen. Betrachten wir den Raum von drei Dimensionen, so ist die Funktion $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$ *das Newtonsche Potential einer im Quellpunkte* ξ, η, ζ *konzentrierten Masse der Größe* 1, *d. h. wir erhalten durch Differentiation nach irgendeiner Koordinate* x, y, z *die negativen Komponenten des Kraftfeldes, welches nach dem Newtonschen Anziehungsgesetz die Masse* 1 *im Quellpunkt um sich herum verbreitet.* Haben wir in einem Raumstück G eine stetige Massenverteilung mit der Dichte $\varrho(x, y, z)$, so stellt sich ihr Potential durch ein Integral der Form

$$u(x, y, z) = \iiint_G \varrho(\xi \eta \zeta) \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

dar, wobei das Integrationsgebiet eben dieses Raumstück ist. Dieses Potential der Massenbelegung ϱ genügt außerhalb G der Gleichung

$\Delta u = 0$, in G — sofern ϱ differenzierbar ist — der Gleichung $\Delta u = -4\pi\varrho$, wie wir oben sahen.

Im Falle zweier unabhängiger Variabler x, y liegen die Verhältnisse ähnlich. Hier tritt die Funktion $\log\frac{1}{r}$ an die Stelle von $\frac{1}{r}$, und wir sprechen daher vom *logarithmischen Potential.*

Die Frage nach der *Existenz der Greenschen Funktion* ist im Falle partieller Differentialgleichungen keineswegs mehr so leicht zu erörtern wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wir werden den allgemeinen Existenzbeweis erst später im Zusammenhang mit den direkten Methoden der Variationsrechnung erbringen und müssen uns hier darauf beschränken, entweder die Existenz der Greenschen Funktion zu postulieren oder aber uns mit denjenigen Fällen zu begnügen, in denen uns wie im nächsten Paragraphen die explizite Aufstellung der Greenschen Funktion gelingt. Hat man aber erst einmal die Greensche Funktion, so verlaufen die weiteren Überlegungen durchaus parallel mit denen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wir betrachten hier das Eigenwertproblem für die Differentialgleichung

$$\Delta v + \lambda\varrho(x,y)\,v = 0\,, \tag{66}$$

bei den gegebenen homogenen Randbedingungen. Zufolge der Grundeigenschaft der Greenschen Funktion folgt aus (66) sofort die homogene Integralgleichung

$$v(x,y) = \lambda\iint_G \mathsf{K}(x,y;\xi,\eta)\,\varrho(\xi,\eta)\,v(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\,.$$

Betrachten wir also den symmetrischen Kern

$$K = \mathsf{K}\sqrt{\varrho(x,y)\,\varrho(\xi,\eta)}\,,$$

so genügt die Funktion

$$u(x,y) = \sqrt{\varrho(x,y)}\,v(x,y)$$

der symmetrischen homogenen Integralgleichung

$$u(x,y) = \lambda\iint_G K(x,y;\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\,, \tag{67}$$

und wegen der Umkehrbarkeit der Beziehungen ist also das Eigenwertproblem der Differentialgleichung (66) mit dem der symmetrischen Integralgleichung (67) vollständig äquivalent. Diese Integralgleichung gestattet die Anwendung der Theorie von Kap. III, da der Kern zwar an einer Stelle des Integrationsgebietes unendlich wird, aber doch nur so, daß das Integral $\iint_G K(x,y;\xi,\eta)^2\,d\xi\,d\eta$ existiert und eine stetige Funktion der Variablen x, y ist. *Es folgt also die Existenz der*

Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *und eines zugehörigen Systems von Eigenfunktionen* $v_1, v_2, \ldots$ *bzw.* $u_1, u_2, \ldots$, wobei wir die Funktionen v_n als normiert annehmen können.

Ist $w(x, y)$ irgend eine Funktion mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen, welche der Randbedingung genügt, so läßt sie sich nach unserem Satze über die Greensche Funktion quellenmäßig in der Form

$$w(x, y) = \iint_G K(x, y; \xi, \eta)\, h(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

durch die Funktion $h = -\Delta w$ darstellen. Wir erhalten also das Resultat: *Jede mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung versehene, den Randbedingungen genügende Funktion* $w(x, y)$ *läßt sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe* $w = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x, y)$, $c_n = \iint_G \varrho\, w\, v_n\, dx\, dy$ *nach den Eigenfunktionen entwickeln. Die normierten Eigenfunktionen* $\sqrt{\varrho}\, v_n$ *bilden also ein vollständiges orthogonales Funktionensystem.*

Zum Unterschied gegenüber gewöhnlichen Differentialgleichungen muß hier hervorgehoben werden, daß wegen des Unendlichwerdens der Greenschen Funktion der Mercersche Satz nicht angewandt werden kann, so daß wir trotz des positiv definiten Charakters des Kernes nicht auf das Bestehen der Gleichung

$$K(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x, y)\, v_n(\xi, \eta)}{\lambda_n}$$

schließen können. Unsere allgemeine Theorie beweist lediglich die weniger besagende Relation

$$\lim_{m \to \infty} \iint_G \left(K - \sum_{n=1}^{m} \frac{v_n(x, y)\, v_n(\xi, \eta)}{\lambda_n} \right)^2 dx\, dy = 0.$$

Die Betrachtungen bei der allgemeineren sich selbst adjungierten Differentialgleichung

$$p \Delta v + p_x v_x + p_y v_y - q v + \lambda \varrho v = 0$$

verlaufen durchaus parallel den eben durchgeführten, so daß wir uns damit begnügen können, festzustellen, daß auch die Ergebnisse wörtlich dieselben bleiben. Der einzige hervorzuhebende Unterschied ist, daß jetzt die Greensche Funktion die Form haben muß

$$K(x, y; \xi, \eta) = -\frac{a(x, y; \xi, \eta)}{2\pi p(\xi, \eta)} \log r + \gamma(x, y; \xi, \eta),$$

wobei $\gamma(x, y; \xi, \eta)$ in der Umgebung des Quellpunktes mit den Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetig ist und a eine mit stetigen

Ableitungen bis zur zweiten Ordnung versehene Funktion bezeichnet, für welche identisch $a(\xi,\eta;\xi,\eta) = 1$ gilt.

Ebenso erhalten wir in drei Dimensionen für die Potentialgleichung $\Delta v = -\varphi(x,y,z)$ und für das Eigenwertproblem der Gleichung

$$\Delta v + \lambda v = 0$$

wörtlich entsprechende Resultate. Nur tritt hier eine andere Singularität für die Greensche Funktion auf, nämlich die Singularität $\frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$, derart, daß die Greensche Funktion $K(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)$ die Form $K(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi r} + \gamma(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)$ besitzen muß, wobei $\gamma(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)$ mit den Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig ist. Die Funktion $\frac{1}{4\pi r}$ selbst ist eine *Grundlösung der Differentialgleichung* $\Delta v = 0$ (vgl. S. 265 und 275).

Bei *partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung* ist ebenfalls der einzige wesentliche Unterschied die andere Form der zur Greenschen Funktion gehörigen Singularität. Betrachten wir etwa — in zwei unabhängigen Variablen — die Differentialgleichung der Platte

$$\Delta\Delta v = -\varphi(x,y),$$

so werden wir die Greensche Funktion außer durch die Randbedingungen und durch die Forderung $\Delta\Delta K = 0$ dadurch festzulegen haben, daß wir ihr die Gestalt vorschreiben

$$K = -\frac{1}{8\pi} r^2 \log r + \gamma(x,y;\xi,\eta),$$

wobei $\gamma(x,y;\xi,\eta)$ eine mit ihren Ableitungen bis zur vierten Ordnung stetige Funktion ist. Daß die angegebene Singularität tatsächlich die richtige ist, d. h. einer Einzelkraft entspricht, wird der Leser leicht selbst bestätigen. Im übrigen sei betont, daß die Funktion $r^2 \log r$ selbst eine „Grundlösung" von $\Delta\Delta v = 0$ ist.

In diesem Falle lehrt uns der Übergang zur Integralgleichung wieder die *Existenz der Eigenwerte und eines zugehörigen vollständigen Orthogonalsystems von Eigenfunktionen, nach denen sich jede den Randbedingungen genügende mit stetigen Ableitungen bis zur vierten Ordnung versehene Funktion in G in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln läßt.*

§ 11. Beispiele für Greensche Funktionen.

1. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Um die Theorien des vorigen Paragraphen an Beispielen zu erläutern, betrachten wir die wichtigsten der früher behandelten Differentialgleichungen.

Die Greensche Funktion des Ausdruckes

$$L[y] = y''$$

bei den Randbedingungen $y(0) = y(1) = 0$ ist für das Intervall $(0,1)$

$$K(x,\xi) = \begin{cases} (1-\xi)x & \text{für} \quad x \leqq \xi, \\ (1-x)\xi & \text{für} \quad x \geqq \xi. \end{cases}$$

Bei den Randbedingungen $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$ wird die Greensche Funktion

$$K(x,\xi) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \leqq \xi \\ \xi & \text{für} \quad x \geqq \xi. \end{cases}$$

Für das Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ und die Randbedingungen

$$y(-1) = y(1) = 0$$

ergibt sich

$$K(x,\xi) = -\tfrac{1}{2}\{|x-\xi| + x\xi - 1\},$$

was man auch durch Transformation aus dem vorletzten Beispiel erhalten kann. Für das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ bei den Randbedingungen $y(0) = -y(1)$, $y'(0) = -y'(1)$ dagegen gilt

$$K(x,\xi) = -\tfrac{1}{2}|x-\xi| + \tfrac{1}{4}.$$

Die Greensche Funktion des zur Besselschen Funktion nullter Ordnung $J_0(x)$ gehörigen Differentialausdruckes

$$L[y] = xy'' + y'$$

für das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ und die Randbedingungen $y(1) = 0, y(0)$ endlich lautet

$$K(x,\xi) = \begin{cases} +\log\xi & \text{für} \quad x \leqq \xi, \\ +\log x & \text{für} \quad x \geqq \xi, \end{cases}$$

was man alles auf Grund der allgemeinen Regeln des vorigen Paragraphen leicht ableitet bzw. bestätigt. Die zu den entsprechenden Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes

$$L[y] = (4xy')' - \frac{n^2}{x}y,$$

der der Besselschen Funktion $J_n(\sqrt{x})$ zugeordnet ist (vgl. (28)), lautet

$$K(x,\xi) = \frac{1}{4n}\left[\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\frac{n}{2}} - (x\xi)^{\frac{n}{2}}\right] \qquad (x \leqq \xi)$$

bzw.

$$K(x,\xi) = \frac{1}{4n}\left[\left(\frac{\xi}{x}\right)^{\frac{n}{2}} - (x\xi)^{\frac{n}{2}}\right] \qquad (x \geqq \xi).$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir den Differentialausdruck

$$L[y] = ((1-x^2)y')' - \frac{h^2}{1-x^2}y,$$

der für $h = 0, 1, 2, \ldots$ zu den Legendreschen Kugelfunktionen nullter, erster usw. Ordnung gehört. Das zugehörige Intervall sei $-1 \leqq x \leqq +1$; dann sind die Randbedingungen: Endlichbleiben an beiden Endpunkten. Man kann sofort eine bei $x = -1$ endlich bleibende Lösung von $L[y] = 0$ angeben, nämlich $c_1\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{h}{2}}$, ebenso eine für $x = +1$ endlich bleibende Lösung $c_2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{h}{2}}$. Aus diesen setzt sich nach den Regeln von § 10, 3 die Greensche Funktion folgendermaßen zusammen

$$K(x,\xi) = \frac{1}{2h}\left(\frac{1+x}{1-x}\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\frac{h}{2}} \qquad (x \leqq \xi)$$

bzw.

$$K(x,\xi) = \frac{1}{2h}\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{h}{2}}. \qquad (x \geqq \xi)$$

Nur für $h = 0$ versagt dieses Verfahren und muß es auch nach unserer allgemeinen Theorie, da für $h = 0$ die Gleichung $L[y] = 0$ die durchweg reguläre, beiden Randbedingungen genügende Lösung $y = \text{konst.} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ besitzt. Hier also muß eine Greensche Funktion im erweiterten Sinne aufgestellt werden, welche der Differentialgleichung

$$L[y] = \frac{1}{2}$$

genügt. Wir finden sehr leicht für diese Funktion den Ausdruck

$$K(x,\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\log[(1-x)(1+\xi)] + c & \text{für } x \leqq \xi, \\ -\frac{1}{2}\log[(1+x)(1-\xi)] + c & \text{für } x \geqq \xi, \end{cases}$$

wobei $c = \log 2 - \frac{1}{2}$ ist.

Endlich sei als einfachstes Beispiel für das Auftreten einer Greenschen Funktion im erweiterten Sinne der Differentialausdruck

$$L[y] = y''$$

betrachtet für das Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ und die Randbedingungen der Periodizität $y(-1) = y(1)$, $y'(-1) = y'(1)$. Da hier $\frac{1}{\sqrt{2}}$ eine reguläre, beiden Randbedingungen genügende Lösung von $L[y] = 0$ ist (es handelt sich physikalisch um die beiderseits freie Saite), so müssen wir

eine Greensche Funktion im erweiterten Sinne aus der Differentialgleichung

$$y'' = \frac{1}{2}$$

konstruieren. Wir erhalten leicht

$$K(x, \xi) = -\frac{1}{2}|x - \xi| + \frac{1}{4}(x - \xi)^2 + \frac{1}{6}.$$

Mit allen diesen Greenschen Funktionen als Kernen können wir nun die entsprechenden Integralgleichungen bilden, doch ist es nicht nötig, diese explizit hinzuschreiben. Dagegen lohnt es sich, die folgenden zu unseren Beispielen gehörigen Bilinearformeln explizit zu betrachten:

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x \sin n\pi \xi}{n^2} = \begin{cases}(1-\xi)x, & (x \leqq \xi)\\ (1-x)\xi, & (x \geqq \xi)\end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin (n+\frac{1}{2})\pi x \sin (n+\frac{1}{2})\pi \xi}{(n+\frac{1}{2})^2} = \begin{cases}x, & (x \leqq \xi)\\ \xi, & (x \geqq \xi)\end{cases}$$

$$K(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+\frac{1}{2})P_n(x)P_n(\xi)}{n(n+1)}$$

für

$$K(x, \xi) = \begin{cases}-\frac{1}{2}\log[(1-x)(1+\xi)] + \log 2 - \frac{1}{2} & \text{für } x \leqq \xi,\\ -\frac{1}{2}\log[(1+x)(1-\xi)] + \log 2 - \frac{1}{2} & \text{für } x \geqq \xi.\end{cases}$$

Besonders hervorheben wollen wir schließlich noch die Greenschen Funktionen und Integralgleichungen, welche zu den Polynomen bzw. den Orthogonalfunktionen von *Hermite* und *Laguerre* gehören.

Die Differentialgleichung (43) der Hermiteschen Orthogonalfunktionen:

$$y'' + (1 - x^2)y + \lambda y = 0$$

besitzt $\lambda = 0$ als Eigenwert. Um die Notwendigkeit der Konstruktion einer erweiterten Greenschen Funktion zu vermeiden, betrachten wir den Wert $\lambda = -2$, welcher sicher kein Eigenwert ist (vgl. S. 261), und konstruieren demgemäß die Greensche Funktion zum Differentialausdruck

$$L[y] = y'' - (1 + x^2)y$$

bei der Randbedingung des Verschwindens für $x = \pm\infty$. Um die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $L[y] = 0$ zu erhalten, gehen wir von der Bemerkung aus, daß $v(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ eine Lösung ist. Wir setzen

die allgemeine Lösung in der Form $y = u e^{\frac{x^2}{2}}$ an und erhalten für u sofort die Differentialgleichung

$$u'' + 2u'x = 0,$$

also

$$u = c_1 \int_{c_2}^{x} e^{-x^2} dx.$$

Somit ergibt sich :

$$y = c_1 e^{\frac{x^2}{2}} \int_{c_2}^{x} e^{-x^2} dx.$$

Die für $x = +\infty$ bzw. $x = -\infty$ verschwindenden partikulären Lösungen ergeben sich hieraus als

$$a e^{\frac{x^2}{2}} \int_{x}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad \text{bzw.} \quad b e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2} dx.$$

Aus ihnen erhalten wir für die Greensche Funktion sofort den Ausdruck[1])

$$K(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{x^2+\xi^2}{2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt \int_{\xi}^{\infty} e^{-t^2} dt & \text{für} \quad x \leqq \xi, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{x^2+\xi^2}{2}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-t^2} dt \int_{x}^{\infty} e^{-t^2} dt & \text{für} \quad x \geqq \xi. \end{cases}$$

Der Faktor $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ kommt dabei durch die Normierung des Sprunges auf Grund der Integralformel

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1$$

zustande.

Die Differentialgleichung $L[y] + \lambda y = 0$ bzw. die Integralgleichung $y(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi) y(\xi) d\xi$ besitzt die Eigenwerte $\lambda = 2n + 2$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ und die Eigenfunktionen

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x).$$

Die Laguerreschen Orthogonalfunktionen $e^{-\frac{x^2}{2}} L_n(x)$ genügen der Differentialgleichung (45)

$$xy'' + y' + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right) y + \lambda y = 0$$

---

[1]) Vgl. *Neumann, R.:* Die Entwicklung willkürlicher Funktionen usw. Diss. Breslau 1912.

für die Eigenwerte $\lambda = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Wir betrachten die Differentialgleichung für den speziellen Wert $\lambda = -1$ und definieren

$$L[y] = xy'' + y' - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4}\right) y .$$

Die Differentialgleichung $L[y] = 0$ hat die spezielle Lösung $e^{\frac{x}{2}}$. Wir setzen die allgemeine Lösung in der Form an

$$y = u e^{\frac{x}{2}}$$

und erhalten dann für u ganz ähnlich wie oben

$$u = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt ,$$

so daß die beiden partikulären Lösungen, die für $x = 0$ regulär sind bzw. für $x = +\infty$ verschwinden, durch die Ausdrücke

$$a e^{\frac{x}{2}} \qquad \text{bzw.} \qquad b e^{\frac{x}{2}} \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

gegeben werden. Aus ihnen setzt sich die Greensche Funktion für die in § 9, 1 aufgestellten Randbedingungen wie folgt zusammen:

$$K(x, \xi) = \begin{cases} e^{\frac{x+\xi}{2}} \int_\xi^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt & \text{für} \quad x \leqq \xi , \\ e^{\frac{x+\xi}{2}} \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt & \text{für} \quad x \geqq \xi . \end{cases}$$

Als Beispiel einer Greenschen Funktion zu einem Differentialausdruck vierter Ordnung betrachten wir die zu $L[y] = y^{IV}$ für das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gehörige Greensche Funktion bei den Randbedingungen $y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0$ (beiderseits eingespannter Stab). Man erhält ohne Schwierigkeiten

$$K(x, \xi) = \frac{x^2(\xi - 1)^2}{6} (2x\xi + x - 3\xi) \qquad \text{für} \quad x \leqq \xi$$

und entsprechend für $x \geqq \xi$.

2. Greensche Funktion von Δu für Kreis und Kugel. Die einfachsten und interessantesten Beispiele Greenscher Funktionen für partielle Differentialgleichungen liefert der Potentialausdruck Δu für ebene oder räumliche Gebiete. Für einige Gebiete gelingt es, die Greenschen Funktionen explizit durch bekannte transzendente Funktionen auszudrücken. Wir betrachten die einfachste Randbedingung, nämlich $u = 0$, und stellen zunächst die Greensche Funktion für Kreis und Kugel auf. Zu

beiden führt uns die elementargeometrische Tatsache, daß der Kreis bzw. die Kugel der geometrische Ort für alle Punkte ist, die von zwei Punkten P_1, P_2 ein konstantes Verhältnis der Abstände haben; genauer, wenn $P_1: (\xi, \eta)$ bzw. (ξ, η, ζ) irgendein Punkt im Innern des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ bzw. der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ist, und der Punkt P_2 mit den Koordinaten $\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}$, $\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$ bzw. $\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, $\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, $\frac{\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ sein Spiegelpunkt (der also notwendig außerhalb liegt), wenn ferner r_1, r_2 die Entfernungen des beliebigen Punktes $P: (x, y)$ bzw. (x, y, z) von P_1 und P_2 bedeuten, so ist das Verhältnis $r_1 : r_2$ konstant, wenn sich der Punkt P auf der Kreisperipherie bzw. der Kugeloberfläche bewegt, und zwar ist der Wert dieses Verhältnisses gleich $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ bzw. $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$. Nun beachten wir, daß die Funktionen $-\frac{1}{2\pi}\log r_1$, $-\frac{1}{2\pi}\log r_2$ bzw. die Funktionen $\frac{1}{4\pi r_1}$, $\frac{1}{4\pi r_2}$ Lösungen von $\Delta u = 0$ sind und daß $-\frac{1}{2\pi}\log r_1$ bzw. $\frac{1}{4\pi r_1}$ gerade die richtige für eine Grundlösung vorgeschriebene Singularität im Punkte P_1 besitzt. Somit haben wir in den Funktionen

$$K(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\log\frac{r_1}{r_2} + \frac{1}{2\pi}\log\sqrt{\xi^2+\eta^2}$$

bzw.

$$K(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\right)$$

gerade die zu der Randbedingung $u = 0$ gehörigen Greenschen Funktionen für Kreis und Kugel; denn diese Funktionen verschwinden auf der Oberfläche.

Die zugehörigen Integralgleichungen

$$\varphi(x, y) = \lambda \iint_G K(x, y; \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$\varphi(x, y, z) = \lambda \iiint_G K(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\, \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

besitzen nach den früheren Überlegungen zu Eigenwerten und Eigenfunktionen

$$\lambda_{n,m}, \qquad J_n(\sqrt{\lambda_{n,m}}\, r) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} n\vartheta$$

bzw.

$$\lambda_{n,m}, \qquad \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{n,m}}\, r)}{\sqrt{r}}\, Y_n(\vartheta, \varphi),$$

wobei die früher (§ 9, 3) eingeführten Bezeichnungen verwandt worden sind.

3. Greensche Funktion und konforme Abbildung. Im Falle von zwei unabhängigen Variablen kann man sich ganz allgemein die

funktionentheoretische Tatsache zunutze machen, daß die Greensche Funktion die konforme Abbildung des Gebietes G auf den Einheitskreis liefert. Ist nämlich Λ die zu K konjugierte Potentialfunktion, d. h. genügt Λ nicht nur der Potentialgleichung $\Delta\Lambda = 0$, sondern den beiden Gleichungen $\frac{\partial\Lambda}{\partial x} = -\frac{\partial K}{\partial y}$, $\frac{\partial\Lambda}{\partial y} = \frac{\partial K}{\partial x}$, so ist $e^{2\pi(K+i\Lambda)} = f(x+iy) = \zeta = u+iv$ eine analytische Funktion der komplexen Variabeln $z = x+iy$, welche das Gebiet G so auf den Einheitskreis der ζ-Ebene konform abbildet, daß dabei der „Quellpunkt" ξ, η in den Punkt 0 übergeht. Wegen der Invarianz der Potentialgleichung gegenüber konformer Abbildung ist nun die Greensche Funktion des Kreises $|\zeta| \leqq 1$, wenn man sie in den Variabeln x, y statt in u, v schreibt, identisch mit der Greenschen Funktion von G. Wir besitzen daher die Greensche Funktion für alle solchen Gebiete, welche wir konform auf einen Kreis abbilden können. Daß dies alle im Endlichen gelegenen ebenen, einfach zusammenhängenden Gebiete sind, ist einer der wichtigsten Sätze der Funktionentheorie[1]).

4. Die Greensche Funktion der Potentialgleichung für eine Kugeloberfläche. Ein einfaches Beispiel für das Auftreten einer Greenschen Funktion im erweiterten Sinne liefert uns die Differentialgleichung $\Delta^* u = 0$ (s. § 9, 3) mit der Bedingung der Regularität auf der ganzen Kugelfläche außer im Quellpunkt. Da die Funktion $u = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ dieser Bedingung genügt, so muß man eine Greensche Funktion im erweiterten Sinne konstruieren, welche der Differentialgleichung $\Delta^* u = \frac{1}{4\pi}$ genügt. Man erhält diese Funktion sehr leicht, indem man von der Invarianzeigenschaft des Ausdruckes $\Delta^* u$ gegenüber beliebigen Drehungen der Kugel Gebrauch macht. Legen wir den Quellpunkt P_1 der Greenschen Funktion zunächst in den Nordpol $\vartheta = 0$, so sehen wir sofort, daß wir die Differentialgleichung $\Delta^* u = \frac{1}{4\pi}$ durch die nur von der Koordinate ϑ abhängige Funktion $-\frac{1}{2\pi}\log\left(2\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$ befriedigen können. Wegen der Drehungsinvarianz ist also, wenn wir mit $\varrho(\vartheta, \varphi; \vartheta_1, \varphi_1)$ den sphärischen Abstand zweier Punkte $P: (\vartheta, \varphi)$ und $P_1: (\vartheta_1, \varphi_1)$ der Kugeloberfläche bezeichnen

$$K(\vartheta, \varphi; \vartheta_1, \varphi_1) = -\frac{1}{2\pi}\log\left(2\sin\frac{\varrho}{2}\right)$$

eine nur für $P = P_1$ nicht reguläre Lösung von $\Delta^* u = \frac{1}{4\pi}$. Da diese Funktion außerdem für $P = P_1$ genau die richtige Singularität auf-

[1]) Vgl. *Hurwitz-Courant*· Funktionentheorie, S. 245—392, insb. S. 322—392. Berlin 1922.

weist, so stellt sie die gesuchte Greensche Funktion dar. Nimmt man sie als Kern einer Integralgleichung

$$-2\pi\ Y(\vartheta, \varphi) = \lambda \iint_G \log\left(2 \sin \frac{\varrho}{2}\right) Y(\vartheta_1, \varphi_1)\, d\vartheta_1 d\varphi_1,$$

so gehören also zu ihr die $(2n+1)$-fachen Eigenwerte $\lambda = n(n+1)$ und die entsprechenden Eigenfunktionen $Y = Y_n(\vartheta, \varphi)$ und keine anderen.

§ 12. Ergänzungen und Aufgaben zum fünften Kapitel.

1. Systeme von zwei Freiheitsgraden. Die physikalischen Systeme von zwei Freiheitsgraden spielen in zahlreichen Anwendungen eine besonders große Rolle (drahtlose Telegraphie, gekoppelte Schwingungen jeder Art). Man vergleiche die Literatur unter Beachtung der in § 3 entwickelten Gesichtspunkte, z. B. *Hort, W.:* Technische Schwingungslehre, 2. Aufl. Berlin 1922.

2. Registrierung von Kurven durch Registrierapparate. Die von einem Registrierapparat gezeichnete Kurve entspricht nie genau dem Verlauf der erregenden Kraft, wie wir in § 2 sahen. Eine gute Vorstellung von der entstehenden Verzerrung geben die folgenden, einer Arbeit von Broemser, Zeitschr. f. Biologie, Bd. 63, entnommenen Abbildungen, in denen wagerecht die Zeit, senkrecht die Elongation aufgetragen ist. Als erregende Schwingung dient die trapezförmige, in den folgenden Abbildungen durch punktierte Kurven dargestellte. Die Abb. 4 und 5 entsprechen

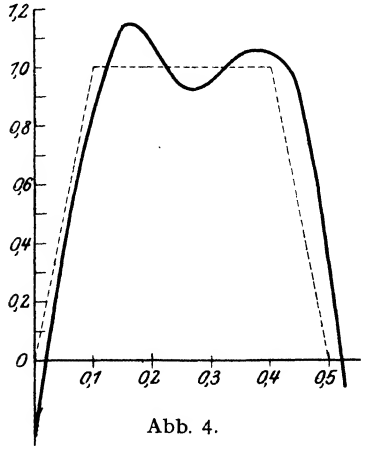


Abb. 4.

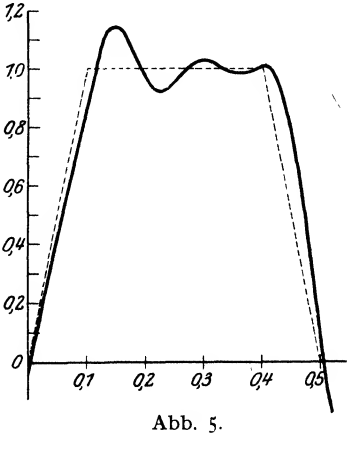


Abb. 5.

relativ langer Eigenschwingungsdauer 0,2 bzw. 0,15 und kleiner Dämpfung $D = \frac{\varkappa}{2\sqrt{mc}} = 0{,}25$, so daß die sich überlagernde Eigenschwingung nicht abgedämpft wird und die Angabe des Apparates stark verzerrt. Die

Abb. 6 und 7 zeigen, wie stark die Eigenschwingung bei derselben Dämpfung 0,25 abgedämpft wird, wenn die Eigenschwingungsdauer kurz ist, nämlich gleich 0,1 bzw. 0,05. Die Abb. 8 zeigt die Wirkung der stärkeren Dämpfung $\frac{1}{\sqrt{2}}$ bei der Eigenschwingungsdauer 0,1. Hier äußert sich die Dämpfung bereits in der ersten Periode, während in der Abb. 7 noch drei Schwingungen mit abnehmender Amplitude zu erkennen sind. Die

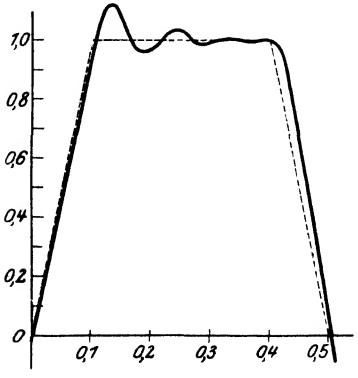


Abb. 6.

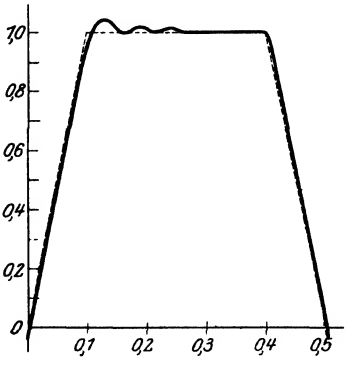


Abb. 7.

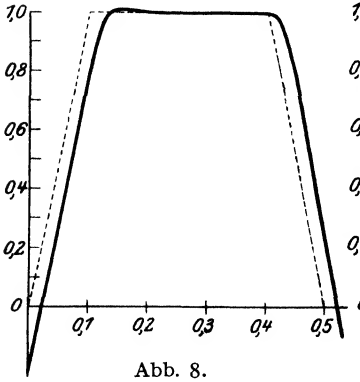


Abb. 8.

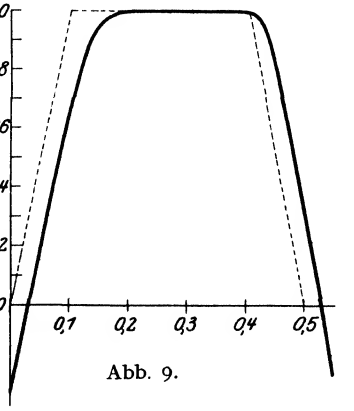


Abb. 9.

Abb. 9 entspricht derselben Eigenschwingungsdauer 0,1, aber der aperiodischen Dämpfung 1. Hier ist die Eigenschwingung nicht mehr direkt zu erkennen, sie äußert sich aber in der starken Phasenverschiebung. Aus diesem Grunde würde man im allgemeinen die Verhältnisse, die den Abbildungen 8 und 9 entsprechen, für die günstigsten halten, wenn auch natürlich vor allem der eigentliche Zweck der jeweiligen Registrierung bei der Wahl des Verhältnisses zwischen der Eigen schwingungsdauer und der Dämpfung maßgebend ist.

3. Poincarés Deutung des Eigenwertproblems bei endlich vielen Freiheitsgraden[1]. Wenn man in der Theorie der Wärmeleitung auf molekulare Vorstellungen zurückgeht, so führt das Wärmeleitungsproblem formal genau auf die Fragestellungen von § 3. Wir stellen uns vor, daß unser System aus n Molekülen besteht, welche gegen einander und gegen den umgebenden Raum von der Temperatur Null nach dem Newtonschen Gesetze Wärme ausstrahlen, nach welchem die Wärmeabgabe in der Zeiteinheit der Temperaturdifferenz proportional ist. Hierbei werden die Proportionalitätsfaktoren noch von der Konfiguration des Systems abhängen, so daß wir für die Temperatur u_h des h^{ten} Punktes eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{d u_h}{d t} + \sum_{i=1}^{n} c_{ih}(u_h - u_i) + c_h u_h = 0$$

erhalten, wobei die Koeffizienten c_{ih} der Symmetriebedingung $c_{ih} = c_{hi}$ genügen. Dieses Differentialgleichungssystem ist aufs engste verbunden mit den beiden definiten quadratischen Formen

$$T = \sum_{h=1}^{n} \dot{u}_h^2, \qquad V = \sum_{i,h} c_{ih}(u_i - u_h)^2 + \sum_h c_h u_h^2 = \sum_{i,h} a_{ih} u_i u_h .$$

Indem wir sie simultan auf die Gestalten

$$T = \sum q_h^2, \qquad V = \sum \lambda_h q_h^2$$

transformieren, erhalten wir unmittelbar mit willkürlichen Konstanten α_h die „Eigenlösungen"

$$q_h = \alpha_h e^{-\lambda_h t},$$

aus denen sich die allgemeinste, einer beliebig gegebenen anfänglichen Temperaturverteilung entsprechende Lösung als lineare Kombination zusammensetzen läßt. Die Eigenlösungen entsprechen solchen anfänglichen Temperaturverteilungen, bei denen die Abkühlung für alle Punkte mit gleicher Geschwindigkeit vor sich geht, so daß also die Verhältnisse der Temperaturen unabhängig von der Zeit bleiben.

4. Dämpfung und Anfachung. Der Einfluß einer der Geschwindigkeit proportionalen Dämpfung bei einer eingespannten schwingenden Saite der Länge π drückt sich durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varkappa \frac{\partial u}{\partial t}$$

mit den Randbedingungen $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ aus. Die allgemeine Lösung erhält hier die Form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n x \, e^{-\delta t}(a_n \cos \nu_n t + b_n \sin \nu_n t),$$

[1]) Vgl. *Poincaré, H.:* Theorie analytique de la propagation de la chaleur. Paris 1895.

wobei der Dämpfungsfaktor δ gleich $\frac{\varkappa}{2}$, die Frequenz ν_n gleich $\sqrt{n^2-\frac{\varkappa^2}{4}}$ ist. Dabei ist zu beachten, daß im Falle $\varkappa^2 \geqq 4$ die ersten Eigenfunktionen zu aperiodischen Vorgängen Anlaß geben.

Bei vielen physikalischen und technischen Problemen kommt eine „negative Dämpfung" oder „Anfachung" vor, was sich mathematisch in der Umkehrung des Vorzeichens von $\varkappa$ kennzeichnet. Wir haben hier kein exponentielles Abklingen, sondern ein exponentielles Ansteigen der Wirkung mit der Zeit, welches seine Grenze mathematisch überhaupt nicht, physikalisch dadurch findet, daß für das System die Gültigkeit der linearen Differentialgleichung bei allzu großen Elongationen aufhört.

5. Beispiele zur schwingenden Saite. a) Gezupfte Saite. In diesem Falle ist zur Zeit $t = 0$ die Anfangslage der als homogen vorausgesetzten Saite derart, daß sie aus zwei geradlinigen Stücken zusammengesetzt erscheint, während die Anfangsgeschwindigkeit überall gleich Null ist. Die maximale Elongation h möge stattfinden für $x = b$ $(0 < b < \pi)$; dann hat die Entwicklung der transversalen Verschiebung $u(x, t)$ die Gestalt

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin n x \cos n t,$$

wobei

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x,0)\sin n x\, dx \\ &= \frac{2h}{\pi}\left(\int_0^{b}\frac{x}{b}\sin n x\, dx + \int_b^{\pi}\frac{\pi-x}{\pi-b}\sin n x\, dx\right) \\ &= \frac{2h}{n^2 b(\pi-b)}\sin n b \end{aligned}$$

ist, so daß gilt

$$u(x,t) = \frac{2h}{b(\pi-b)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n b \sin n x}{n^2}\cos n t.$$

b) Impulsanregung. Analog kann der Fall behandelt werden, in dem die Saite aus ihrer Gleichgewichtslage durch einen Impuls an der Stelle $x = b$ aus der Ruhelage in Schwingung versetzt wird. Man erhält

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n x \sin n t,$$

$$n b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_t(x,0)\sin n x\, dx.$$

Hier muß nun ein Grenzübergang vollzogen werden, indem die Anregungsstrecke sich auf den Punkt $x = b$ zusammenzieht, doch so, daß das Integral $\int_0^\pi u_t(x, 0)\, dx = \frac{\pi}{n} U$ konstant bleibt. Man erhält in der Grenze:

$$b_n = 2U \frac{\sin n b}{\pi n},$$

$$u(x, t) = 2U \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n x \sin n b}{\pi n} \sin n t.$$

c) Schwebungen. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x) \cos n t$$

mit periodischer äußerer Kraft lautet

$$-\frac{2}{\pi} \cos n t \sum_{\nu=1}^{\infty} \sin \nu x \frac{\int_0^\pi f(x) \sin \nu x\, dx}{n^2 - \nu^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sin \nu x\, (a_\nu \sin \nu t + b_\nu \cos \nu t).$$

Setzt man

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin \nu x\, dx = c_\nu,$$

so erhält man bei den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$ für das zugehörige Integral

$$u(x, t) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \sin \nu x \frac{c_\nu}{n^2 - \nu^2} (\cos n t - \cos \nu t).$$

Hier überwiegt im allgemeinen das Glied

$$\frac{-c_\nu}{n^2 - \nu^2} \sin \nu x\, (\cos n t - \cos \nu t),$$

sobald n sich dem Werte ν nähert. Man übersieht das Verhalten dieses Gliedes am besten, wenn man es in der Form darstellt

$$\frac{2 c_\nu}{n^2 - \nu^2} \sin \nu x \sin \frac{n + \nu}{2} t \sin \frac{n - \nu}{2} t;$$

diesen Ausdruck kann man als Darstellung einer Schwingung $\sin \frac{n + \nu}{2} t$ mit variabler Amplitude $\sin \frac{n - \nu}{2} t$ auffassen. Die Schwingung wird wiederholt abwechselnd stärker und schwächer, man hat die Erscheinung

der „Schwebungen". In der Grenze, für $n \to \nu$, erhält das betreffende Glied die Gestalt

$$\frac{c_\nu}{\nu} \sin \nu x \sin \nu t \cdot \frac{t}{2},$$

die Amplitude wächst also mit der Zeit ins Unendliche.

Genau dieselben Verhältnisse und die analoge mathematische Theorie ergeben sich, wenn es sich um die Superposition von Schwingungen mit nahezu gleicher Frequenz und Amplitude handelt.

6. Ein Satz über die Schwingungsgleichung. Eine zweimal differenzierbare Funktion $u(x,t)$, die sich in der Form darstellen läßt

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n t + b_n \sin n t) \sin n x,$$

genügt der Differentialgleichung $u_{xx} = u_{tt}$.

Beim Beweis ist zu bedenken, daß zwar jedes einzelne Glied der trigonometrischen Entwicklung der Differentialgleichung genügt, daß man aber die Entwicklung nicht immer zweimal gliedweise differenzieren kann. Führt man nun neue Variable $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ ein, so verwandelt sich die Differentialgleichung in $u_{\xi\eta} = 0$, während

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin n \xi - b_n \cos n \xi) + \tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin n \eta + b_n \cos n \eta) \\ &= S_1(\xi) + S_2(\eta) \end{aligned}$$

wird. Hier konvergieren die beiden Summen $S_1(\xi)$, $S_2(\eta)$ absolut, da nach Kap. II, § 4, 4 die Größen $n^2 |a_n|$ und $n^2 |b_n|$ beschränkt sind. Ferner sind hier $S_1(\xi)$ und $S_2(\eta)$ zweimal differenzierbar, da $u(x,t) = v(\xi,\eta)$ bei festem η zweimal nach ξ und bei festem ξ zweimal nach η differenzierbar ist, womit alles bewiesen ist.

7. Schwingungen des frei herabhängenden Seils und Besselsche Funktionen. Ein homogenes Seil von der Länge und vom Gewichte 1 hänge längs der der Richtung der Schwere entgegengesetzten x-Achse, und zwar am Punkte $x = 1$, so daß das freie Ende im Punkte $x = 0$ liegt. Ist dann u die Verrückung senkrecht zur x-Achse, so ergibt sich[1]) für u die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Der Ansatz

$$u = q(t)\, \varphi(x)$$

führt zur Zerlegung

$$\frac{\ddot{q}}{q} = -\lambda = \frac{(x\varphi')'}{\varphi}$$

und der Nebenbedingung: $\varphi(1) = 0$, $\varphi(0)$ endlich.

[1]) Vgl. *Kneser, A.*: Integralgleichungen, S. 39—43.

Daraus erhält man

$$\varphi(x) = \text{konst.} \cdot J(2\sqrt{\lambda x}),$$

wobei $J(x)$ die Besselsche Funktion von der Ordnung 0 bedeutet.

8. Die Greensche Funktion der Gleichung $\Delta u = 0$ für ein Rechtflach[1]. Die Begrenzungsebenen des Rechtflachs seien $x = \pm\frac{a}{2}$, $y = \pm\frac{b}{2}$, $z = \pm\frac{c}{2}$. Dann konstruiert man zur Herstellung der zur Randbedingung $u = 0$ gehörigen Greenschen Funktion mit den oben festgesetzten Eigenschaften in natürlicher Verallgemeinerung des bei der Kugel (§ 11, 2) benutzten Verfahrens das zum Ausgangsrechtflach gehörige Gitter mit den Eckpunkten $((k+\frac{1}{2})a,\ (m+\frac{1}{2})b,\ (n+\frac{1}{2})c)$ $k, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ und spiegelt den Punkt (ξ, η, ζ) wiederholt an den Gitterebenen. Dadurch ergibt sich ein System von Punkten $(ka + (-1)^k\xi,\ mb + (-1)^m\eta,\ nc + (-1)^n\zeta)$. Wir denken uns in jedem dieser Punkte je eine Masseneinheit konzentriert, und zwar eine positive oder negative, je nachdem, ob $k + m + n$ gerade oder ungerade ist. Man wird dann vermuten, daß das Potential einer solchen Massenverteilung in den Gitterebenen gleich Null ist, weil dort die Beiträge der einzelnen Masseneinheiten sich wegheben. So kommt man auf den folgenden Ansatz für K[2]:

$$\mathsf{K} = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k+m+n}}{\sqrt{N(k, m, n; \xi, \eta, \zeta; x, y, z)}} \tag{68}$$

mit

$$N(k, m, n; \xi, \eta, \zeta; x, y, z) = [ka + (-1)^k\xi - x]^2 + [mb + (-1)^m\eta - y]^2 + [nc + (-1)^n\zeta - z]^2.$$

Hier muß allerdings, da die Konvergenz höchstens bedingt sein kann, die Summationsfolge noch genauer diskutiert werden. Wir bezeichnen zu diesem Zwecke allgemein den Ausdruck $\varphi(k+1) - \varphi(k)$, wo $\varphi(k)$ eine beliebige Funktion von k ist, mit $\Delta_k\varphi(k)$. Dann können wir im Ausdruck für K bei festem k und m die innere Summe nach n so schreiben:

$$N'(k, m) = \sum_{n=\pm1, \pm3, \ldots}\Delta_n\frac{1}{\sqrt{N(k, m, n)}} = -\sum_{n=0, \pm2, \pm4, \ldots}\Delta_n\frac{1}{\sqrt{N(k, m, n)}},$$

---

[1]) Die Konvergenzbetrachtungen und Durchführung der Rechnungen dieser Nummer verdanken wir Herrn *A. Ostrowski*.

[2]) Vgl. *Riemann, B.* und *K. Hattendorf:* Schwere, Elektrizität und Magnetismus, S. 84—88. Hannover 1880.

da $\lim_{|n|\to\infty} N(k,m,n) = \infty$ ist. Dieselbe Transformation wendet man auf die Summen nach m und k an und erhält, da $\lim_{|m|\to\infty} N'(k,m) = 0$ ist, wie sogleich bewiesen werden wird,

$$N''(k) = \sum_{m=\pm 1,\pm 3,\ldots} \Delta_m N'(k,m) = -\sum_{m=0,\pm 2,\pm 4,\ldots} \Delta_m N'(k,m),$$

ferner

$$\mathsf{K} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=\pm 1,\pm 3,\ldots} \Delta_k N''(k) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=0,\pm 2,\pm 4,\ldots} \Delta_k N''(k),$$

da auch $\lim_{|k|\to\infty} N''(k) = 0$ gilt. Zusammenfassend erhalten wir die Transformation

$$\mathsf{K} = \pm\frac{1}{4\pi} \sum_k \sum_m \sum_n \Delta_k \Delta_m \Delta_n \frac{1}{\sqrt{N(k,m,n)}}, \tag{69}$$

wo jeder der drei Summationsindizes entweder über alle geraden oder über alle ungeraden ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft und vor der ganzen Summe das Vorzeichen $+$ oder $-$ steht, je nachdem, ob die Summation eine gerade oder ungerade Anzahl von Malen über alle geraden ganzen Zahlen läuft.

Zum Nachweis aller unserer Behauptungen genügt der Beweis der absoluten Konvergenz der letzten Summe. Dieser Beweis folgt unmittelbar aus der Abschätzung ihres allgemeinen Gliedes.

$$\left| \Delta_k \Delta_m \Delta_n \frac{1}{\sqrt{N(k,m,n)}} \right| < \frac{(d_1|k|+c_1)(d_2|m|+c_2)(d_3|n|+c_3)}{(\sqrt{k^2+m^2+n^2})^7} < \frac{c}{(k^2+m^2+n^2)^2} \tag{70}$$

für $x^2+y^2+z^2 < h$, $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 < h$, $k^2+m^2+n^2 > c_4(h)$,

$$d_1 = d_1(h), \ldots, \qquad c_3 = c_3(h), \qquad c = c(h).$$

Diese Abschätzung ergibt sich durch dreimalige Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung und aus der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel.

Zugleich ergibt sich auch die Gleichmäßigkeit der Konvergenz in $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, wenn nur über k, m, n mit $k^2+m^2+n^2 > c_4(h)$ summiert wird, so daß $N(k,m,n)$ für kein Tripel dieser k, m, n verschwindet.

Dieselbe Überlegung ergibt auch die absolute und in $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ gleichmäßige Konvergenz aller durch gliedweise Differentiation

gebildeten partiellen Ableitungen der Summe (69) für $x^2+y^2+z^2<e$, $\xi^2+\eta^2+\zeta^2<e$, $k^2+m^2+n^2>c_4(e)$.

Nunmehr folgt ohne Schwierigkeit, daß (69) die gesuchte Greensche Funktion ist; natürlich haben (68) und (69) nur so lange Bedeutung, als kein $N(k,m,n)$ verschwindet. Daß die Forderungen 1 und 3 (§ 10, 5) erfüllt sind, bedarf keines Beweises. Für die Forderung 2 etwa in der Ebene $x=\frac{a}{2}$ benutzen wir die Darstellung

$$\mathsf{K}=\frac{1}{4\pi}\sum_{k=\pm 1,\pm 3,\ldots}\Delta_k N''(k).$$

Da für $x=\frac{a}{2}$ die endlichen Summen $\sum_{k=\pm 1,\pm 3,\ldots,\pm(l+1)}\Delta_k N''(k)$ verschwinden, weil sich die einzelnen Glieder paarweise wegheben, ergibt sich $\mathsf{K}=0$. Ebenso zeigt man, daß 2 in den anderen Ebenen des Gitters erfüllt ist.

Die Summe (68) hat bereits Riemann durch ein Integral über gewisse Thetaprodukte dargestellt. Diese Riemannsche Darstellung läßt sich folgendermaßen ableiten. Wir gehen von der Gleichung

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-st^2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{s}},\qquad s>0$$

aus und setzen in ihr für s den Ausdruck $N(k,m,n;x,y,z;\xi,\eta,\zeta)$ ein. Dann ergibt sich

$$\mathsf{K}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\sum_k\sum_m\sum_n\Delta_k\Delta_m\Delta_n\int_0^\infty e^{-Nt^2}\,dt.$$

Könnten wir hier die Summation mit der Integration vertauschen, so würde folgen

$$(71)\qquad \mathsf{K}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\sum_k\sum_m\sum_n\Delta_k\Delta_m\Delta_n e^{-Nt^2}\,dt=\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f_1f_2f_3\,dt,$$

wo die drei Faktoren unter dem Integralzeichen gegeben sind durch

$$f_1=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\,e^{-t^2[ka+(-1)^k\xi-x]^2},$$

$$f_2=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m e^{-t^2[mb+(-1)^m\eta-y]^2},$$

$$f_3=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\,e^{-t^2[nc+(-1)^n\zeta-z]^2}.$$

und sich durch die Thetafunktion

$$\vartheta_{00}(z,\tau) = \vartheta_0(z,\tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\nu^2\tau} e^{2i\pi\nu z}$$

ausdrücken lassen.

Es handelt sich vor allem darum, die Formel (71) zu beweisen, und dabei macht der Punkt $t = 0$ die Hauptschwierigkeit, da die drei Reihen in der Nähe des Wertes $t = 0$ nicht gleichmäßig konvergieren. Wir beweisen zunächst, daß man die Summation nach k mit der Integration vertauschen kann:

$$(72)\qquad \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} f_1 f_2 f_3\, dt = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\infty} f_2 f_3 e^{-t^2[ka+(-1)k\xi-x]^2}\, dt.$$

Die Vertauschbarkeit der Summation mit der Integration von 1 bis ∞ ist leicht einzusehen. In der Tat gilt für den Rest der Summe f_1 für $t > 1$, $p > P(\xi, x) > 2$ die Abschätzung

$$\left|\sum_{|k|>p}(-1)^k e^{-t^2[ka+(-1)k\xi-x]^2}\right| < e^{-\frac{a^2}{4}t^2} \sum_{|k|>p} e^{-\frac{a^2}{2}t^2k^2}$$

$$< \frac{2e^{-\frac{a^2}{4}t^2}}{a^2} \sum_{|k|>p} \frac{1}{k^2} < \frac{2}{a^2} e^{-\frac{a^2}{4}t^2} \frac{1}{p-1} < \frac{4}{p\,a^2} e^{-\frac{a^2t^2}{4}},$$

und das Integral hierüber von 1 bis ∞ konvergiert mit gegen ∞ wachsendem p gegen Null. Andererseits bleiben f_2, f_3 auf der Strecke von 1 bis ∞ offenbar gleichmäßig beschränkt.

Um die Vertauschbarkeit der Summation mit der Integration von 0 bis 1 nachzuweisen, wird es nach einem bekannten Satz[1]) genügen, die Beschränktheit der Partialsummen des Integranden zu zeigen. Nun ist aber jede der beiden Summen $\sum_{k=0}^{-\infty}$ und $\sum_{k=1}^{\infty}$, in welche sich f_1 zerlegen läßt, eine alternierende Reihe, deren Glieder von einem bestimmten k an monoton abnehmen, und zwar hängt dieses k nur von ξ und x, nicht von t ab. Daher ist der Wert jeder Partialsumme der beiden Summen für alle $t > 0$ zwischen festen Grenzen enthalten. Andererseits gilt Entsprechendes auch für die Partialsummen von f_2 und f_3, so daß auch f_2 und f_3 selbst für $t > 0$ gleichmäßig beschränkt sind. Damit wird der genannte Satz anwendbar und die Gleichung (72) ist bewiesen. Eine genau analoge Überlegung beweist auch die Vertauschbarkeit der Summationen nach m und n mit der Integration in den einzelnen Gliedern auf der rechten Seite von (71), so daß nunmehr die ganze Relation (71) bewiesen ist.

[1]) Vgl. Kap. II, § 12, 12a.

Wir stellen nun K durch die Funktion ϑ_{00} dar. Es ist

$$f_1 = e^{-t^2(x-\xi)^2}\vartheta_{00}\left(-\frac{2at^2i(x-\xi)}{\pi}, \frac{4a^2t^2i}{\pi}\right) - e^{-t^2(x+\xi)^2}\vartheta_{00}\left(-\frac{2at^2i(x+\xi)}{\pi}, \frac{4a^2t^2i}{\pi}\right),$$

$$f_2 = e^{-t^2(y-\eta)^2}\vartheta_{00}\left(-\frac{2bt^2i(y-\eta)}{\pi}, \frac{4b^2t^2i}{\pi}\right) - e^{-t^2(y+\eta)^2}\vartheta_{00}\left(-\frac{2bt^2i(y+\eta)}{\pi}, \frac{4b^2t^2i}{\pi}\right),$$

$$f_3 = e^{-t^2(z-\zeta)^2}\vartheta_{00}\left(-\frac{2ct^2(z-\zeta)}{\pi}, \frac{4c^2t^2i}{\pi}\right) - e^{-t^2(z+\zeta)^2}\vartheta_{00}\left(-\frac{2ct^2(z+\zeta)}{\pi}, \frac{4c^2t^2i}{\pi}\right).$$

Auf die einzelnen Faktoren wenden wir die Transformationsformel für die Thetafunktion an:

$$\vartheta_{00}(z,\tau) = e^{-\frac{\pi i}{\tau}z^2}\frac{1}{\sqrt{-i\tau}}\vartheta_{00}\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)$$

mit dem Hauptwert für die Wurzel. Setzen wir noch

$$q_x = e^{-\frac{\pi^2}{4a^2t^2}}, \qquad q_y = e^{-\frac{\pi^2}{4b^2t^2}}, \qquad q_z = e^{-\frac{\pi^2}{4c^2t^2}},$$

so ergibt sich

$$(73)\quad \begin{cases} f_1 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2at}\left[\vartheta_{00}\left(-\dfrac{x-\xi}{2a}, \dfrac{\pi i}{4a^2t^2}\right) - \vartheta_{00}\left(-\dfrac{x+\xi}{2a}, \dfrac{\pi i}{4a^2t^2}\right)\right] \\ \quad = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2at}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_x^{k^2} e^{-\frac{k(x-\xi)\pi i}{a}} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_x^{k^2} e^{-\frac{k(x+\xi)\pi i}{a}}\right] \\ \quad = \dfrac{\sqrt{\pi}}{at}\sum_{k=1}^{\infty}{}' q_x^{k^2}\left(\cos\dfrac{k\pi(x-\xi)}{a} - \cos\dfrac{k\pi(x+\xi)}{a}\right) \\ \quad = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{at}\sum_{k=1}^{\infty}{}' q_x^{k^2}\sin\dfrac{k\pi x}{a}\sin\dfrac{k\pi\xi}{a}. \end{cases}$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für f_2, f_3, und wir erhalten für K:

$$\mathsf{K} = \frac{4}{abc}\int_0^\infty \frac{1}{t^3}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{k\pi\xi}{a}\cdots\sin\frac{n\pi\zeta}{c}\, e^{-\frac{\pi^2}{4t^2}\left(\frac{k^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)}dt.$$

Hier führen wir $\frac{1}{t^2} = \tau$ als neue Integrationsvariable ein und erhalten

$$\mathsf{K} = \frac{2}{abc}\int_0^\infty \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{4}\tau\left(\frac{k^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)}\sin\frac{k\pi x}{a}\cdots\sin\frac{n\pi\zeta}{c}\,d\tau.$$

Diese Formel ist ein vollwertiger Ersatz für die Entwicklung der Greenschen Funktion nach den Eigenfunktionen:

$$K(x,y,z;\,\xi,\eta,\zeta) = \frac{8}{abc\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{k\pi\xi}{a}\cdots\sin\frac{n\pi\zeta}{c}}{\frac{k^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}},$$

über deren Konvergenz keine befriedigenden Ergebnisse vorliegen.

Als der einfachste Ausdruck für K folgt aus (73) für $\tau = \frac{1}{t^2}$:

$$K = \frac{1}{32abc}\int_0^{\infty}\left\{\left[\vartheta_{00}\left(-\frac{x-\xi}{2a},\frac{\pi i\tau}{4a^2}\right)-\vartheta_{00}\left(-\frac{x+\xi}{2a},\frac{\pi i\tau}{4a^2}\right)\right]\cdots\right.$$
$$\left.\left[\vartheta_{00}\left(-\frac{z-\zeta}{2c},\frac{\pi i\tau}{4c^2}\right)-\vartheta_{00}\left(-\frac{z+\zeta}{2c},\frac{\pi i\tau}{4c^2}\right)\right]\right\}d\tau.$$

9. Die Greensche Funktion für das Innere eines Rechtecks. Das Rechteck R sei achsenparallel, mit einer Ecke im Ursprung und den anderen Ecken $(a, 0)$, $(0, b)$, (a, b). Der Quellpunkt sei (ξ, η), der Aufpunkt (x, y). Ist die gesuchte Greensche Funktion $K(x, y; \xi, \eta)$, so muß K als Funktion von x und y im Innern von R eine Lösung von $\Delta u = 0$ sein, auf dem Rande verschwinden und nur im Punkte (ξ, η) singulär werden wie $-\frac{1}{2\pi}\log r$, wo $r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ ist. Es liegt nun nahe, ähnlich wie im Falle eines Rechtflaches, das zum Rechteck R gehörige Gitter zu konstruieren, den Punkt ξ, η in den Gittergeraden wiederholt zu spiegeln und jeden der so entstehenden Punkte als Quelle oder Senke von der Intensität 1 aufzufassen, je nachdem, ob er aus (ξ, η) durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Spiegelungen in den Gittergeraden entsteht.

Um das Potential X der so entstehenden Massenbelegung zu bilden, könnten wir ähnlich wie vorhin durch Summation einer unendlichen Reihe vorgehen. Es ist jedoch bequemer, unter Heranziehung der Funktionentheorie die zugehörige analytische Funktion $\varphi(x+iy) = X + iY$ zu bilden, deren reeller Teil X ist. Dann muß

$$f(x+iy) = e^{2\pi(X+iY)} = e^{2\pi\varphi(x+iy)}$$

in (ξ, η) und den durch Spiegelungen hervorgehenden Punkten einfache Nullstellen bzw. Pole haben. Man setze nun je vier Rechtecke unseres Gitters zu Rechtecken eines neuen Gitters zusammen. Dann besitzt $f(x+iy)$ in jedem Rechteck des neuen Gitters zwei einfache Nullstellen und zwei einfache Pole, die symmetrisch in bezug auf den Nullpunkt verteilt und bzw. mod $(2a, 2b)$ kongruent sind:

Nullstellen: (ξ, η), $(-\xi, -\eta)$,

Pole: $(-\xi, \eta)$, $(\xi, -\eta)$.

Die einfachste analytische Funktion dieser Art ist die elliptische Funktion, die im Periodenrechteck mit den Ecken $(0,0)$, $(2a,0)$ $(0,2b)$, $(2a,2b)$ die obigen Nullstellen und Pole hat und sich durch die zugehörige σ-Funktion wie folgt darstellen läßt:

$$f(z) = \frac{\sigma(z-\xi-i\eta)\,\sigma(z+\xi+i\eta)}{\sigma(z-\xi+i\eta)\,\sigma(z+\xi-i\eta)},$$

wo

$$\sigma(z) = z \prod_{\omega}{}' \left[\left(1-\frac{z}{2\omega}\right) e^{\frac{z}{2\omega}+\frac{1}{8}\frac{z^2}{\omega^2}}\right], \quad \omega = ka+lbi, \quad \begin{matrix} k=0,\pm 1,\ldots \\ l=0,\pm 1,\ldots \end{matrix}$$

ist[1]). Setzt man in den Ausdruck von $f(z)$ diese Darstellung ein und multipliziert faktorenweise, so ergibt sich, wenn $e^{\frac{\xi\eta i}{\omega^2}} = 1$ für $\omega = 0$ gesetzt wird,

$$f(z) = \prod_{\omega = ka+lbi} \left[\frac{(z+\zeta-2\omega)\,(z-\zeta-2\omega)}{(z+\bar{\zeta}-2\omega)\,(z-\bar{\zeta}-2\omega)}\, e^{\frac{\xi\eta i}{\omega^2}}\right], \quad \begin{matrix} \zeta = \xi+i\eta, \\ \bar{\zeta} = \xi-i\eta; \\ k=0,\pm 1,\ldots, \\ l=0,\pm 1,\ldots. \end{matrix}$$

Hier haben wir nur noch zu verifizieren, daß die Randbedingung erfüllt ist, d. h. daß $f(z)$ auf dem Rande von R den absoluten Betrag 1 hat. Für $z = x = \Re(z)$ hat der Faktor mit $\omega = 0$ bereits den absoluten Betrag 1, und die den übrigen ω entsprechenden Faktoren lassen sich paarweise entsprechend den konjugiert komplexen ω so zusammenfassen, daß der Zähler des einen Paares konjugiert komplex zum Nenner des anderen ist. Für $z = x+ib$ multiplizieren wir zunächst nach l und dann nach k. Im Produkt nach l können wir den Exponentialfaktor $e^{\frac{\xi\eta i}{\omega^2}}$ weglassen, da die Summe $\sum' \frac{1}{\omega^2}$ über l bei festem k absolut konvergiert und einen reellen Wert hat. Die übrigbleibenden Faktoren fassen wir paarweise so zusammen, daß, wenn dem einen Faktor $\omega = ka+lbi$ zugeordnet ist, dem zweiten $\omega = ka-(l-1)bi$ entspricht. Dann sieht man sofort, daß das Produkt eines solchen Paares den absoluten Betrag 1 hat. Für $z = iy$ aber multiplizieren wir zuerst nach l und fassen für $|k| > 0$ je zwei solche Teilprodukte zusammen, die den Werten $\pm k$ entsprechen. Dann können wir wiederum von dem Exponentialfaktor absehen, da $\sum' \frac{1}{\omega^2}$ über l absolut konvergiert und einen reellen Wert hat. Die übrigen Faktoren fassen wir dann paarweise so zusammen, daß dem einen Faktor $\omega = ka+lbi$, dem anderen $\omega = -ka+lbi$ entspricht. Dann besitzt jedes solche Produkt den absoluten Betrag 1. Endlich wird der Fall $z = a+iy$ erledigt, indem man Faktoren zusammenfaßt, die $\omega = ka+lbi$ und $\omega = -(k+1)a+lbi$

[1]) Der Strich am Produktzeichen Π bedeutet hier, daß $\omega = 0$ auszulassen ist.

entsprechen, und dann nach l multipliziert. So ergibt sich für die gesuchte Greensche Funktion die Darstellung

$$K(x,y;\xi,\eta) = -\frac{1}{2\pi}\Re\left(\log\frac{\sigma(z-\zeta,\omega_1,\omega_2)\,\sigma(z+\zeta,\omega_1,\omega_2)}{\sigma(z-\bar{\zeta},\omega_1,\omega_2)\,\sigma(z+\bar{\zeta},\omega_1,\omega_2)}\right)$$

$$(z=x+iy,\ \zeta=\xi+i\eta,\ \bar{\zeta}=\xi-i\eta,\ \omega_1=a,\ \omega_2=ib).$$

Diese soeben konstruierte Greensche Funktion können wir nach den Eigenfunktionen $\frac{2}{\sqrt{ab}}\sin k\frac{\pi}{a}x\sin m\frac{\pi}{b}y$ in eine von einer Umgebung des Quellpunktes abgesehen absolut und gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln, da die Theorie der Fourierschen Reihen die Entwickelbarkeit einer nur mit einer logarithmischen Unstetigkeit behafteten Funktion lehrt. Diese Reihenentwicklung lautet

$$K(x,y;\xi,\eta) = \frac{4}{ab\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\frac{\pi}{a}x\sin m\frac{\pi}{b}y\sin k\frac{\pi}{a}\xi\sin m\frac{\pi}{b}\eta}{\left(\frac{m^2}{b^2}+\frac{k^2}{a^2}\right)}$$

und ist ein Beispiel für die Gültigkeit der allgemein nicht bewiesenen Bilinearformel.

10. Die Greensche Funktion für einen Kreisring. Wir nehmen die beiden begrenzenden Kreise so an, daß ihr Mittelpunkt im Ursprung liegt, das Produkt ihrer Radien gleich 1 ist (was durch eine geeignete Wahl der Längeneinheit zu erreichen ist), und bezeichnen demgemäß den Radius des inneren Kreises k_1 mit $q^{\frac{1}{2}}$, den Radius des äußeren Kreises k_2 mit $q^{-\frac{1}{2}}$, wobei q ein echter Bruch ist. Ist dann c der Quellpunkt, den wir vorläufig als reell annehmen, $z=x+iy$ der Aufpunkt, beide innerhalb des Kreisringes R, so reduziert sich unsere Aufgabe auf das folgende funktionentheoretische Problem: Es ist eine analytische Funktion $f(z)$ zu bestimmen, die in c eine einfache Nullstelle hat, sonst in R regulär ist und auf dem Rande von R den absoluten Betrag 1 hat. Aus $f(z)$ wird dann die gesuchte Greensche Funktion mit dem Quellpunkt c und dem Aufpunkt z nach der Formel zu erhalten sein:

$$K(x,y;\xi,\eta) = -\frac{1}{2\pi}\Re\log f(z).$$

Wir versuchen nun, die gesuchte Funktion $f(z)$ über die beiden Kreise hinaus fortzusetzen, um so hinreichend viele funktionentheoretische Daten zu ihrer Konstruktion zu finden. Zu dem Zwecke ordnen wir jedem Punkt z in R einen Punkt z_1 innerhalb k_1 durch die Gleichung $zz_1=q$ zu. Rückt z gegen die Peripherie von k_1, so ist dasselbe auch mit z_1 der Fall, und zwar rückt dann offenbar z_1 gegen den konjugiert komplexen Punkt. Nun ist aber $f(z)$ wegen der Symmetrie der Annahmen als eine reelle Funktion anzusehen, d. h. eine solche, die in

reellen Punkten reelle Werte und allgemeiner in konjugiert komplexen Punkten konjugiert komplexe Werte annimmt. Daher strebt $f(z)\,f\left(\frac{q}{z}\right)$ gegen einen reellen positiven Wert, wenn z gegen die Peripherie des Kreises k_1 rückt. Andererseits ist aber $f(z)$ auf k_1 vom absoluten Betrag 1. Daher gilt für $f(z)$ auf k_1 die Gleichung

$$f(z)\,f\left(\frac{q}{z}\right) = 1, \tag{74}$$

und diese Gleichung gilt dann identisch für alle z. Ebenso liefert die Spiegelung an k_2 die zweite Funktionalgleichung

$$f(z)\,f\left(\frac{1}{q\,z}\right) = 1. \tag{75}$$

Da $f(z)$ in c eine einfache Nullstelle hat, folgt durch sukzessive Anwendung dieser Relationen, daß $f(z)$ in

$$c, \quad q^{\pm 2}c, \quad q^{\pm 4}c, \ldots$$

einfache Nullstellen und in den Punkten

$$q^{\pm 1}c^{-1}, \quad q^{\pm 3}c^{-1}, \quad q^{\pm 5}c^{-1}, \ldots$$

einfache Pole hat, also in den Nullstellen und Polen mit der Funktion

$$F(z) = \left(1 - \frac{z}{c}\right) \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - q^{2\nu}\frac{z}{c}\right)\left(1 - q^{2\nu}\frac{c}{z}\right)}{\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - q^{2\nu-1}c\,z)\left(1 - q^{2\nu-1}\frac{1}{c\,z}\right)}$$

übereinstimmt. Für diese Funktion $F(z)$ gelten aber folgende Funktionalgleichungen vom Typus (74) und (75):

$$F(z)\,F\left(\frac{q}{z}\right) = 1, \qquad F(z)\,F\left(\frac{1}{q\,z}\right) = \frac{1}{q\,c^2},$$

wie man durch eine einfache Rechnung sofort bestätigt. Daher kann man die Konstanten a, b so bestimmen, daß $a\,z^b F(z)$ den Funktionalgleichungen (74), (75) genügt und auf k_1, k_2 den absoluten Betrag 1 hat, da a, b reelle Konstanten werden. Man erhält die Werte

$$\frac{1}{a} = \pm\sqrt{q}\,q^{\frac{1}{4}}, \quad b = +\frac{1}{2} + \frac{\log c}{\log q}.$$

Wir wählen für a das negative Vorzeichen und erhalten

$$f(z) = q^{\frac{1}{4}} z^{-\frac{\log c}{\log q}} \left(\sqrt{\frac{z}{c}} - \sqrt{\frac{c}{z}}\right) \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - q^{2\nu}\frac{z}{c}\right)\left(1 - q^{2\nu}\frac{c}{z}\right)}{\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - q^{2\nu-1}c\,z)\left(1 - q^{2\nu-1}\frac{1}{c\,z}\right)}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich durch die Thetafunktionen

$$\vartheta_1(z) = -iCq^{\frac{1}{4}}(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z})\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-q^{2\nu}e^{2i\pi z})(1-q^{2\nu}e^{-2i\pi z}),$$

$$\vartheta_0(z) = C\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-q^{2\nu-1}e^{2i\pi z})(1-q^{2\nu-1}e^{-2i\pi z}),$$

mit

$$C = \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-q^{2\nu})$$

ausdrücken. Setzt man $z = e^{2i\pi v}$, $c = e^{2i\pi\alpha}$, so folgt

$$f(z) = iz^{-\frac{2i\pi\alpha}{\log q}}\frac{\vartheta_1(v-\alpha)}{\vartheta_0(v+\alpha)},$$

und der Realteil von $\log f(z)$ verschwindet auf k_1, k_2 natürlich auch für komplexe c innerhalb R, so daß unsere Aufgabe wirklich gelöst ist.

11. Weitere Beispiele für explizit lösbare Fälle der Schwingungsgleichung.

a) Kreissektor. Die Schwingungsgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ für einen in Polarkoordinaten dargestellten Kreissektor $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \vartheta \leqq \alpha$ wird wieder durch den Ansatz $u = f(r)\,g(\vartheta)$ gelöst. Es ergibt sich nach dem Muster von § 7, 5 als System der Eigenfunktionen und Eigenwerte

$$u_n = \sin\frac{n\pi\vartheta}{\alpha}J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\sqrt{\lambda_{n,m}}\,r),$$

wobei als Randbedingung $u = 0$ genommen ist, $J_{\frac{n\pi}{\alpha}}$ die Besselsche Funktion des Index $\frac{n\pi}{\alpha}$ bedeutet (vgl. Kap. VII) und die Zahlen $\lambda_{n,m}$ aus der transzendenten Gleichung $J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\sqrt{\lambda_{n,m}}) = 0$ bestimmt werden müssen.

b) Ellipse. Die Lösung des Eigenwertproblems für die Ellipse ergibt sich durch Einführung elliptischer Koordinaten (s. Kap. IV, § 7, 3). Es wird

$$\Delta T + \lambda T = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial t_2^2}\right) + \lambda T = 0,$$

und der Ansatz $T = U(t_1)\,V(t_2)$ führt auf die Gleichung

$$\frac{U''}{U} - \frac{V''}{V} = -\lambda(\lambda_1 - \lambda_2),$$

die dann und nur dann erfüllt wird, wenn U und V Lösungen der Differentialgleichungen

$$U'' = (\lambda\lambda_1 + \mu)U, \qquad V'' = (\lambda\lambda_2 + \mu)V$$

oder z. B.

$$\frac{d^2U}{d\lambda_1^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1 - e_1} + \frac{1}{\lambda_1 - e_2}\right)\frac{dU}{d\lambda_1} = \frac{-\lambda\lambda_1 + \mu}{(\lambda_1 - e_1)(\lambda_1 - e_2)}U$$

sind.

Setzen wir

$$\frac{2\lambda_1 - e_1 - e_2}{e_1 - e_2} = \mathfrak{Sof}\, u,$$

$$\frac{2\lambda_2 - e_1 - e_2}{e_1 - e_2} = \cos v.$$

so sind u und v reell; es ergeben sich Gleichungen der Form

$$\frac{d^2U}{du^2} = -(\lambda' \mathfrak{Sof}\, u + \mu')\, U,$$

$$\frac{d^2V}{dv^2} = (\lambda' \cos v + \mu')\, V.$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen, die ja durch die Substitution $u = iv$ ineinander übergehen, heißen *Funktionen des elliptischen Zylinders oder Mathieusche Funktionen*[1]).

c) Zyklisches Viereck und Zyklidensechsflach. Alle behandelten speziellen Bereiche, für welche wir die Schwingungsgleichung und die Potentialgleichung durch Zerspaltung lösen konnten, sind Spezialfälle oder Grenzfälle eines Viereckes oder Sechsflaches aus einem konfokalen System von zyklischen Kurven oder Zykliden (vgl. S. 220).

12. Parameter in den Randbedingungen bei partiellen Differentialgleichungen[2]). Wir erwähnen noch kurz, wie man gewisse Randwertprobleme mit Parametern in den Randbedingungen auf Integralgleichungen zurückführen kann. Es sei etwa die Differentialgleichung $\Delta u = 0$ vorgelegt mit folgender Randbedingung auf der regulären Randkurve Γ eines ganz im Endlichen liegenden einfach zusammenhängenden Gebietes G:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u + h(s) = 0,$$

wo n die äußere Normale, λ der Parameter, $h(s)$ eine gegebene Funktion der Bogenlänge s auf Γ bedeutet. Man benutze diejenige Greensche Funktion $\mathsf{K}(x, y; \xi, \eta)$ des Gebietes G, deren Normalableitungen auf dem Rande verschwinden. Dann ergibt die Greensche Formel:

$$u(\xi, \eta) = \int_\Gamma [\lambda u(x, y) + h(s)]\, \mathsf{K}(x, y; \xi, \eta)\, ds.$$

wo der Punkt x, y die Kurve Γ durchläuft. Unter Benutzung der Parameterdarstellung $x = a(s)$, $y = b(s)$ für Γ liefern die Werte von $\mathsf{K}(x, y; \xi, \eta)$ eine symmetrische Funktion $K(s, \sigma)$ von zwei Variablen s, σ:

$$K(s, \sigma) = \mathsf{K}(a(s), b(s); a(\sigma), b(\sigma)).$$

[1]) Vgl. *Whittaker, E. T.* und *G. N. Watson:* A course of modern Analysis. 3. Aufl., S. 404—428. Cambridge 1920.

[2]) Vgl. *Hilbert, D.:* Integralgleichungen, S. 77—81.

Setzt man noch

$$u(a(s), b(s)) = \varphi(s),$$

$$\int_\Gamma K(s, \sigma) h(s)\, ds = f(\sigma),$$

so erhält die obige Relation für u die Gestalt

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_C K(s, \sigma) \varphi(\sigma)\, ds.$$

Da die Bestimmung von u aus $f(s)$ nur die Lösung der ersten Randwertaufgabe erfordert, haben wir nur diese Integralgleichung zu untersuchen, deren Kern nur für $\sigma = s$ logarithmisch unendlich wird, so daß die allgemeine Theorie auf diesen Kern ohne weiteres anwendbar wird.

Analoge Betrachtungen gelten für die allgemeinste sich selbst adjungierte Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.

13. Greensche Tensoren für Differentialgleichungssysteme. Der Gedanke, welcher der Einführung der Greenschen Funktion zugrunde liegt, läßt sich fast ohne Modifikation auf Probleme ausdehnen, bei denen es sich um Systeme von Differentialgleichungen handelt, z. B. um die Bestimmung eines Vektors $\mathfrak{u}: (u_1, u_2, u_3)$ aus einer Differentialgleichung $L[\mathfrak{u}] = -\mathfrak{f}$, wobei $\mathfrak{f}: (f_1, f_2, f_3)$ ein gegebener Vektor ist. Unter einem zu vorgegebenen homogenen Randbedingungen, z. B. $\mathfrak{u} = 0$ gehörigen Greenschen Tensor $\mathfrak{G}$ der Differentialgleichung $L[\mathfrak{u}] = -\mathfrak{f}$ verstehen wir eine Matrix

$$\mathfrak{G}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix}$$

von der Eigenschaft, daß die Differentialgleichung $L[\mathfrak{u}] = -\mathfrak{f}$ mit der Formel

$$\mathfrak{u}(x, y, z) = \iiint \mathfrak{G}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\, \mathfrak{f}(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

äquivalent ist, und daß jeder in dieser Form dargestellte Vektor $\mathfrak{u}$ die Randbedingungen befriedigt. Dabei verstehen wir unter $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ den Vektor, der durch die übliche Multiplikation der Matrix $\mathfrak{G}$ mit dem Vektor $\mathfrak{f}$ entsteht, d. h. den Vektor mit den Komponenten

$$K_{11} f_1 + K_{12} f_2 + K_{13} f_3, \quad K_{21} f_1 + K_{22} f_2 + K_{23} f_3, \quad K_{31} f_1 + K_{32} f_2 + K_{33} f_3.$$

Jede Kolonne des Greenschen Tensors stellt einen Vektor $\mathfrak{k}_i$ dar, der abgesehen vom Punkte $x = \xi;\ y = \eta;\ z = \zeta$ mit seinen Ableitungen stetig ist und der Differentialgleichung $L[\mathfrak{k}_i] = 0$ und den Randbedingungen genügt. Die Art seiner Singularität im Quellpunkte entnimmt man leicht seiner ebenso wie im Falle einer einzelnen Differential-

gleichung bestehenden Bedeutung als Einflußfunktion einer im Quellpunkte $x = \xi;\ y = \eta;\ z = \zeta$ angreifenden Einzelkraft. Der Greensche Tensor genügt den Symmetriebedingungen

$$\mathsf{K}_{ii}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \mathsf{K}_{ii}(\xi, \eta, \zeta; x, y, z),$$
$$\mathsf{K}_{ik}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \mathsf{K}_{ki}(\xi, \eta, \zeta; x, y, z),$$

sobald, wie wir voraussetzen wollen, der Differentialausdruck $L[\mathfrak{u}]$ sich selbst adjungiert ist, d. h. sich durch Variation eines quadratischen Differentialausdruckes im Vektor $\mathfrak{u}$ und seiner ersten Ableitung ergibt. Mit Hilfe des Greenschen Tensors erledigt sich das Eigenwertproblem usw. für die Differentialgleichung $L[\mathfrak{u}] + \lambda\,\mathfrak{u} = 0$ ganz analog wie beim gewöhnlichen Falle[1]).

14. Belastete Orthogonalität und belastete Integralgleichungen. Legt man etwa bei Behandlung der Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichung Randbedingungen zugrunde, die den Parameter λ linear enthalten, so gilt für die Eigenfunktionen dieser Differentialgleichungen, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, nicht mehr die Orthogonalitätsrelation im gewöhnlichen Sinne, sondern eine Relation von der Gestalt

$$q(x_2)\,\varphi_1(x_2)\,\varphi_2(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,dx = 0.$$

Bezeichnet man allgemein den Prozeß $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + q(x_2)\,f(x_2)$, die „belastete Integration", mit dem Symbol $\overline{\int} f(x)\,dx$, so können wir mit Hilfe des so verallgemeinerten Integrationsprozesses die obige Relation in der Form schreiben

$$\overline{\int} \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,dx = 0,$$

durch welche die Analogie der „belasteten Orthogonalität" mit der gewöhnlichen klar hervortritt. Diese Analogie geht sehr weit, sofern $q(x)$ positiv ist, und man kann die wichtigsten Sätze der Theorie der symmetrischen Integralgleichung, insbesondere z. B. die Existenz von Eigenwerten und Eigenfunktionen, den Mercerschen Satz und die Entwicklungssätze auch für „belastete" Integralgleichungen, in denen an die Stelle des gewöhnlichen Integrationszeichens das belastete tritt, ganz analog beweisen, wie in der gewöhnlichen Theorie[2]).

Ausdrücklich sei übrigens darauf hingewiesen, daß das Auftreten eines linearen Parameters λ auch in den Randbedingungen bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung im allgemeinen äquivalent ist

[1]) Vgl. *Hilbert, D.:* Integralgleichungen, S. 206—212.
[2]) Vgl. *Kneser, A.:* Integralgleichungen, S. 117—121.

mit dem Auftreten der zweiten Ableitung in der Randbedingung, da sich die zweite Ableitung und λ vermöge der Differentialgleichung linear durcheinander ausdrücken lassen.

15. Streckenspektrum und Integraldarstellungen[1]**.** Wenn das Grundgebiet des eindimensionalen Eigenwertproblems kontinuierlich ins Unendliche ausgedehnt wird, so können wir erwarten, daß das Spektrum in gewissen Intervallen immer dichter wird und in der Grenze eine ganze endliche oder unendliche Strecke erfüllt. An Stelle der abzählbaren Reihe der Eigenfunktionen tritt jetzt eine von einem Parameter λ abhängige Funktion, wobei dieser Parameter λ kontinuierlich in dem Streckenspektrum S variiert. An Stelle der Entwicklung der willkürlichen Funktion nach den Eigenfunktionen tritt eine Integraldarstellung nach Art des Fourierschen Integrals. Zum einfachsten Beispiel führt uns der Differentialausdruck

$$L[y] = y'' - y$$

für das Intervall $-\infty \leqq x \leqq +\infty$ und die Randbedingungen: y soll für $x \to \pm\infty$ endlich bleiben. Die Greensche Funktion lautet

$$\mp\frac{1}{2} e^{-|x-\xi|};$$

die zugehörige Integralgleichung

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-\xi|}\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

bzw. die Differentialgleichung

$$L[y] + \lambda y = 0$$

besitzt als Streckenspektrum die ganze Halbgerade $\lambda \geqq 1$ und die zugehörigen Eigenfunktionen

$$\sin\sqrt{\lambda - 1}\,x, \qquad \cos\sqrt{\lambda - 1}\,x.$$

Die zugehörige Integraldarstellung ist nichts anders als das Fouriersche Integral (s. Kap. II, § 6).

Als Analogie zum Fourierschen Integral erwähnen wir beispielsweise die zur Besselschen Funktion $J(x) = J_0(x)$ gehörige Integraldarstellung.

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} J(tx)\,t\,dt \int_0^{\infty} \varphi(u)\,J(tu)\,u\,du,$$

auf deren Gültigkeitsbereich wir hier nicht näher eingehen können.

[1]) Vgl. *Weyl, H.:* Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems. Diss. Göttingen 1908. — *Carleman, T.:* Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique. Uppsala Univ. Årsskrift 1923.

16. Verallgemeinerung der Entwicklungssätze für schwingende Saite und schwingenden Stab. Nach dem Vorgang von E. Trefftz[1]) kann man die Gültigkeitsgrenzen der Entwicklungssätze von § 10 für die Eigenfunktionen der Differentialgleichung $y'' + \lambda \varrho y = 0$ wesentlich erweitern, indem man den zugehörigen Kern folgendermaßen zerlegt:

$$K(x, \xi) = \int_0^\pi \left[\sqrt{\varrho(x)}\, \frac{\partial}{\partial t} \mathsf{K}(x, t)\right]\left[\sqrt{\varrho(\xi)}\, \frac{\partial}{\partial t} \mathsf{K}(t, \xi)\right] dt,$$

wo K die Greensche Funktion des Differentialausdruckes y'' bedeutet. Der unsymmetrische Kern $G(x, \xi) = \sqrt{\varrho(x)}\, \frac{\partial}{\partial \xi} \mathsf{K}(x, \xi)$ besitzt ein System von adjungierten Eigenfunktionen (vgl. Kap. III, § 10, 8). Von diesen beiden Systemen ist das eine mit denen von

$$y'' + \lambda \varrho y = 0$$

identisch, und der Entwicklungssatz lehrt uns dann fast unmittelbar die Entwickelbarkeit einer den Randbedingungen genügenden stetigen Funktion $f(x)$, für die $\int_0^\pi [f'(x)]^2 dx$ existiert. Ähnliches gilt auch für die Differentialgleichung des schwingenden Stabes. Einen anderen Beweis für diese verallgemeinerten Entwicklungssätze findet der Leser im nächsten Kapitel.

17. Analytische Fortsetzung der Lösungen der Gleichung $\Delta u + \lambda u = 0$. Ist eine Lösung von $\Delta u + \lambda u = 0$ in einem abgeschlossenen Gebiete G mit geradlinigem Begrenzungsstück l nebst ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetig, und verschwindet auf l die Funktion u bzw. die normale Ableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$, so setzen wir die Funktion u in das aus G durch Spiegelung an l entstehende Gebiet G' fort, indem wir spiegelbildlich entsprechenden Punkten entgegengesetzt gleiche bzw. gleiche Werte von u zuweisen. Dann ist die Gesamtfunktion im Gesamtgebiet $G + G'$ eine mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetige Lösung von $\Delta u + \lambda u = 0$[2]). Ähnliche Sätze gelten für die Plattengleichung $\Delta \Delta u + \lambda u = 0$. Man kann die Voraussetzung des Satzes ähnlich wie beim Spiegelungsprinzip in der Funktionentheorie noch weiter mildern, wozu der Leser die Hilfsmittel an späteren Stellen dieses Buches findet.

18. Ein Satz über die Knotenlinien der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$. *Schneiden sich im Innern eines Gebietes, in welchem u regulär*[3]) *ist, mehrere*

[1]) *Trefftz, E.:* Schwingungsprobleme und Integralgleichungen. Math. Ann. Bd. 87, S. 307—314. 1922.

[2]) Vgl. *Courant, R.:* Beweis des Satzes usw. Math. Zeitschrift Bd. 1, S. 321—328. 1918.

[3]) Es ist nicht schwer zu sehen, daß jede mit ihrer Ableitung stetige Lösung u eine reguläre analytische Funktion von x und y ist (vgl. auch Bd. II).

Äste der Kurve $u = 0$, so bilden in diesem Schnittpunkt die sämtlichen dort zusammentreffenden Knotenlinien ein gleichwinkliges Strahlensystem miteinander. Man beweise diesen Satz, indem man die Funktion u an der betreffenden Stelle in eine Potenzreihe entwickeln.

19. Beispiel für einen Eigenwert unendlich hoher Ordnung. Wir betrachten ein beliebiges ebenes Gebiet G, z. B. einen Kreis, und für diesen die Eigenwertaufgabe von $\Delta\Delta u - \lambda u = 0$ mit den Randbedingungen $\Delta u = 0$ $\frac{\partial}{\partial n}\Delta u = 0$. Wir erhalten leicht unendlich viele Eigenwerte λ_h und Eigenfunktionen u_h dieses Problems, indem wir beachten, daß die Funktionen $\Delta u_h = v_h$ Eigenfunktionen der eingespannten Platte sein müssen, sofern nicht etwa Δu_h identisch Null ist. So gelangen wir zu Eigenwerten, die mit denen der eingespannten Platte übereinstimmen, und zu denen noch Null als Eigenwert von unendlicher Vielfachheit hinzutritt. Für $\lambda = 0$ genügt nämlich jede der unendlich vielen linear voneinander unabhängigen in G regulären Potentialfunktionen der Gleichung $\Delta\Delta u + \lambda u = 0$ bei den vorgegebenen Randbedingungen.

20. Grenzen für die Gültigkeit der Entwicklungssätze. Für unsere Entwicklungssätze nach den Eigenfunktionen der Differentialgleichung

$$L[u] + \lambda \varrho u = 0$$

hatten wir als Voraussetzung immer $\varrho > 0$ zugrunde gelegt. Daß diese Voraussetzung wesentlich ist, zeigt folgendes Beispiel: Es sei in der Differentialgleichung $y'' + \lambda \varrho y$ für ein beliebiges Teilintervall des Grundgebietes $\varrho = 0$. Dann muß jede Eigenfunktion in diesem Teilintervall linear sein; mithin kann der Entwicklungssatz nicht für „willkürliche" Funktionen gelten.

Literatur zum fünften Kapitel.

Bôcher, M.: Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie. Leipzig 1894. — Leçons sur les méthodes de Sturm. Paris 1917.

Courant, R.: Zur Theorie der kleinen Schwingungen. Zeitschr. für angew. Math. u. Mech. Bd. 2, S. 278—285. 1922.

Hilbert, D: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig und Berlin 1912.

Hort, W.: Technische Schwingungslehre. 2. Aufl. Berlin 1922.

Kneser, A.: Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. 2. Aufl. Braunschweig 1922.

Pockels, F.: Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik. Leipzig 1891.

Rayleigh, J. W.: The Theory of Sound, 2 Bde. London 1894, 1896.

Riemann, B. und *K. Hattendorf:* Schwere, Elektrizität und Magnetismus. Hannover 1880.

Weber, H.: Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. 2 Bde. 4. Aufl. Braunschweig 1900, 1901. 5. Aufl. Braunschweig 1910, 1912.

Whittaker, E. T. und *G. N. Watson:* A course of Modern Analysis. 3. Aufl. Cambridge 1920.

Sechstes Kapitel.

Anwendung der Variationsrechnung auf die Eigenwertprobleme.

Schon im vorigen Kapitel haben wir auf den engen Zusammenhang zwischen dem Eigenwertproblem einer Differentialgleichung und dem einer quadratischen Form hingewiesen. Die Eigenwertprobleme unserer Differentialgleichungen sind geradezu äquivalent mit dem Problem der Hauptachsentransformation einer quadratischen Form, allerdings einer von unendlich vielen Variablen. Bedeutet nämlich z.B. $U = \frac{1}{2}\int_0^\pi p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$, $T = \frac{1}{2}\int_0^\pi \varrho\, \dot{u}^2\, dx$ die potentielle bzw. die kinetische Energie eines eindimensionalen Kontinuums, so brauchen wir nur den Ansatz $u = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(t) \sin \nu x$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ zu machen, p und ϱ in eine Fouriersche Reihe entwickelt zu denken und die beiden Ausdrücke U und T als quadratische Formen der unendlich vielen Variablen f_ν bzw. $\dot{f}_\nu$ zu betrachten. Wenn es gelingt, eine solche orthogonale Substitution

$$f_\nu = \sum_{\mu=1}^{\infty} t_{\nu\mu}\, q_\mu \quad \text{bzw.} \quad \dot{f}_\nu = \sum_{\mu=1}^{\infty} t_{\nu\mu}\, \dot{q}_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

dieser Variablen in neue q_μ bzw. $\dot{q}_\mu$ so zu bestimmen, daß dabei die Formen U und T in die Gestalt

$$T = \sum_{\nu=1}^{\infty} \dot{q}_\nu^2, \qquad U = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu\, q_\nu^2$$

übergehen, so werden die Zahlen λ_ν gerade die Eigenwerte unseres Schwingungsproblems. Da nun die Eigenwerte einer quadratischen Form durch einfache Extremaleigenschaften charakterisiert sind, so liegt es nahe, diese Charakterisierung auch hier in Betracht zu ziehen, wo es sich nicht mehr um endlich viele Variable handelt. Anstatt aber die Grenzübergänge und Konvergenzuntersuchungen durchzuführen, die zu einer strengen Begründung dieser heuristischen Gedanken erforderlich wären, ziehen wir es vor, ohne einen Übergang zu einer Darstellung

durch Koordinaten mit Hilfe der allgemeinen Methoden der Variationsrechnung die fraglichen Extremumseigenschaften direkt zu formulieren und auszunutzen.

§ 1. Die Extremumseigenschaften der Eigenwerte.

1. Die klassischen Extremumseigenschaften. Wir betrachten als typisches Beispiel das Eigenwertproblem einer sich selbst adjungierten partiellen Differentialgleichung

$$(1) \qquad L[u]+\lambda\varrho u=(pu_x)_x+(pu_y)_y-qu+\lambda\varrho u=0\,,\quad (p>0\,,\ \varrho>0)$$

wobei wir zwei unabhängige Veränderliche x, y annehmen und das Grundgebiet G von einer oder mehreren stückweise stetigen Kurven Γ mit stückweise stetiger Tangente begrenzt denken. Die Randbedingung möge die Form $u=0$ oder die allgemeinere Form $\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u=0$ haben, wobei σ eine stückweise stetige Funktion des Ortes auf dem Rande Γ sei und $\frac{\partial}{\partial n}$ Differentiation nach der äußeren Normalen bedeute. Wir betrachten nun im Falle der Randbedingung $u=0$ das folgende Variationsproblem (vgl. Kap. IV, S. 181):

$$(2) \qquad D[\varphi]=\iint_G (p(\varphi_x^2+\varphi_y^2)+q\varphi^2)\,dx\,dy$$

soll zum Minimum gemacht werden, während

$$(3) \qquad \iint_G \varrho\varphi^2\,dx\,dy=1$$

ist und zur Konkurrenz alle in G mit Einschluß des Randes stetigen und mit stückweise stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung versehenen Funktionen $\varphi(x,y)$ zugelassen werden, für welche auf dem Rande $\varphi=0$ ist.

Für die allgemeinere Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u=0$ betrachten wir das Variationsproblem

$$(4) \qquad \mathfrak{D}[\varphi]=D[\varphi]+\int_\Gamma p\sigma\varphi^2\,ds=\text{Min.}$$

ohne Randbedingung, wobei im übrigen für die zugelassenen Funktionen dasselbe wie oben gelten soll.

Wir werden in unseren späteren Rechnungen außer den soeben eingeführten Abkürzungen $D[\varphi]$, $\mathfrak{D}[\varphi]$ noch die Bezeichnungen

$$(5) \qquad D[\varphi,\psi]=\iint_G (p(\varphi_x\psi_x+\varphi_y\psi_y)+q\varphi\psi)\,dx\,dy\,,$$

$$(6) \qquad \mathfrak{D}[\varphi,\psi]=D[\varphi,\psi]+\int_\Gamma p\sigma\varphi\psi\,ds$$

und die daraus folgende Identität

$$\mathfrak{D}[\varphi+\psi] = \mathfrak{D}[\varphi] + 2\mathfrak{D}[\varphi,\psi] + \mathfrak{D}[\psi] \tag{7}$$

benutzen. Dieselben Abkürzungen werden wir bei der Betrachtung von Differentialgleichungen mit einer oder mehr als zwei unabhängigen Variablen für die entsprechenden Integrale gebrauchen.

Nach den Regeln der Variationsrechnung aus Kap. IV, § 6, 1 muß die Lösung $\varphi = u_1$ dieses Problems — falls sie existiert — für einen passenden konstanten Wert λ_1 der Differentialgleichung

$$L[u_1] + \lambda_1 \varrho u_1 = 0$$

und der Randbedingung $u = 0$ bzw. der sich als natürliche Randbedingung ergebenden Gleichung $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ genügen. Sie ist also Eigenfunktion unseres Eigenwertproblems und soll durch die Forderung

$$\iint_G \varrho u^2 \, dx\, dy = 1$$

festgelegt werden. Modifiziert man nun das Variationsproblem, indem man als weitere Nebenbedingung für die zur Konkurrenz zuzulassenden Funktionen die Forderung

$$\iint_G \varrho \varphi u_1 \, dx\, dy = 0 \tag{8}$$

hinzufügt, so muß die Lösung $\varphi = u_2$, wenn sie existiert, einer Gleichung der Form

$$L[u_2] + \lambda_2 \varrho u_2 + \mu \varrho u_1 = 0$$

genügen, wobei λ_2 und μ Konstante sind. Die Nebenbedingung $u = 0$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ wird auch von u_2 erfüllt. Indem wir mit u_1 multiplizieren, sodann über G integrieren, die Greensche Formel

$$\iint_G (u_1 L[u_2] - u_2 L[u_1]) \, dx\, dy = \int_\Gamma p \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) ds$$

anwenden und die Randbedingungen beachten, erhalten wir unmittelbar $\mu \iint_G \varrho u_1^2 \, dx\, dy = 0$. Mithin ist $\mu = 0$, und u_2 genügt der Gleichung $L[u_2] + \lambda_2 \varrho u_2 = 0$; es ist also λ_2 ein weiterer Eigenwert, u_2 eine zugehörige Eigenfunktion. Indem wir so fortfahren, können wir einen Eigenwert λ_3 und eine zugehörige Eigenfunktion u_3 definieren und allgemein einen n^{ten} Eigenwert und eine zugehörige Eigenfunktion durch

unser obiges Variationsproblem charakterisieren, wobei die $n-1$ Bedingungen

$$\iint_G \varrho \varphi u_i \, dx\, dy = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{9}$$

hinzugefügt sind.

Die Eigenwerte λ_n sind gerade die Minimalwerte $\mathfrak{D}[u_n]$ des Integralausdruckes $\mathfrak{D}[\varphi]$, wie man sofort auf Grund der Greenschen Umformung

$$D[\varphi] = -\iint_G \varphi L[\varphi]\, dx\, dy + \int_\Gamma p \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

und der Randbedingungen erkennt. Da beim n^{ten} unserer Minimumprobleme der Bereich der konkurrenzfähigen Funktionen φ gegenüber dem $(n-1)^{\text{ten}}$ Probleme weiter eingeschränkt ist, so müssen unsere Eigenwerte der Relation

$$\lambda_{n-1} \leqq \lambda_n \tag{10}$$

genügen.

Daß die so definierten Eigenwerte und Eigenfunktionen das vollständige zu unserem Eigenwertproblem gehörige System darstellen, wird sich im nächsten Paragraphen (§ 2, 3) ganz von selbst ergeben, da wir dort zeigen werden, daß die Funktionen $\sqrt{\varrho}\, u_1$, $\sqrt{\varrho}\, u_2$, ... ein vollständiges orthogonales Funktionensystem für das Gebiet G bilden.

Um die Theorie der Eigenwerte und Eigenfunktionen völlig auf die hier angegebenen Minimumeigenschaften stützen zu können, müssen wir noch den Nachweis erbringen, daß unsere Minimumprobleme tatsächlich Lösungen besitzen. Wir werden diesen Nachweis im zweiten Bande im Rahmen der direkten Methoden der Variationsrechnung nachholen und wollen an dieser Stelle die Lösbarkeit der betreffenden Minimumprobleme postulieren.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, daß wir in genau entsprechender Weise auch alle anderen Eigenwertprobleme des vorigen Kapitels in die Variationsrechnung einordnen können. Es ist ganz gleichgültig, ob es sich um mehrfache Integrale oder einfache handelt und ob die zugehörigen Eulerschen Differentialgleichungen von zweiter oder höherer Ordnung werden. Z. B. gehört das Eigenwertproblem der Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichung

$$(py')' - qy + \lambda \varrho y = 0$$

mit den Randbedingungen $y(0) = 0$, $y'(\pi) + h y(\pi) = 0$ zu einem Variationsproblem der Form

$$\mathfrak{D}[y] = \int_0^\pi (py'^2 + qy^2)\, dx + h\, p(\pi)\, y(\pi)^2 = \text{Min.}$$

mit der Nebenbedingung $y(0) = 0$. Ähnliches gilt für die Randbedingungen $y'(0) - h_1 y(0) = 0$, $y'(\pi) + h_2 y(\pi) = 0$.

2. Die Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte. Ebenso wie in Kap. I bei den quadratischen Formen können wir die hier gegebene rekurrente Definition des n^{ten} Eigenwertes und der zugehörigen Eigenfunktion durch eine indepedente Definition ersetzen, bei der man zur Charakterisierung des n^{ten} Eigenwertes und der n^{ten} Eigenfunktion die Kenntnis der vorangehenden nicht vorauszusetzen braucht.

Wir betrachten irgend eines der bisher untersuchten Variationsprobleme, etwa das zweidimensionale zur Differentialgleichung (1) gehörige, und modifizieren es dadurch, daß wir der Funktion φ statt der Bedingungen (9) die $n-1$ veränderten Bedingungen

$$\iint_G \varrho \varphi v_i \, dx\, dy = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{11}$$

auferlegen, wobei $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ irgendwie gewählte, in G stückweise stetige Funktionen sind. Ob und wann das so entstehende Variationsproblem eine Lösung besitzt, bleibe dahingestellt. Jedenfalls aber werden die Integrale $D[\varphi]$ oder allgemeiner die Ausdrücke $\mathfrak{D}[\varphi]$ unter den gestellten Bedingungen eine *untere Grenze* besitzen, welche von den Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ abhängig ist und mit $d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ bezeichnet werden soll. Wir können nun leicht folgende Tatsache beweisen: *Die untere Grenze $d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ des modifizierten Variationsproblems ist höchstens gleich dem Minimum λ_n bei dem ursprünglichen Variationsproblem, d. h. es gilt*

$$d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\} \leqq \lambda_n = d\{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}\}. \tag{12}$$

Zum Beweise bilden wir aus den ersten n Eigenfunktionen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des Eigenwertproblems mit n Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ eine lineare Kombination

$$\varphi = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n,$$

welche den $n-1$ Bedingungen (11) und der Bedingung

$$\iint_G \varrho \varphi^2 \, dx\, dy = 1 \tag{13}$$

genügt. Die Bedingungen (11) stellen $n-1$ homogene lineare Gleichungen für die n Größen c_i dar, während die Relation (13) wegen der Orthogonalität der Funktionen u_i gleichbedeutend ist mit

$$c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2 = 1. \tag{14}$$

Die Bestimmung der c_i ist somit stets mindestens auf eine Art möglich. Die so gebildete Funktion φ genügt überall auf dem Rande Γ von G

ebenso wie die Eigenfunktionen den gestellten Randbedingungen. Sie ist also im Variationsproblem konkurrenzfähig.

Aus der Greenschen Formel Kap. IV, (88) folgt, wenn wir für f, φ zwei verschiedene Eigenfunktionen u_i, u_k einsetzen

$$\mathfrak{J}[u_i, u_k] = D[u_i, u_k] + \int_\Gamma p\,\sigma\,u_i u_k\,ds = 0$$

Mithin wird

$$\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \int_\Gamma p\,\sigma\,\varphi^2\,ds = c_1^2\lambda_1 + c_2^2\lambda_2 + \cdots + c_n^2\lambda_n,$$

also ist wegen (14) und wegen $\lambda_i \leqq \lambda_{i+1}$

$$\mathfrak{D}[\varphi] \leqq \lambda_n.$$

Damit ist bewiesen, daß bei vorgegebenen Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ der Ausdruck $\mathfrak{D}[\varphi]$ Werte annehmen kann, die jedenfalls nicht größer als λ_n sind, und daß somit auch die untere Grenze $d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ dieser Werte nicht größer als λ_n ist. Da für $v_1 = u_1, \ldots, v_{n-1} = u_{n-1}$ diese untere Grenze gerade gleich λ_n wird, wie wir oben sahen, so erhalten wir das folgende grundlegende Resultat, welches die gesuchte independente Definition des n^{ten} Eigenwertes darstellt:

Satz: *Sind $n-1$ in G stückweise stetige Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ gegeben, so sei $d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ das Minimum bzw. die untere Grenze aller Werte, welche der Ausdruck*

$$\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \int_\Gamma p\,\sigma\,\varphi^2\,ds$$

annehmen kann, wenn φ irgend eine in G stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion ist, welche den Bedingungen

$$\iint_G \varrho\,\varphi\,v_i\,dx\,dy = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

$$\iint_G \varrho\,\varphi^2\,dx\,dy = 1$$

sowie einer der betrachteten Randbedingungen genügt. Dann ist der n^{te} Eigenwert λ_n der Differentialgleichung $L[u] + \lambda\varrho u = 0$ für das Gebiet G und die betreffende Randbedingung gleich dem größten Wert, den diese untere Grenze annehmen kann, wenn für $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ alle zulässigen Funktionensysteme in Betracht gezogen werden. Dieses Maximum-Minimum wird erreicht für $v_1 = u_1, \ldots, v_{n-1} = u_{n-1}$; $\varphi = u_n$.

Von der Randbedingung $\varphi = 0$ abgesehen, dürfen die Randbedingungen in dem Variationsproblem fortgelassen werden.

Das Resultat dieses Paragraphen ist unabhängig davon, ob das Gebiet G aus einem einzigen in sich zusammenhängenden Stück besteht.

Es darf auch G aus einer Reihe von getrennten Gebieten $G', G'', G''', \ldots$ gebildet sein, welche ihrerseits keine inneren Punkte gemein haben, wohl aber gemeinsame Randpunkte besitzen dürfen. Als Eigenwerte und Eigenfunktionen von G sind dann einfach die entsprechenden *Eigenwerte und Eigenfunktionen der Teilgebiete* $G', G'', G''', \ldots$ *zusammengenommen* anzusehen, wobei jede dieser Eigenfunktionen immer nur im zugehörigen Gebiet $G^{(i)}$ von Null verschieden ist und außerhalb als identisch Null fortgesetzt wird.

Physikalisch bedeutet dies die selbstverständliche Tatsache, daß bei einem Schwingungsvorgang, der mehrere voneinander getrennte Gebilde erfaßt, diese Gebilde unabhängig voneinander schwingen.

Ferner sei noch bemerkt, daß sich die hier dargelegte Maximum-Minimum-Eigenschaft genau analog für *sich selbst adjungierte Differentialgleichungen höherer Ordnung,* z. B. die *Differentialgleichung der schwingenden Platte*

$$\Delta\Delta u - \lambda u = 0 \tag{15}$$

herleiten läßt.

3. Bemerkungen über das Auftreten negativer Eigenwerte. Wenn in den obigen Variationsproblemen die Funktion σ bzw. die Zahlen h_1, h_2 nicht negativ sind und dasselbe von q gilt[1]), so ist von vornherein klar, daß kein Eigenwert negativ sein kann. Ist die Funktion σ oder q nicht durchweg positiv, so läßt sich ebenfalls eine untere Schranke für die Werte von $\mathfrak{D}[\varphi]$, somit also auch für die Eigenwerte angeben. Wir nehmen zunächst an, daß nur q negativer Werte fähig sei. Dann ist

$$\left|\iint_G q\varphi^2\,dx\,dy\right| \leqq \frac{q_M}{\varrho_m}\iint_G \varrho\varphi^2\,dx\,dy = \frac{q_M}{\varrho_m},$$

wobei q_M das Maximum des absoluten Betrages von q und ϱ_m das Minimum von ϱ bedeutet. Es ist also

$$D[\varphi] \geqq \iint_G p(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\,dx\,dy - \frac{q_M}{\varrho_m} \geqq -\frac{q_M}{\varrho_m}.$$

Nehmen wir nun das im nächsten Paragraphen zu beweisende Resultat vorweg, *daß nur endlich viele Eigenwerte Beträge unterhalb einer gegebenen Grenze haben können,* so folgt, *daß auch bei nicht durchweg positivem q höchstens endlich viele negative Eigenwerte auftreten können. Dasselbe gilt auch, wenn die Funktion σ oder die Konstanten h_1, h_2 negative Werte annehmen können.* Um dies einzusehen, betrachten wir der Kürze halber den Fall eines eindimensionalen Problems und schätzen die vom Rande herrührenden Bestandteile folgendermaßen ab: Es ist

$$|y(0) - y(\xi)| = \left|\int_0^\xi y'\,dx\right|,$$

[1]) Die Funktion p wird ebenso wie ϱ stets als nicht negativ vorausgesetzt.

wenn ξ eine Stelle im Intervall $0 \leqq x \leqq t$ bedeutet und über den Wert von t mit der Einschränkung $0 \leqq t \leqq \pi$ noch verfügt werden soll. Also gilt zufolge der Schwarzschen Ungleichung:

$$|y(0) - y(\xi)| \leqq \sqrt{t} \sqrt{\int_0^\pi y'^2 \, dx}$$

und somit, wenn p_m das Minimum von $p \neq 0$ bedeutet,

$$|y(0)| \leqq |y(\xi)| + \sqrt{\frac{t}{p_m}} \sqrt{\int_0^\pi p y'^2 \, dx}.$$

Wenn nun die Bedingung $\int_0^\pi \varrho y^2 \, dx = 1$ besteht, so gibt es einen Zwischenwert ξ, so daß $y(\xi)^2 \leqq \frac{1}{t \varrho_m}$ ist. Also ist

$$|y(0)| \leqq \frac{1}{\sqrt{t \varrho_m}} + \sqrt{\frac{t}{p_m}} \sqrt{\int_0^\pi p y'^2 \, dx}.$$

Nunmehr verfügen wir über t gemäß der Forderung

$$\frac{1}{t} = \sqrt{\int_0^\pi p y'^2 \, dx}.$$

Sobald das Integral unter der Wurzel oberhalb der festen Schranke $\frac{1}{\pi^2}$ liegt, was wir zunächst voraussetzen, wird t in das Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ fallen. Dann wird

$$y(0)^2 \leqq c \sqrt{\int_0^\pi p y'^2 \, dx},$$

wobei c eine von $y(x)$ unabhängige Konstante ist. Hieraus ergibt sich sofort für jede zulässige Funktion y, da auch für $y(\pi)$ eine analoge Abschätzung besteht, die Gültigkeit der wichtigen Beziehung

$$h_1 y(0)^2 + h_2 y(\pi)^2 \leqq C_1 \sqrt{\left|\int_0^\pi (p y'^2 + q y^2) \, dx\right|} + C_2, \tag{16}$$

wobei C_1, C_2 geeignete Konstanten sind. Sobald also $\mathfrak{D}[y]$ einen hinreichend großen absoluten Betrag hat, muß das Integral

$$D[y] = \int_0^\pi (p y'^2 + q y^2) \, dx$$

die Randglieder derart überwiegen, daß die Summe $\mathfrak{D}[y]$ positiv ist. Mithin kann es auch hier nur endlich viele negative Eigenwerte geben. Ganz

analog gilt für zweidimensionale Probleme eine Abschätzung der Form

$$\left|\int_r p\sigma\varphi^2 ds\right| \leqq c_1\sqrt{|D[\varphi]|} + c_2\,, \tag{17}$$

und aus dieser Abschätzung ergeben sich dieselben Folgerungen über den wesentlich positiven Charakter der Eigenwerte[1]).

§ 2. Allgemeine Folgerungen aus den Extremumseigenschaften der Eigenwerte.

1. Allgemeine Sätze. Die Fruchtbarkeit der Resultate des vorangehenden Paragraphen beruht darauf, daß man die Maximum-Minimum-Eigenschaft mit der einfachen Tatsache der Variationsrechnung in Zusammenhang bringen kann, daß durch Verschärfung der Bedingungen in einem Minimumproblem der Wert des Minimums vergrößert, jedenfalls nicht verkleinert wird und daß umgekehrt bei Milderung der Bedingungen das Minimum fällt, jedenfalls nicht wächst.

Für die Schwingungsvorgänge der Physik können wir aus diesem Prinzip unmittelbar eine bedeutsame Folgerung ziehen. Wir betrachten irgend ein schwingungsfähiges System, dessen Eigenschwingungen durch ein Eigenwertproblem der hier behandelten Art charakterisiert werden, wobei an Stelle der sich selbst adjungierten partiellen elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung auch eine solche höherer Ordnung oder ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen treten darf. Dann beachten wir, daß irgend welche Zwangsbedingungen, unter denen das System seine Schwingungen auszuführen genötigt wird, sich mathematisch als Nebenbedingungen für die in dem Variationsproblem auftretenden Konkurrenzfunktionen φ äußern. Werden in dem Maximum-Minimumproblem die Bedingungen für φ verschärft, so wird jedesmal bei festgehaltenem System der Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ die untere Grenze $d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ vergrößert oder jedenfalls nicht verkleinert, mithin gilt dasselbe für das Maximum dieser unteren Grenzen, den n^{ten} Eigenwert. Entsprechend wird der Wert des Maximum-Minimums, d. h. der n^{te} Eigenwert verkleinert oder jedenfalls nicht vergrößert, wenn die Bedingungen für die Funktionen φ gemildert werden.

Physikalisch besagt dies:

Satz 1: *Wird ein schwingungsfähiges System gezwungen, unter Zwangsbedingungen zu schwingen, so ändern sich der Grundton und jeder Oberton nie anders als in steigendem Sinne. Werden umgekehrt Bedingungen, unter denen ein System schwingt, aufgehoben, so ändern sich der Grundton und jeder Oberton nie anders als in abnehmendem Sinne.*

[1]) Vgl. *Courant, R.:* Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Math. Zeitschr. Bd. 7, S. 1—57. 1920; insbesondere S. 13—17.

Beispielsweise muß sich bei einer *eingespannten schwingenden elastischen Membran* der Grundton und sämtliche Obertöne in dem angegebenen wachsenden Sinne ändern, wenn die Membran außer am Rande noch sonst an Linien- oder Flächenstücken festgehalten wird. Dagegen werden sich der Grundton und alle Obertöne bei einer Membran in fallendem Sinne ändern, wenn sie einen Riß erhält, oder bei einer *schwingenden Platte*, wenn das Material einen „*Sprung*" bekommt. Im letzteren Falle werden nämlich für die Konkurrenzfunktionen φ bzw. für deren Ableitungen an der Stelle des Risses oder Sprunges die Bedingungen der Stetigkeit aufgehoben[1]).

Mathematisch ergeben sich aus unserem Prinzip eine Reihe von wichtigen *allgemeinen Sätzen über die Eigenwertverteilung* bei den betrachteten Randwertaufgaben. Der erste Satz bezieht sich auf die Randbedingung $u = 0$ und vergleicht die Eigenwertverteilung eines Gebietes G mit der von Teilgebieten. Der zweite Satz leistet das Entsprechende für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Die weiteren Sätze beziehen sich auf die allgemeineren Randbedingungen und vergleichen die Spektra[2]) der Differentialgleichung für verschiedene Formen dieser Randbedingungen.

Satz 2: *Es seien $G', G'', G''', \ldots$ eine Anzahl von Teilgebieten des Gebietes G, welche keine gemeinsamen inneren Punkte haben. Dann ist die Anzahl $A(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung $L[u] + \lambda \varrho u = 0$ für das Gebiet G bei der Randbedingung $u = 0$ mindestens so groß wie die gesamte Anzahl der unter derselben Grenze gelegenen Eigenwerte der Teilgebiete $G^{(i)}$ bei derselben Randbedingung.*

Dieser Satz läßt sich auch so aussprechen: *Bei der Randbedingung $u = 0$ ist der n^{te} Eigenwert λ_n des Gebietes G höchstens gleich der n^{ten} Zahl λ_n^* aus der Gesamtmenge der nach steigender Größe geordneten, in ihrer richtigen Vielfachheit gezählten Eigenwerte der Teilgebiete $G^{(i)}$.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus folgender Überlegung. Legt man in dem Maximum-Minimumproblem, welches den Eigenwert λ_n definiert, den Funktionen φ die neue Bedingung auf, an allen Rändern der Teilgebiete $G^{(i)}$ und in dem ganzen, zu keinem der $G^{(i)}$ gehörigen Teile von G zu verschwinden, so wird einerseits dem oben formulierten Grundprinzip zufolge der Wert des Maximum-Minimums vergrößert, jedenfalls nicht verkleinert. Andererseits ist das neu entstehende Maximum-Minimumproblem gerade dasjenige, welches den n^{ten} Eigenwert des aus den getrennten Gebieten $G', G'', \ldots$ bestehenden Gebietes definiert, d. h. der neue Wert des Maximum-Minimums ist gleich λ_n^*, und somit gilt $\lambda_n \leqq \lambda_n^*$, wie behauptet wurde.

---

[1]) Hiermit scheint die bekannte Tatsache zusammenzuhängen, daß z. B. ein Porzellanteller, welcher einen „Sprung" erhält, seinen ursprünglichen Klang verliert und dumpf klirrt.

[2]) Vgl. die Fußnote [2]) der nächsten Seite.

Insbesondere ergibt sich aus dem bewiesenen Satze eine wichtige Eigenschaft der zur Randbedingung $u = 0$ gehörigen Eigenwerte λ_n, die man zweckmäßig als die *Eigenschaft der Monotonie* bezeichnen kann.

Satz 3: *Der zur Randbedingung $u = 0$ gehörige n^{te} Eigenwert eines Gebietes G ist nie größer als der zur selben Randbedingung gehörige n^{te} Eigenwert eines Teilgebietes*[1]).

Der in Satz 2 ausgesprochenen Tatsache steht für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ eine entsprechende gegenüber:

Satz 4: *Es seien G', G'', G''', ... eine endliche Anzahl von Teilgebieten, welche das Gebiet G lückenlos ausfüllen. Dann ist die Anzahl $B(\varkappa)$ der unterhalb einer Grenze $\varkappa$ gelegenen, zur Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ gehörigen Eigenwerte der Differentialgleichung $L[u] + \lambda \varrho u = 0$ für das Gebiet G kleiner oder höchstens gleich der gesamten Anzahl der zur selben Randbedingung gehörigen, unter derselben Grenze $\varkappa$ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung für die Teilgebiete $G^{(i)}$.*

Man kann diesen Satz auch folgendermaßen aussprechen: *Es sei $\varkappa_n^*$ die n^{te} der nach wachsender Größe geordneten Zahlen aus der Gesamtmenge der zu den Teilgebieten $G^{(i)}$ und der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ gehörigen Eigenwerte, wobei jeder mit der richtigen Vielfachheit zu zählen ist, dann ist der n^{te} Eigenwert $\varkappa_n$ des Gebietes G für dieselbe Randbedingung größer oder gleich der Zahl $\varkappa_n^*$.*

Auch hier folgt der Beweis fast unmittelbar durch Anwendung unseres allgemeinen Prinzips auf das Maximum-Minimumproblem, welches den n^{ten} Eigenwert $\varkappa_n$ von G charakterisiert. Denn wenn wir in diesem Problem den zur Konkurrenz zuzulassenden Funktionen φ gestatten, auf den in G verlaufenden Randlinien der Gebiete $G^{(i)}$ derart unstetig zu sein, daß sie beim Überschreiten dieser Linien endliche Sprünge machen, so wird durch diese Milderung der Bedingungen der Wert des Maximum-Minimums verkleinert oder jedenfalls nicht vergrößert. Andererseits definiert das modifizierte Maximum-Minimumproblem nach § 1, S. 326 gerade den n^{ten} zur natürlichen Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ gehörigen Eigenwert des Gebietes, welches aus den getrennten Gebieten $G^{(i)}$ besteht, d. h. den Wert $\varkappa_n^*$. Hiermit ist die Relation $\varkappa_n \geqq \varkappa_n^*$ bewiesen.

Die nachfolgenden Sätze geben Aufschluß über das *gegenseitige Verhältnis der Spektren*[2]) der Differentialgleichung *bei den verschiedenen Arten der vorkommenden Randbedingungen.*

---

[1]) Er ist sogar stets kleiner, wenn es sich um ein echtes Teilgebiet handelt, wie man mittels der Schlußweise von § 5 leicht feststellen kann.

[2]) Unter Spektrum verstehen wir, wie früher, die Gesamtheit der Eigenwerte.

Satz 5: *Es sei λ_n der n^{te} zur Randbedingung $u = 0$ gehörige Eigenwert der Differentialgleichung $L[u] + \lambda \varrho u = 0$ für das Gebiet G, $\varkappa_n$ der n^{te} Eigenwert für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, schließlich μ_n der n^{te} Eigenwert für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ oder allgemeiner $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ auf einem Teile Γ' des Randes Γ, $u = 0$ auf dem übrigen Teile Γ'' des Randes. Dann ist stets*

$$\mu_n \leqq \lambda_n$$

und bei nicht negativem σ

$$\varkappa_n \leqq \mu_n .$$

Mit anderen Worten besagt der Satz, daß *unter den betrachteten Randbedingungen $u = 0$ die schärfste und, wenn σ nicht negativ wird, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ die mildeste ist.*

Der eine Teil des Satzes, nämlich die Beziehung $\varkappa_n \leqq \mu_n$, folgt aus der Tatsache, daß für $\sigma \geqq 0$ das im Ausdruck $\mathfrak{D}[\varphi]$ auftretende Randintegral niemals negativ wird, daß also hier stets

$$\mathfrak{D}[\varphi] \geqq D[\varphi]$$

ist. Daher ist aber auch die untere Grenze der linken Seite bei gegebenen Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ mindestens gleich der unteren Grenze der rechten Seite, also stehen auch die Maxima dieser unteren Grenzen in derselben Beziehung, d. h. es gilt eben $\mu_n \geqq \varkappa_n$.

Der andere Teil der Behauptung, d. h. die Ungleichung $\mu_n \leqq \lambda_n$, ergibt sich folgendermaßen. Wenn wir in dem Maximum-Minimumproblem, welches ohne Auferlegung von Randbedingungen den n^{ten} Eigenwert μ_n von G als das Maximum des Minimums von $\mathfrak{D}[\varphi]$ charakterisiert, der Funktion φ die weitere Bedingung auferlegen, auf dem Rande Γ von G zu verschwinden, so wird sicher der Wert des einzelnen Minimums und somit auch des Maximum-Minimums vergrößert oder nicht verkleinert. Andererseits ist dieser neue Maximum-Minimumwert offenbar mit λ_n identisch, da infolge der auferlegten Bedingung jetzt $\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi]$ wird. Es gilt also $\mu_n \leqq \lambda_n$, wie behauptet wurde.

Bei den Anwendungen des Satzes 5 müssen wir beachten, daß die Anzahlen der betreffenden Eigenwerte unterhalb einer gegebenen Grenze in der umgekehrten Größenbeziehung stehen wie die Eigenwerte selbst.

Zusatz zu Satz 5: *Die Aussage von Satz 5 bleibt bestehen, wenn man die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ nicht überall, sondern nur auf einem Teile des Randes Γ oder des Randstückes Γ' durch die Bedingungen $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ bzw. $u = 0$ ersetzt.*

Der Beweis verläuft genau so wie der des Satzes 5 selbst.

Satz 6: *Wenn in der Randbedingung* $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ *auf* Γ *die Funktion* σ *entweder an jeder Stelle vergrößert oder verkleinert wird, so kann sich jeder einzelne Eigenwert nur im selben Sinne ändern.*

Auch diese sehr bemerkenswerte Tatsache ist eine unmittelbare Folge der Maximum-Minimumeigenschaft. Denn der Ausdruck $\mathfrak{D}[\varphi]$ ändert sich bei gleichsinniger Änderung der Funktion σ für jedes φ im selben Sinne wie σ, also auch seine untere Grenze bei gegebenen v und damit das Maximum dieser unteren Grenze.

Wir erkennen aus den letzten Sätzen, daß die Eigenwerte für die verschiedenen Randbedingungen in charakteristischen Beziehungen zueinander stehen. Ändert man die Funktion σ an jeder Stelle monoton von 0 bis ∞, so wächst jeder einzelne Eigenwert μ monoton von dem Werte, den er bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ hat, bis zu dem Werte, den er bei der Randbedingung $u = 0$ erhält. Daß tatsächlich der Grenzwert des Eigenwertes μ_n bei ins Unendliche wachsendem σ gleich λ_n ist, beweist man am besten, indem man auf die Natur der Eigenfunktionen näher eingeht. Da dies erst später geschehen soll, verzichten wir darauf, an dieser Stelle den Beweis auszuführen. (Vgl. jedoch § 7, 4 und Bd. II.)

Wir werden in Nr. 4 erkennen, *daß dieses Wachstum stetig vor sich geht.* Weiter wird die Untersuchung der asymptotischen Eigenwertverteilung zeigen, daß trotz des gekennzeichneten Verhaltens der Eigenwerte doch das asymptotische Verhalten des n^{ten} Eigenwertes unabhängig von der Randbedingung bleibt, daß sich also das Wachstum des Eigenwertes bei Wachsen der Funktion σ nur in einem im Vergleich mit der Größe des Eigenwertes bei großem n beliebig geringen Spielraum vollzieht.

Auch die hier zuletzt entwickelten Tatsachen haben sämtlich eine einfache *physikalische Bedeutung.* Wir erkannten nämlich in der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ die eines *„freien Randes"*; d. h. eines solchen, wo bei dem Schwingungsvorgang keinerlei Randbedingung gestellt ist, z. B. wenn die schwingenden Massen am Rande in keiner Weise festgehalten werden. Die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ entspricht einem mit elastischen Kräften gehaltenen Rande, wobei die Größe der festhaltenden Kraft durch die Funktion σ bestimmt ist. Die Bedingung $u = 0$ stellt den Fall dar, wo diese Kraft unendlich groß geworden ist, d. h. der Rand absolut festgehalten wird.

Schließlich gestattet uns die Maximum-Minimum-Eigenschaft des n^{ten} Eigenwertes, ohne Schwierigkeiten die Abhängigkeit der Eigenwerte von den Koeffizienten der Differentialgleichung, den Randbedingungen und dem Gebiet G zu untersuchen.

Satz 7: *Wenn in der Differentialgleichung* $L[u] + \lambda \varrho u = 0$ *der Koeffizient* ϱ *an jeder Stelle im selben Sinne verändert wird, so ändert*

sich bei jeder Randbedingung der n^{te} Eigenwert im entgegengesetzten Sinne; wird der Koeffizient p überall gleichsinnig verändert, so ändert sich jeder Eigenwert im selben Sinne. (Im Falle der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ ist hierbei $\sigma \gtrless 0$ vorauszusetzen.)

In der Tat, es werde zunächst p überall gleichsinnig verändert. Dann ändert sich für jede konkurrenzfähige Funktion φ der Wert des Ausdruckes $\mathfrak{D}[\varphi]$ monoton im selben Sinne, mithin auch die untere Grenze dieser Werte bei festen v_i, also auch das Maximum dieser unteren Grenzen, der n^{te} Eigenwert. Wird ϱ monoton verändert, etwa in ϱ', so wird eine Funktion φ, welche vorher den Konkurrenzbedingungen genügte, dies nicht mehr tun, vielmehr muß sie, um nunmehr der Bedingung

$$\iint_G \varrho' \varphi^2 \, dx \, dy = 1$$

zu genügen, mit einem gewissen konstanten Faktor multipliziert werden, der kleiner als 1 resp. größer als 1 wird, je nachdem ϱ wachsend oder fallend sich geändert hat. Die mit diesem Faktor multiplizierte Funktion φ werde φ' genannt. Da dieser Faktor quadratisch in $\mathfrak{D}[\varphi]$ eingeht, so erkennt man, daß je nach der Art der Änderung von ϱ die untere Grenze der Werte $\mathfrak{D}[\varphi]$ bei festgehaltenen Funktionen v_i nicht kleiner bzw. nicht größer wird als die untere Grenze der Ausdrücke $\mathfrak{D}[\varphi']$, wobei hier aber an Stelle der Funktionen v_i entsprechend der Verwandlung von ϱ in ϱ' die Funktionen $v_i' = v_i \frac{\varrho}{\varrho'}$ zu treten haben. Da das System der Funktionen v_i zugleich mit dem der Funktionen v_i' den ganzen Bereich der zulässigen Funktionensysteme erschöpft, so folgt ebenso wie oben, daß die Maxima der unteren Grenzen von $D[\varphi]$ und $D[\varphi']$ in der umgekehrten Größenbeziehung zueinander stehen wie die Funktionen ϱ und ϱ'.

2. Die Größenordnung der Eigenwerte. Unsere Maximum-Minimumdefinition erlaubt uns in Verbindung mit den vorangehenden Überlegungen sehr einfach, die Größenordnung der Eigenwerte zu bestimmen. Z. B. haben wir bei dem eindimensionalen Problem $(py')' - qy + \lambda \varrho y = 0$ für den n^{ten} Eigenwert die Beziehungen $\lambda_n' \leqq \lambda_n \leqq \lambda_n''$, wobei λ_n' der n^{te} zu denselben Randbedingungen gehörige Eigenwert der Differentialgleichung $p_m y'' + (-q_m + \lambda \varrho_M) y = 0$, λ_n'' der entsprechende Eigenwert von $p_M y'' + (-q_M + \lambda \varrho_m) y = 0$ ist. Hierbei bedeuten p_M, q_M, ϱ_M bzw. p_m, q_m, ϱ_m die Maxima bzw. Minima der Funktionen p, q, ϱ. Diese Eigenwerte lassen sich aber explizite angeben, da das Eigenwertproblem durch trigonometrische Funktionen gelöst wird, und zwar ist z. B. bei der Randbedingung $y(0) = y(\pi) = 0$

$$\lambda_n' = \frac{p_m n^2 + q_m}{\varrho_M}, \qquad \lambda_n'' = \frac{p_M n^2 + q_M}{\varrho_m}.$$

So erhalten wir das Resultat: *Für den n^{ten} Eigenwert der Differentialgleichung $(py')' - qy + \lambda \varrho y = 0$ bleibt bei beliebigen unserer homogenen Randbedingungen der Quotient $\frac{\lambda_n}{n^2}$ bei wachsendem n zwischen endlichen positiven Grenzen.* Insbesondere folgt hieraus, daß $\lim \lambda_n = \infty$ ist, wie wir schon früher erwähnt haben.

Bei mehrdimensionalen Problemen liegen die Verhältnisse ähnlich. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$L[u] + \lambda u = \Delta u + \lambda u = 0$$

für ein Gebiet G bei der Randbedingung $u = 0$. Der n^{te} Eigenwert sei λ_n, der n^{te} Eigenwert eines ganz in G liegenden Quadrates der Seitenlänge a sei λ_n', der eines das ganze Gebiet G einschließenden Quadrates mit der Seitenlänge b sei λ_n''. Dann ist $\lambda_n' \geqq \lambda_n \geqq \lambda_n''$. Nun wissen wir aus Kap. V, § 7, 4, daß $\lambda_n' \sim \frac{4\pi n}{a^2}$, $\lambda_n'' \sim \frac{4\pi n}{b^2}$ gilt, mithin erhalten wir das Resultat: *Für unser zweidimensionales Eigenwertproblem liegt der Quotient $\frac{\lambda_n}{n}$ bei wachsendem n zwischen endlichen positiven Grenzen.*

Bei anderen Randbedingungen, z. B. $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, gilt eine analoge Abschätzung. Wir wollen uns aber hier mit ihrer Durchführung nicht aufhalten, da sie sich, wie auch unsere obigen Abschätzungen, bald bei der asymptotischen Bestimmung der Eigenwerte von selbst ergeben wird.

Bei dem Sturm-Liouvilleschen Problem erlaubt die Maximum-Minimumeigenschaft in einfacher Weise nicht nur die *Bestimmung der Größenordnung des n^{ten} Eigenwertes, sondern geradezu seine asymptotische Berechnung.* Wir transformieren die Differentialgleichung $(py')' - qy + \lambda \varrho y = 0$ durch die Transformation

$$(18) \qquad z = \sqrt[4]{p\varrho}\, y, \qquad t = \int_0^x \sqrt{\frac{\varrho}{p}}\, dx, \qquad l = \int_0^\pi \sqrt{\frac{\varrho}{p}}\, dx.$$

Die Differentialgleichung erhält die Gestalt

$$(19) \qquad z'' - rz + \lambda z = 0$$

für das Gebiet $0 \leqq t \leqq l$, wobei $r(t)$ eine stetige Funktion ist und aus den ursprünglichen homogenen Randbedingungen analoge neue entstehen. Wir betrachten hier zunächst den Fall $y(0) = y(\pi) = 0$, also $z(0) = z(l) = 0$. Das Maximum-Minimumproblem liefert uns die Eigenwerte als Maxima der Minima eines Ausdruckes

$$\int_0^l (z'^2 + r z^2)\, dx.$$

Lassen wir hierin das Glied rz^2 weg, betrachten also den Integralausdruck

$$\int_0^l z'^2\,dx,$$

so unterscheidet er sich, sobald z der Bedingung

$$\int_0^l z^2\,dx = 1$$

genügt, von dem obigen Ausdruck um nicht mehr als die endliche feste Schranke r_M (Maximum des Betrages von r). Also sind die Maximinima des ersten Ausdruckes, d. h. die gesuchten Eigenwerte, von denen des zweiten um nicht mehr als r_M verschieden. Die Maximinima des zweiten Integrals sind aber die Eigenwerte μ_n von $z'' + \mu z = 0$ für das Intervall $(0, l)$, und so ergibt sich wegen $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \infty$ unmittelbar *die asymptotische Formel*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1$$

oder, wenn wir auf unsere alten Bezeichnungen zurückgehen und beachten, daß $\mu_n = n^2 \frac{\pi^2}{l^2}$ ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\lambda_n} = \frac{1}{\pi^2}\left(\int_0^\pi \sqrt{\frac{\varrho}{p}}\,dx\right)^2. \tag{20}$$

Genau dieselbe Abschätzung ergibt sich bei beliebigen anderen Randbedingungen, wie der Leser selbst durchführen möge und wie auch nach einer anderen Methode in § 4, 2 leicht folgt.

3. Die Vollständigkeitseigenschaft der Eigenfunktionen. Wir wollen nun zeigen, daß die durch unser Variationsproblem definierten Eigenfunktionen ein vollständiges Funktionensystem bilden. Es genügt, den Beweis in dem typischen Falle der Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichung $(py')' - qy + \lambda \varrho y = 0$ $(p(x) > 0, \varrho(x) > 0, q(x) \geqq 0)$ bei den Randbedingungen $y(0) = y(\pi) = 0$ zu führen. Es sei $f(x)$ eine denselben Randbedingungen genügende Funktion mit stückweise stetiger erster Ableitung im Intervalle G und es seien $c_n = \int_0^\pi \varrho f y_n\,dx$ die Entwicklungskoeffizienten der Funktion in bezug auf unser Eigenfunktionensystem. Setzen wir $f_n = f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu y_\nu$ und $\int_0^\pi \varrho f_n^2\,dx = a_n^2$, so haben wir zu beweisen, daß $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$ ist (vgl. Kap. II, § 1, 3). Die Funktion $\frac{f_n}{a_n} = \varphi$ genügt den Bedingungen

$$\int_0^\pi \varrho\,\varphi^2\,dx = 1, \qquad \int_0^\pi \varrho\,\varphi\,y_i\,dx = 0; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

also muß zufolge der Minimumeigenschaft der Eigenwerte

$$\int_0^\pi (p\varphi'^2 + q\varphi^2)\,dx \geqq \lambda_{n+1}$$

sein. Indem wir den Ausdruck $\varphi = \dfrac{f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu y_\nu}{a_n}$ in dieses Integral einsetzen, erhalten wir

$$\frac{1}{a_n^2}\int_0^\pi (pf'^2 + qf^2)\,dx - \frac{1}{a_n^2}\int_0^\pi 2\sum_{\nu=1}^{n}(pf' c_\nu y_\nu' + qf c_\nu y_\nu)\,dx$$
$$+ \frac{1}{a_n^2}\int_0^\pi [p(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu y_\nu')^2 + q(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu y_\nu)^2]\,dx \geqq \lambda_{n+1}.$$

Das mittlere Integral ergibt, wenn wir auf jedes Glied des Integranden Teilintegration anwenden, den Wert $2\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 \lambda_\nu$; das letzte Integral gibt entsprechend $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 \lambda_\nu$; mithin wird

$$D[\varphi] = \frac{1}{a_n^2}\left(D[f] - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 \lambda_\nu\right) \geqq \lambda_{n+1}.$$

Da kein λ negativ ist, so wird also

$$a_n^2 \lambda_{n+1} \leqq D[f],$$

woraus wegen $\lim_{n\to\infty} \lambda_{n+1} = \infty$ sofort $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$ folgt. Damit ist die Vollständigkeit des Funktionensystems bewiesen. Denn, nachdem die Vollständigkeitsrelation für Funktionen f feststeht, die den Randbedingungen genügen und eine stetige Ableitung besitzen, folgt sie für beliebige stetige oder stückweise stetige Funktionen nach den Überlegungen von Kap. II, § 1, 3. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, daß der Beweis in allen anderen hier in Betracht gezogenen Fällen ebenso verläuft.

Wie wir aus der Vollständigkeitseigenschaft die Entwicklungssätze erhalten, werden wir im nächsten Paragraphen sehen. Vorher aber wollen wir auf Grund der Maximum-Minimum-Eigenschaften die Stetigkeit der Eigenwerte in ihrer Abhängigkeit von den Funktionen ϱ, p, q, σ und dem Gebiet G feststellen.

4. Stetigkeitseigenschaften der Eigenfunktionen. Wenn zunächst die Funktion ϱ in ϱ' geändert wird und dabei $0 < (1-\varepsilon)\varrho \leqq \varrho' \leqq (1+\varepsilon)\varrho$ ist, unter ε eine positive Zahl verstanden, so muß nach Satz 7 der n^{te} Eigenwert der Differentialgleichung für die Funktion ϱ' zwischen den n^{ten} Eigenwerten liegen, die wir erhalten, wenn wir in der Differentialgleichung ϱ durch $\varrho(1-\varepsilon)$ bzw. $\varrho(1+\varepsilon)$ ersetzen. Das aber ist offenbar der n^{te} Eigenwert der ursprünglichen Differentialgleichung multipliziert mit den Faktoren $(1-\varepsilon)^{-1}$ bzw. $(1+\varepsilon)^{-1}$. Wenn ε

hinreichend klein genommen wird, so liegen diese beiden Zahlen beliebig nahe bei einander; damit ist bewiesen, *daß der n^{te} Eigenwert sich stetig mit der Funktion ϱ ändert.*

Genau so verläuft der Beweis, wenn p geändert wird, vorausgesetzt, daß die in der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ auftretende Funktion σ nirgends negativ wird. Ist dies letztere nicht der Fall, so beachte man, daß nach der obigen Formel (17) jedenfalls das Randintegral $\int_\Gamma p \sigma \varphi^2 ds$ mit $D[\varphi]$ und $\mathfrak{D}[\varphi]$ zugleich beschränkt bleibt. Da man nun in dem Maximum-Minimumproblem, welches den n^{ten} Eigenwert definiert, für die Werte von $\mathfrak{D}[\varphi]$ von vornherein eine geeignete obere Schranke festsetzen darf[1]), ohne die Lösung des Variationsproblems zu ändern, so folgt, daß eine hinreichend kleine Änderung der Funktion p das Randintegral für alle bei Innehaltung dieser Schranke zulässigen Funktionen φ um beliebig wenig verändert, woraus sich wiederum die Stetigkeit des n^{ten} Eigenwertes als Funktion von p ergibt.

Ebenso hängt der n^{te} Eigenwert stetig von q ab. Es folgt nämlich aus der Relation $\varrho \geqq \varrho_m$, wo ϱ_m eine positive Konstante ist,

$$1 = \iint_G \varrho \varphi^2 dx dy \geqq \varrho_m \iint_G \varphi^2 dx dy .$$

Somit ist für alle zulässigen Funktionen φ das Integral $\iint_G \varphi^2 dx dy$ beschränkt. Daraus ergibt sich, daß bei hinreichend kleiner Änderung der Funktion q sich der Ausdruck $\mathfrak{D}[\varphi]$ um beliebig wenig ändert, und zwar um gleichmäßig wenig für alle zulässigen Funktionen φ. Also gilt dasselbe für das Maximum-Minimum von $\mathfrak{D}[\varphi]$.

Zusammenfassend erhalten wir das Resultat:

Satz 8: *Der n^{te} Eigenwert der Differentialgleichung $L[u] + \lambda \varrho u = 0$ ändert sich für alle betrachteten Randbedingungen stetig mit den Koeffizienten der Differentialgleichung.*

In ähnlicher Weise erkennt man die Stetigkeit der Eigenwerte in ihrer Abhängigkeit von der in der Randbedingung auftretenden Funktion σ. Wir dürfen wiederum von vornherein in dem Variationsproblem voraussetzen, daß die Ausdrücke $\mathfrak{D}[\varphi]$ unterhalb einer festen Schranke liegen. Dann liegt auch das Randintegral $\int_\Gamma \varphi^2 ds$ und daher auch $\int_\Gamma p \sigma \varphi^2 ds$ unterhalb einer festen Schranke. Ändern wir also in dem Randintegral $\int_\Gamma p \sigma \varphi^2 ds$ die Funktion σ um hinreichend wenig, so ändert sich auch dieses Rand-

[1]) Etwa den zur Randbedingung $u = 0$ gehörigen n^{ten} Eigenwert eines beliebigen im Innern von G liegenden Quadrates. Denn den Sätzen 3 und 5 zufolge ist der betrachtete n^{te} Eigenwert von G sicher höchstens gleich dem eines solchen Quadrates. Die Festsetzung dieser oberen Schranke für $\mathfrak{D}[\varphi]$ kann also an der Lösung des Maximum-Minimumproblems nichts ändern.

integral um gleichmäßig beliebig wenig, somit gilt dasselbe für $\mathfrak{D}[\varphi]$ und daher auch für das Maximum-Minimum von $\mathfrak{D}[\varphi]$. Wir haben also das Resultat:

Satz 9: *Der n^{te} Eigenwert ändert sich stetig mit der in der Randbedingung* $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ *auftretenden Funktion* σ.

Wir untersuchen schließlich die Stetigkeitseigenschaften des n^{ten} *Eigenwertes als Funktion des Gebietes* G und wollen dabei zeigen, daß der n^{te} Eigenwert eines Gebietes G' den n^{ten} Eigenwert des Gebietes G bei entsprechenden Randbedingungen beliebig genau approximiert, wenn das Gebiet G durch das Gebiet G' hinreichend genau approximiert wird. *Dabei müssen wir jedoch den Begriff der Approximation eines Gebietes G durch ein anderes G' genügend scharf fassen.* Sobald in den Randbedingungen normale Ableitungen auftreten, werden wir uns nicht mehr, wie es in der Analysis situs üblich ist, damit begnügen können, daß der Rand von G' den Rand von G approximiert, wir werden vielmehr verlangen müssen, daß auch die *Normalen* des Randes von G' die des Randes von G *approximieren.* In der Tat kann man zeigen, daß bei der milderen Auffassung der Approximation der n^{te} Eigenwert nicht eine stetige Funktion des Gebietes zu sein braucht[1]).

---

[1]) Als einfachstes Beispiel für dieses Vorkommnis diene folgendes: Es sei $L[\varphi] = \Delta\varphi$, $\varrho = 1$. G sei ein Quadrat von der Seite 1. Außerhalb G, zu G parallel orientiert und der Mitte einer der Seiten q von G gegenüber werde ein zweites Quadrat G_ε von der Seitenlänge ε im Abstande ε angebracht und sodann sein Inneres mit dem von G durch einen schmalen, senkrecht aufsetzenden Steg S verbunden, welcher von zwei im Abstand η parallelen Geraden der Länge ε begrenzt wird. Das Gebiet G' möge aus den beiden Quadraten G und G_ε sowie dem Stege S bestehen. Der erste Eigenwert von G' bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ist Null, die zugehörige Eigenfunktion ist $u_1 = \text{konst.}$ Wenn nun zu jedem ε die Breite η des Streifens S hinreichend klein gewählt wird, so kann auch der zweite Eigenwert von G' beliebig klein gemacht werden. Betrachten wir nämlich eine Funktion φ in G', welche in G_ε gleich $-\frac{1}{\varepsilon}$, in G gleich einer Konstanten c ist und in S linear von c nach $-\frac{1}{\varepsilon}$ abfällt. Die Konstante c sei so bestimmt, daß das über G' erstreckte Integral von φ verschwindet. Wenn ε hinreichend klein ist, wird sich c von $-\frac{1}{\varepsilon}$ um beliebig wenig unterscheiden. Das Integral $D[\varphi]$ über G' wird also von der Größenordnung $\frac{\eta}{\varepsilon^3}$. Wenn daher η als ein hinreichend kleiner Bruchteil von ε^3 gewählt wird, so ist dieses Integral beliebig klein, während das Integral von φ^2 über G' sich beliebig wenig von 1 unterscheidet. Daher ist der klassischen Minimaleigenschaft der Eigenwerte und Eigenfunktionen zufolge erst recht der zweite Eigenwert von G' beliebig klein. Läßt man ε gegen Null konvergieren, so konvergiert der zweite Eigenwert von G' sicherlich gegen Null, wenn $\frac{\eta}{\varepsilon^3}$ gegen Null konvergiert. Der zweite Eigenwert von G ist jedoch positiv; also ist er nicht der Grenzwert des zweiten Eigenwertes von G', obwohl der Rand von G' gegen den von G konvergiert.

Analytisch können wir die Approximation des Gebietes G durch das Gebiet G' im schärferen Sinne folgendermaßen kennzeichnen.

Das Gebiet G geht mit Einschluß des Randes punktweise in das Gebiet G' mit Einschluß des Randes über durch Transformationsgleichungen der Form

$$x' = x + g(x, y), \qquad y' = y + h(x, y), \tag{21}$$

wobei die Funktionen g, h im ganzen Gebiet stetig und mit stückweise stetigen ersten Ableitungen versehen sind und wobei diese Funktionen ebenso wie ihre ersten Ableitungen absolut genommen unterhalb einer hinreichend kleinen positiven Schranke ε liegen. Wenn dies der Fall ist, so sagen wir, *daß das Gebiet G durch das Gebiet G' mit der Genauigkeit ε approximiert wird.*

Konvergiert ε gegen Null und ändert sich G' entsprechend, so sagen wir, daß G' stetig in G übergeht. Nunmehr gilt, wie wir zeigen wollen, der folgende Satz:

Satz 10: *Der n^{te} Eigenwert der Differentialgleichung $L[u] + \lambda \varrho u = 0$ bei irgendeiner der betrachteten Randbedingungen ändert sich stetig, wenn das Gebiet G in dem gekennzeichneten Sinne stetig deformiert wird.*

Zum Beweise betrachten wir eine Folge von Gebieten G', für welche die oben eingeführte Zahl ε gegen Null konvergiert. Wir lösen die Gleichungen (21) nach x und y auf, setzen

$$\varphi(x, y) = \varphi'(x', y'), \quad p(x, y) = p'(x', y') \text{ usw.}, \quad \sigma(x'(s), y'(s)) = \tau(s)$$

und transformieren die beiden Integrale, aus denen sich $\mathfrak{D}[\varphi]$ zusammen setzt, in ein Integral über das Gebiet G' und eines über seinen Rand Γ'. Dabei erhalten wir für $D[\varphi]$ das Integral

$$\iint_{G'} \left(p'\left[(\varphi'_{x'}(1 + g_x) + \varphi'_{y'} h_x)^2 + (\varphi'_{x'} g_y + \varphi'_{y'}(1 + h_y))^2\right] + q'\varphi'^2\right) M^{-1}\, dx\, dy, \tag{22}$$

wobei zur Abkürzung für die bei hinreichend kleinem ε beliebig wenig von 1 verschiedene Funktionaldeterminante

$$M = \left(1 + \frac{\partial g}{\partial x}\right)\left(1 + \frac{\partial h}{\partial y}\right) - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}$$

gesetzt ist. Für das Randintegral ergibt sich

$$\int_{\Gamma} p\, \sigma \varphi^2\, ds = \int_{\Gamma'} p'\, \tau(s)\, \varphi'^2 \frac{ds}{ds'}\, ds'.$$

Hierbei bedeutet ds' das Linienelement des Randes Γ' von G'.

Setzen wir allgemein

$$D'[\psi] = \iint_{G'} (p(\psi_x^2 + \psi_y^2) + q\psi^2)\, dx\, dy, \quad \mathfrak{D}'[\psi] = D'[\psi] + \int_{\Gamma'} p\, \tau(s)\, \psi^2\, ds'$$

so unterscheidet sich der Integrand in (22) von dem in $D'[\varphi']$ durch den Faktor M^{-1}, den von 1 beliebig wenig verschiedenen Faktor $p : p'$

und additive Glieder, in denen $\varphi_{x'}'^2$, $\varphi_{y'}'^2$, $\varphi_{x'}' \varphi_{y'}'$ und φ'^2 mit Faktoren multipliziert erscheinen, die mit ε gegen Null konvergieren. Mit Hilfe der Ungleichung

$$2\left|\iint_{G'} \varphi_{x'}' \varphi_{y'}' \, dx' \, dy'\right| \leqq \iint_{G'} (\varphi_{x'}'^2 + \varphi_{y'}'^2) \, dx' \, dy'$$

ergibt sich die Beziehung

$$D[\varphi] = (1 + \delta) D'[\varphi'],$$

worin δ hier wie im folgenden eine — wenn auch nicht immer dieselbe — mit ε gegen Null strebende Größe bezeichnet. Nun unterscheidet sich $\frac{ds}{ds'}$ bei hinreichend kleinem ε beliebig wenig von 1; daher wird

$$\int_{\Gamma'} p \tau(s) \varphi'^2 \frac{ds}{ds'} ds' = (1 + \delta) \int_{\Gamma'} p \tau(s) \varphi'^2 \, ds'$$

und im ganzen

$$\mathfrak{D}[\varphi] = (1 + \delta) \mathfrak{D}'[\varphi'].$$

Wir haben ferner die Nebenbedingungen (3), (11) von § 1 für die Funktionen φ zu transformieren und erhalten

$$\iint_G \varrho \varphi^2 \, dx \, dy = \iint_{G'} \varrho M^{-1} \varphi'^2 \, dx' \, dy' = 1$$

$$\iint_G \varrho \varphi v_i \, dx \, dy = \iint_{G'} \varrho M^{-1} \varphi' v_i \, dx' \, dy' = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ersetzen wir also die Funktionen v_i durch $v_i' = v_i M^{-1}$ und multiplizieren die Funktion φ' mit einem — bei kleinem ε von 1 beliebig wenig verschiedenen — konstanten Faktor, so daß für die neue entstehende Funktion φ'' die Relationen

$$\iint_{G'} \varrho \varphi''^2 \, dx' \, dy' = 1,$$

$$\iint_{G'} \varrho \varphi'' v_i' \, dx \, dy = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

gelten, so wird erstens

$$\mathfrak{D}[\varphi] = (1 + \delta) \mathfrak{D}'[\varphi''];$$

zweitens genügt die Funktion φ'' den Bedingungen des Maximum-Minimumproblems, welches den n^{ten} Eigenwert von G' charakterisiert, wobei die Funktionen $v_i' = M^{-1} v_i$ die Rolle der Funktionen v_i in G spielen. Da nun der Bereich sämtlicher zulässiger Funktionensysteme v_i' zugleich mit dem der Funktionensysteme v_i durchlaufen wird, so folgt, daß auch das Maximum-Minimum der linken Seite sich von dem der rechten nur um einen — mit gegen Null konvergierendem ε — gegen 1 konvergierenden Faktor unterscheiden kann. Damit ist aber Satz 10

bewiesen. Wir erkennen gleichzeitig aus der obigen Entwicklung, daß dieser Satz sich folgendermaßen präzisieren läßt:

Zusatz zu Satz 10: *Wenn ein Gebiet G' in ein Gebiet G durch die Transformation* (21) *übergeht und dabei* $\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| < \varepsilon$, $\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| < \varepsilon$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right| < \varepsilon$, $\left|\frac{\partial h}{\partial y}\right| < \varepsilon$ *ist, unter ε eine beliebig kleine positive Zahl verstanden, so gibt es eine nur von ε abhängige, mit ε zugleich gegen Null konvergierende Zahl η derart, daß die n^{ten} Eigenwerte μ_n, μ'_n der Gebiete G und G' für irgendwelche der betrachteten Randbedingungen und jedes n der Beziehung*

$$\left|\frac{\mu'_n}{\mu_n} - 1\right| < \eta$$

genügen.

Für die Randbedingung $u = 0$, bei welcher keinerlei normale Ableitung auftritt, gilt naturgemäß der Stetigkeitssatz in weiterem Umfange:

Satz 11: *Der n^{te} Eigenwert der Differentialgleichung $L[u] + \lambda \varrho u = 0$ für die Randbedingung $u = 0$ ist auch dann noch eine stetige Funktion des Gebietes G, wenn bei der stetigen Deformation des Gebietes die Stetigkeit der Veränderung der Normalen nicht mehr gefordert wird.*

Man kann nämlich die Ränder zweier Gebiete G und G', welche hinreichend benachbart sind, ohne daß in benachbarten entsprechenden Randpunkten auch die Normalen benachbarte Richtungen besitzen müssen, stets zwischen die Ränder zweier im engeren Sinne hinreichend benachbarter Gebiete B und B' einschließen. Da nun der n^{te} Eigenwert für die Randbedingung $u = 0$ nach Satz 3 eine monotone Funktion des Gebietes ist, so liegen die n^{ten} Eigenwerte von G und G' zwischen denen von B und B', welche nach Satz 10 ihrerseits benachbart sind. Damit ist Satz 11 bewiesen.

Die letzten Betrachtungen liefern uns, wenn wir nicht den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ausführen, das folgende allgemeinere Resultat:

Gehen zwei Gebiete G und G' auseinander durch eine Punkttransformation der obigen Art hervor, für welche der absolute Betrag der Funktionaldeterminante zwischen endlichen positiven Grenzen bleibt, und bedeutet λ_n bzw. λ'_n den n^{ten} Eigenwert des Gebietes G bzw. G', so liegt der Quotient $\frac{\lambda_n}{\lambda'_n}$ für hinreichend große n zwischen positiven, von n unabhängigen Schranken.

§ 3. Der Entwicklungssatz.

Es bereitet keine Schwierigkeit, die Sätze über die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Eigenfunktionen von unserem jetzigen Standpunkte aus zu beweisen. Wir beschränken uns hier auf den Fall einer unabhängigen Variablen, weil wir den Satz in diesem Falle unter

wesentlich verringerten Voraussetzungen gegenüber Kap. V beweisen können[1]). Wir wollen zeigen: *Jede den Randbedingungen genügende, im Intervall G stetige Funktion $f(x)$, für welche $\int_0^\pi f'(x)^2\,dx$ und somit auch $D[f] = \int_0^\pi (p f'^2 + q f^2)\,dx$ einen Sinn hat, läßt sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n$ $(c_n = \int_0^\pi \varrho f y_n\,dx)$ entwickeln.* Wegen der Vollständigkeit des orthogonalen Funktionensystems $\sqrt{\varrho}\,y_n$ für die Differentialgleichung $(py')' - qy + \lambda\varrho y = 0$ genügt es, zu zeigen, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n$ mit $c_n = \int_0^\pi \varrho f y_n\,dx$ gleichmäßig konvergiert (vgl. Kap. II, S. 37).

Zum Beweise betrachten wir wieder die Funktion $f_n = f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu y_\nu$. Es ist, wie wir oben S. 337 berechneten,

$$D[f_n] = D[f] - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 \lambda_\nu .$$

Mithin konvergiert wegen $D[f_n] \geqq 0$ die aus positiven Gliedern bestehende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \lambda_n$. Setzen wir $a_n = c_n \sqrt{\lambda_n}$, so ist also $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent. Nun wird

$$\left| \sum_{n=h}^{k} c_n y_n(x) \right| \leqq \sum_{n=h}^{k} |c_n|\,|y_n(x)| = \sum_{n=h}^{k} \left| \frac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right| |y_n(x)| ,$$

also zufolge der Schwarzschen Ungleichung

$$\left(\sum_{n=h}^{k} c_n y_n(x) \right)^2 \leqq \sum_{n=h}^{k} a_n^2 \sum_{n=h}^{k} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \sum_{n=h}^{\infty} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n} .$$

Wir nehmen jetzt die Tatsache vorweg[2]), daß $|y_n(x)| < C$ bleibt, wobei C eine von n unabhängige Konstante ist. Da $\frac{\lambda_n}{n^2}$ nach § 2, 2 zwischen endlichen Schranken bleibt, und da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, so wird $\sum_{n=h}^{k} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n}$

[1]) Es sei bei dieser Gelegenheit nochmals betont, daß unsere Entwicklungssätze für mehr als eine unabhängige Variable erst dann als allgemein bewiesen angesehen werden können, wenn die Existenz der betreffenden Greenschen Funktionen, bzw. der Lösung der betreffenden Variationsprobleme feststeht. Beide Fragen werden ihre vollständige Beantwortung erst im zweiten Bande finden.

[2]) Der Beweis folgt in § 6.

bei hinreichend großem h und k gleichmäßig für alle x beliebig klein, und somit ebenfalls $\sum_{n=h}^{k} |c_n y_n(x)|$; das heißt aber, die obige Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig, womit der behauptete Entwicklungssatz bewiesen ist.

Weitere Verschärfungen des Entwicklungssatzes werden sich später (§ 6) als Folge der asymptotischen Darstellung der Eigenfunktionen ergeben.

§ 4. Die asymptotische Verteilung der Eigenwerte.

1. Die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ bei Gebieten, welche aus endlich vielen Quadraten oder Würfeln bestehen. Unsere bisher gewonnenen Resultate und Methoden gestatten uns, auch bei mehreren unabhängigen Variablen mühelos das asymptotische Verhalten des n^{ten} Eigenwertes bei wachsendem n zu verfolgen, wie wir es bei einer unabhängigen Variabeln schon in § 2 taten. Das hervorstechende und für prinzipielle physikalische Fragen besonders wichtige Ergebnis dieser Untersuchungen wird sein, *daß für Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten das asymptotische Verhalten der Eigenwerte nicht von der Gestalt, sondern lediglich von der Größe des Grundgebietes abhängt.* Wir wollen zunächst die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ betrachten und voraussetzen, daß das Gebiet G sich in endlich viele, etwa h, kongruente Quadrate bzw. im Falle von drei unabhängigen Variablen Würfel der Seitenlänge a zerlegen läßt. Wir werden solche Gebiete als „Quadratgebiete" bzw. „Würfelgebiete" bezeichnen. Der Flächeninhalt bzw. das Volumen von G ist dann $f = ha^2$ bzw. $V = ha^3$.

Im folgenden werden wir mit dem Buchstaben ϑ stets eine zwischen -1 und $+1$ liegende Zahl, mit dem Buchstaben c oder C eine Konstante bezeichnen und uns die Freiheit gestatten, gelegentlich, wenn ein Mißverständnis ausgeschlossen erscheint, die Unterscheidung verschiedener solcher Werte ϑ bzw. c oder C durch Indizes usw. fortzulassen.

Wir erinnern noch einmal an die schon früher (S. 250) betrachtete Abschätzung der Eigenwerte unserer Differentialgleichung für ein Quadrat Q der Seitenlänge a. Hier werden die Eigenfunktionen und Eigenwerte bei der Randbedingung $u = 0$ durch die Ausdrücke

$$\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{a}, \qquad \frac{\pi^2}{a^2}(l^2+m^2), \qquad (l, m = 1, 2, 3, \ldots)$$

bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ durch die Ausdrücke

$$\cos\frac{l\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{a}, \qquad \frac{\pi^2}{a^2}(l^2+m^2), \qquad (l, m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

gegeben (vgl. Kap. V, § 7, 4). Bezeichnet man die Anzahl der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte im ersten Falle mit $A_Q(\lambda)$, im zweiten

Falle mit $B_Q(\lambda)$, so sind diese Anzahlen identisch mit den Anzahlen der ganzzahligen Lösungen der Ungleichung

$$l^2 + m^2 < \lambda \frac{a^2}{\pi^2},$$

wobei im ersten Falle $l > 0$, $m > 0$, im zweiten $l \geqq 0$, $m \geqq 0$ vorgeschrieben ist. Durch Abzählung der Gitterpunkte im ersten Quadranten des um den Nullpunkt des Koordinatensystems mit dem Radius $\frac{a}{\pi}\sqrt{\lambda}$ geschlagenen Kreises erhält man für hinreichend großes λ nach Kap. V, § 7, 4

$$(23) \qquad A_Q(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi}\lambda + \vartheta c a\sqrt{\lambda}, \qquad B_Q(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi}\lambda + \vartheta' c a\sqrt{\lambda}.$$

Hierbei ist c eine numerische von λ und a unabhängige Konstante.

Es sei nun $A(\lambda)$ die Anzahl der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ für das Gebiet G und die Randbedingungen $u = 0$ oder $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ oder auch die allgemeinere Randbedingung vom Typus $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$, wobei jedoch zunächst $\sigma \geqq 0$ vorausgesetzt werde. Bezeichnen wir mit $A_{Q_1}(\lambda), A_{Q_2}(\lambda), \ldots, A_{Q_h}(\lambda)$ die entsprechenden Anzahlen für die Teilquadrate bei der Randbedingung $u = 0$, mit $B_{Q_1}(\lambda), B_{Q_2}(\lambda), \ldots, B_{Q_h}(\lambda)$ diese Anzahlen bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, so besagt Satz 5 in Verbindung mit Satz 2 und 4

$$A_{Q_1}(\lambda) + \cdots + A_{Q_h}(\lambda) \leqq A(\lambda) \leqq B_{Q_1}(\lambda) + \cdots + B_{Q_h}.$$

Da aber diese Anzahlen $A_{Q_i}(\lambda)$, $B_{Q_i}(\lambda)$ übereinstimmend durch die Gleichungen (23) gegeben werden, so schließen wir

$$A(\lambda) = \frac{f}{4\pi}\lambda + \vartheta c a\sqrt{\lambda}.$$

Mit anderen Worten, es gilt folgender Satz:

Satz 12: *Die Anzahl $A(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ für ein Quadratgebiet vom Flächeninhalt f ist bei allen oben betrachteten Randbedingungen asymptotisch gleich*

$$\frac{f}{4\pi}\lambda,$$

d. h. es gilt

$$(24) \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \frac{A(\lambda)}{f\lambda} = \frac{1}{4\pi}.$$

Genauer besteht für alle hinreichend großen λ die Beziehung

$$(25) \qquad \left|\frac{4\pi A(\lambda)}{f\lambda} - 1\right| < \frac{C}{\sqrt{\lambda}},$$

worin C eine von λ unabhängige Konstante bedeutet.

Bezeichnet man mit ϱ_n den n^{ten} zu einer der betrachteten Randbedingungen gehörigen Eigenwert, so ist die Aussage dieses Satzes bzw. der Gleichung (25) äquivalent mit der Gleichung

$$\varrho_n = \frac{4\pi}{f}\, n + \vartheta\, c \sqrt{\varrho_n} \tag{26}$$

wo wieder ϑ einen echten Bruch, c eine von n unabhängige Konstante bedeutet. Man braucht, um dies einzusehen, in (25) nur $A(\varrho_n) = n$ zu setzen.

Die Gültigkeit des Satzes 12 bleibt bestehen, auch wenn etwa in der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ die Funktion σ negative Werte annehmen kann. Wir schließen dies wiederum mit Hilfe der Ungleichung (17) aus § 1, 3.

Vorab bemerken wir, daß nach Satz 5 der n^{te} Eigenwert μ_n bei der betrachteten Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ jedenfalls nicht größer sein kann als der n^{te} Eigenwert λ_n bei der Randbedingung $u = 0$. Wir dürfen also von vornherein voraussetzen, daß der Ausdruck

$$\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \int_{\Gamma} p\, \sigma\, \varphi^2\, ds\,,$$

dessen Maximum-Minimum ja μ_n ist, die Grenze λ_n für keine der zur Konkurrenz in dem Variationsproblem zugelassenen Funktionen φ übersteigt; die Lösung des Maximum-Minimumproblems wird dadurch nicht geändert.

Nun ist nach der Ungleichung (17) von S. 329:

$$\left| \int_{\Gamma} p\, \sigma\, \varphi^2\, ds \right| < c_1 \sqrt{|D[\varphi]|} + c_2\,,$$

wobei c_1, c_2 numerische Konstante bedeuten; es wird also

$$D[\varphi] - c_1 \sqrt{|D[\varphi]|} - c_2 < \mathfrak{D}[\varphi] < D[\varphi] + c_1 \sqrt{|D[\varphi]|} + c_2\,.$$

Aus der Annahme $\mathfrak{D}[\varphi] \leqq \lambda_n$ folgt

$$D[\varphi] - c_1 \sqrt{D|[\varphi]|} - c_2 < \lambda_n\,,$$

und hieraus wiederum ergibt sich, daß $D[\varphi]$ mit n nicht stärker wachsen kann als λ_n, d. h. daß eine Relation der Form

$$D[\varphi] < c_3 \lambda_n$$

gelten muß, unter c_3 wiederum eine Konstante verstanden. Mithin wird, da ja die Beziehung (26) für $\varrho_n = \lambda_n$ gilt, unter den über φ gemachten Voraussetzungen

$$D[\varphi] - c_4 \sqrt{n} \leqq \mathfrak{D}[\varphi] \leqq D[\varphi] + c_4 \sqrt{n}\,,$$

und diese Beziehung gilt für die unteren Grenzen der Ausdrücke $\mathfrak{D}[\varphi]$ und $D[\varphi]$ bei gegebenen Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, mithin auch für die Maxima dieser unteren Grenzen. Dieses Maximum ist für $D[\varphi]$ der n^{te} zur Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ gehörige Eigenwert, für den die Beziehung (26) schon bewiesen ist. Daher folgt sie nun unmittelbar auch für das Maximum der unteren Grenze von $\mathfrak{D}[\varphi]$, den betrachteten n^{ten} Eigenwert μ_n bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$, und diese Beziehung ist mit der Aussage von Satz 12 gleichbedeutend.

Wenn statt zweier unabhängiger Variablen drei vorliegen, so ändern sich in der ganzen Betrachtung nur die Ausdrücke $A_Q(\lambda)$, $B_Q(\lambda)$ für die Anzahlen der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte bei den Randbedingungen $u = 0$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, und zwar wird

$$(27) \quad A_Q(\lambda) = \frac{1}{6\pi^2} a^3 \lambda^{\frac{3}{2}} + \vartheta c a^2 \lambda, \qquad B_Q(\lambda) = \frac{1}{6\pi^2} a^3 \lambda^{\frac{3}{2}} + \vartheta c a^2 \lambda.$$

Somit erhalten wir jetzt das Resultat:

Satz 13: *Die Anzahl $A(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ für ein aus endlich vielen kongruenten Würfeln bestehendes Polyeder vom Rauminhalt V ist bei allen betrachteten Randbedingungen asymptotisch gleich $\frac{V}{6\pi^2}\lambda^{\frac{3}{2}}$, d. h. es gilt*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{A(\lambda)}{V \lambda^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{6\pi^2}.$$

Genauer besteht bei hinreichend großem λ die Formel

$$(28) \quad \left| \frac{6\pi^2 A(\lambda)}{V \lambda^{\frac{3}{2}}} - 1 \right| < C \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

wobei C eine von λ unabhängige Konstante ist[1]).

2. Ausdehnung des Resultates auf die allgemeine Differentialgleichung $L[u] + \lambda \varrho u = 0$. Um die gewonnenen Sätze über die asymptotische Eigenwertverteilung auf die allgemeine elliptische, sich selbst adjungierte Differentialgleichung (1) zu übertragen, denken wir uns die Quadrateinteilung bzw. Würfeleinteilung des Gebietes G durch mehrfach fortgesetzte Halbierung der Seitenlänge a so verfeinert, daß in jedem der entstehenden Elementargebiete die Differenz zwischen dem größten und kleinsten Wert der Funktionen p bzw. ϱ unterhalb einer vorgegebenen hinreichend kleinen positiven Zahl ε bleibt. Wir beachten ferner, *daß die Funktion q auf die asymptotische Eigenwertverteilung*

[1]) Eine schärfere allgemeine Abschätzung des bei der asymptotischen Abschätzung von $A(\lambda)$ gemachten Fehlers ist allgemein nicht möglich, da beim Quadrat bzw. beim Würfel die angegebene Größenordnung des Fehlers wirklich erreicht wird.

überhaupt keinen Einfluß ausüben kann, da der Ausdruck $\mathfrak{D}[\varphi]$ und mit ihm sein Maximum-Minimum sich bei Streichung der Funktion q nur um einen beschränkten Betrag ändert, nämlich um weniger als $\frac{q_M}{\varrho_m}$, wie oben (z. B. S. 327) unmittelbar aus der Relation (13) gefolgert wurde; q_M und q_m haben dabei entsprechende Bedeutung wie früher. Wir nehmen demgemäß in den folgenden Entwicklungen $q = 0$ an.

Die weitere Betrachtung werde für den Fall eines ebenen Gebietes G durchgeführt. Die Anzahl der Quadrate, aus denen G besteht, sei wiederum h, ihre Seitenlänge a, mit $A'(\lambda)$ werde die Anzahl der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung $L[u] + \lambda \varrho u = 0$ bezeichnet, wobei als Randbedingung irgend eine der betrachteten genommen werden kann, die Bedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ jedoch zunächst unter der einschränkenden Voraussetzung $\sigma \geqq 0$. Die Teilquadrate bezeichnen wir mit $Q_1, Q_2, \ldots, Q_h$, die zugehörigen Anzahlen der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung für die Randbedingung $u = 0$ mit $A'_{Q_1}(\lambda), \ldots, A'_{Q_h}(\lambda)$, für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ mit $B'_{Q_1}(\lambda), \ldots, B'_{Q_h}(\lambda)$. Nach Satz 2, 4 und 5 ist wieder

$$(29) \qquad A'_{Q_1}(\lambda) + \cdots + A'_{Q_h}(\lambda) \leqq A'(\lambda) \leqq B'_{Q_1}(\lambda) + \cdots + B'_{Q_h}(\lambda).$$

Nun folgt aus Satz 7 unter Berücksichtigung von (23)

$$A'_{Q_i}(\lambda) \geqq \frac{\varrho_m^{(i)}}{p_M^{(i)}} A_{Q_i}(\lambda), \qquad B'_{Q_i}(\lambda) \leqq \frac{\varrho_M^{(i)}}{p_m^{(i)}} B_{Q_i}(\lambda),$$

wenn mit $p_M^{(i)}, \varrho_M^{(i)}$, die Maxima, mit $p_m^{(i)}, \varrho_m^{(i)}$ die Minima der betreffenden Funktionen in dem Quadrate Q_i bezeichnet werden und $A_{Q_i}(\lambda)$, $B_{Q_i}(\lambda)$ wie in der vorigen Nummer die durch die Gleichungen (23) gegebenen Anzahlen der entsprechenden Eigenwerte für die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ bedeuten. Denn ersetzt man in der Differentialgleichung (1) p durch $p_M^{(i)}$, ϱ durch $\varrho_m^{(i)}$, so wird nach Satz 7 jeder der Eigenwerte vergrößert oder jedenfalls nicht verkleinert, ihre Anzahl unterhalb einer Grenze λ also verkleinert oder nicht vergrößert. Andererseits geht dabei die Differentialgleichung (1) in die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda \frac{\varrho_m^{(i)}}{p_M^{(i)}} u = 0$ über, deren Eigenwerte die mit $\frac{p_M^{(i)}}{\varrho_m^{(i)}}$ multiplizierten Eigenwerte der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ sind. Das Entsprechende gilt, wenn p durch $p_m^{(i)}$, ϱ durch $\varrho_M^{(i)}$ ersetzt wird.

Ferner ist, da ϱ und p stetige Funktionen sind,

$$\iint_G \frac{\varrho}{p}\, dx\, dy = a^2 \sum_{i=1}^{h} \frac{\varrho_m^{(i)}}{p_M^{(i)}} + \delta = a^2 \sum_{i=1}^{h} \frac{\varrho_M^{(i)}}{p_m^{(i)}} + \delta',$$

wobei die Zahlen $|\delta|$, $|\delta'|$ beliebig klein werden, wenn nur die anfängliche Quadrateinteilung hinreichend fein, d. h. a hinreichend klein gewählt ist. Somit ergibt sich durch Anwendung von (29) ganz ebenso wie in § 4, 1

$$A(\lambda) = \frac{\lambda}{4\pi}\iint_G \frac{\varrho}{p}\,dx\,dy + \lambda\,\delta'' + \vartheta\, c\sqrt{\lambda}, \tag{30}$$

wo auch $|\delta''|$ beliebig klein ist, und dies ist nichts anderes als folgende Aussage über die asymptotische Eigenwertverteilung:

Satz 14: *Die Anzahl $A(\lambda)$ der zur Differentialgleichung $L[u]+\lambda\varrho u = 0$ gehörigen, unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte eines Quadratgebietes G ist für jede der betrachteten Randbedingungen asymptotisch gleich $\frac{\lambda}{4\pi}\iint_G \frac{\varrho}{p}\,dx\,dy$, d. h. es gilt*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{A(\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{4\pi}\iint_G \frac{\varrho}{p}\,dx\,dy. \tag{31}$$

Die ursprüngliche Voraussetzung $\sigma \geqq 0$ erkennt man hier genau so wie in Nr. 1 als überflüssig.

Dieselben Überlegungen für den Raum durchgeführt ergeben folgendes Resultat:

Satz 15: *Die Anzahl der zur Differentialgleichung $L[u]+\lambda\varrho u = 0$ gehörigen, unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte eines Würfelgebietes G ist für alle hier betrachteten Randbedingungen asymptotisch gleich*

$$\frac{1}{6\pi^2}\lambda^{\frac{3}{2}}\iiint_G \left(\frac{\varrho}{p}\right)^{\frac{3}{2}} dx\,dy\,dz,$$

d. h. es gilt die Relation

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{A(\lambda)}{\lambda^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{6\pi^2}\iiint_G \left(\frac{\varrho}{p}\right)^{\frac{3}{2}} dx\,dy\,dz. \tag{32}$$

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß die Überlegungen der beiden letzten Nummern sich genau ebenso für einen *allgemeineren Bereich* durchführen lassen, der aus *endlich vielen beliebigen Rechtecken bzw. Quadern* zusammengesetzt ist.

3. Die Gesetze der asymptotischen Eigenwertverteilung für einen beliebigen Bereich. Um die asymptotischen Spektralgesetze der vorangehenden Paragraphen auf beliebige Bereiche zu erweitern, müssen wir diese Bereiche durch Quadrate bzw. Kuben von innen heraus ausschöpfen. Dabei werden wir neue Überlegungen lediglich anzustellen haben, um den Einfluß des bei jeder Approximation übrigbleibenden Randstreifens abzuschätzen.

Zunächst setzen wir voraus, daß G ein ebener Bereich sei, dessen Rand überall stetig gekrümmt ist, und betrachten ferner nur die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$.

Wir schicken eine Reihe von Bemerkungen voraus, welche sich auf die zu dieser Differentialgleichung und zur Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ gehörigen Eigenwerte bzw. die Anzahl derselben unterhalb einer gegebenen Grenze für gewisse einfache Gebiete beziehen.

Es sei zunächst G ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit der Kathete a. Jede Eigenfunktion des Dreiecks ist auch Eigenfunktion des durch Spiegelung an der Hypotenuse entstehenden Quadrates für dieselbe Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Denn man erkennt ohne weiteres, daß sich die Eigenfunktion in das gespiegelte Dreieck fortsetzen läßt, indem man spiegelbildlich zur Hypotenuse gelegenen Punkten denselben Funktionswert zuweist; dabei wird die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf dem ganzen Rande des Quadrates erfüllt. Der n^{te} Eigenwert des Dreiecks ist also zugleich Eigenwert des Quadrats, mithin ist der n^{te} Eigenwert des Quadrats sicher nicht größer als der des Dreiecks, oder die *Anzahl der unterhalb einer Grenze gelegenen Eigenwerte für das Dreieck bei der Randbedingung* $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ *ist höchstens gleich der entsprechenden Anzahl für das Quadrat*, d. h. der durch Formel (23) angegebenen Zahl.

Zweitens sei G ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b, wobei $b < a$ vorausgesetzt werde. Die Kathete a falle in die x-Achse, die Kathete b in die y-Achse. Wir verwandeln durch die Transformation $\xi = x$, $\eta = \frac{a}{b} y$ das Dreieck G in ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck G' mit der Kathete a. Hierbei geht der Ausdruck $D[\varphi]$ über in

$$D[\varphi] = \iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2 \right] \frac{b}{a} \, d\xi \, d\eta$$

und die Nebenbedingung (13) in

$$\iint_{G'} \varphi^2 \frac{b}{a} \, d\xi \, d\eta = 1,$$

während die andern Nebenbedingungen (11) aus § 1, 2 bei der Transformation ihre Gestalt überhaupt nicht ändern. Wir können also unter Weglassung des unwesentlichen in beiden Integralen auftretenden konstanten Faktors $\frac{b}{a}$ den n^{ten} Eigenwert $\varkappa_n$ des Dreiecks G als das Maximum-Minimum des über G' erstreckten Integrals

$$\iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2 \right] d\xi \, d\eta$$

charakterisieren, wobei im übrigen das Maximum-Minimum ganz im ursprünglichen Sinne zu verstehen ist. Da nun sicherlich wegen $\frac{a}{b} \geqq 1$

$$\iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2 \right] d\xi\, d\eta \geqq \iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2 \right] d\xi\, d\eta$$

gilt, so ist auch das Maximum-Minimum der linken Seite mindestens gleich dem der rechten Seite, d. h. dem n^{ten} Eigenwert für das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck G', also erst recht größer als der n^{te} Eigenwert eines Quadrates der Seite a. *Mithin ist bei der Randbedingung* $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ *die Anzahl der unterhalb einer Grenze gelegenen Eigenwerte eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten höchstens gleich a sind, sicher nicht größer als die entsprechende Anzahl der Eigenwerte für das Quadrat der Seite a und also erst recht nicht größer als die entsprechende Anzahl für jedes größere Quadrat.*

Ebenso ist die *Anzahl der Eigenwerte für ein beliebiges Rechteck* unterhalb einer Grenze sicher nicht größer als die entsprechende Anzahl für ein Quadrat, dessen Seite mindestens gleich der größeren Rechtecksseite ist.

Aus diesen Tatsachen in Verbindung mit Satz 4 erhält man ohne weiteres die Möglichkeit, die Anzahl der Eigenwerte unterhalb einer gegebenen Grenze nach oben abzuschätzen, wenn das betrachtete Gebiet aus einer endlichen Anzahl von Rechtecken und rechtwinkligen Dreiecken zusammengesetzt ist.

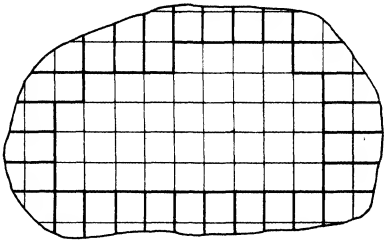


Abb. 10.

Diese Ergebnisse wenden wir an, um den Einfluß des Randstreifens, der bei einer Ausschöpfung von G durch Quadrate übrigbleibt, auf die Eigenwertverteilung zu beurteilen. Hierzu muß zuerst dieser Randstreifen definiert werden. Wir nehmen an, es sei, nötigenfalls durch mehrmalige Halbierung der Seitenlänge, die Quadrateinteilung der Ebene so fein geworden, daß bei jedem in einem der Quadrate liegenden Randstücke von G die Normale sich um weniger als einen vorgegebenen kleinen Winkel η dreht, über dessen Kleinheit wir uns die Verfügung vorbehalten. Wir können dann, wie in der Abb. 10, den Rand Γ durch eine Anzahl r aneinander anschließender Elementargebiete $E_1, E_2, \ldots, E_r$ folgender Art begleiten: Jedes Gebiet E wird entweder begrenzt von zwei zueinander senkrechten Geraden AB, AC der Quadrateinteilung, deren Länge zwischen a und $3a$ liegt, und einem Stück BC des

Randes (Abb. 11), oder es ist begrenzt von einer Seite AB der Quadrateinteilung, zwei dazu senkrechten Strecken AC, BD mit Längen zwischen a und $3a$ und einem Stück CD des Randes (Abb. 12). Aus r solchen Gebieten setzen wir einen Randstreifen S zusammen, so daß nach Abtrennung desselben von G ein Quadratpolygon, bestehend aus h Quadraten $Q_1, Q_2, \ldots, Q_h$ übrig bleibt[1]). Die Anzahl r ist offenbar kleiner als eine von a unabhängige, wesentlich von der Länge des Randes abhängende Konstante C dividiert durch a.

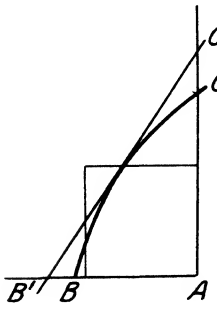


Abb. 11.

Um die Anzahl $B_E(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen zur Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ und der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ gehörigen Eigenwerte eines der Gebiete E nach oben abzuschätzen, haben wir wieder für den n^{ten} Eigenwert eine untere Grenze aufzusuchen. Zu diesem Zwecke ziehen wir durch einen beliebigen Punkt des krummlinigen Randstückes von E die Tangente. Diese begrenzt zusammen mit den geradlinigen Randstücken von E ein Gebiet vom Typus $AB'C'$ (Abb. 11), d. h. bei hinreichend kleinem η ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten kleiner als $4a$ oder ein Trapez vom Typus $ABC'D'$, bei dem ebenfalls die Seiten AC', BD' kleiner als $4a$ sind (Abb. 12), je nachdem, welchem Typus das Gebiet E angehört. Die Gebiete $AB'C'$ bzw. $ABC'D'$ wollen wir mit E' bezeichnen. Nun kann man das Gebiet E stets in das Gebiet E' durch eine Transformation von der Form (21) überführen, wie sie in § 2 betrachtet wurde. Bei Gebieten des ersten Typus sei etwa A der Pol eines Polarkoordinatensystems mit den Koordinaten ϑ, ϱ, und $\varrho = f(\vartheta)$ sei die Gleichung der krummen Linie BC, $\varrho = g(\vartheta)$ die Gleichung der Geraden $B'C'$. Dann wird durch die Gleichungen

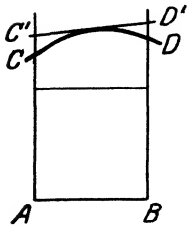


Abb. 12.

$$\vartheta' = \vartheta, \qquad \varrho' = \varrho \frac{g(\vartheta)}{f(\vartheta)}$$

die Transformation des krummlinigen Dreiecks E auf das geradlinige E' vermittelt. Im Falle des zweiten

[1]) Davon, wie diese Konstruktion durchzuführen ist, wird sich der Leser selbst Rechenschaft geben können. Man beginne damit, die Randkurve in endlich viele Bögen von drei Arten einzuteilen. Auf den Bögen der ersten Art bilde die Tangente mit der x-Achse, auf denen der zweiten Art mit der y-Achse Winkel von höchstens 30^0; auf denen der dritten Art bilde sie mit keiner der Achsen Winkel von weniger als 30^0. Die Endpunkte der Bögen erster bzw. zweiter Art sollen rationale Abszissen bzw. Ordinaten haben Eine hinreichend enge Quadrateinteilung, auf deren Seiten diese Endpunkte liegen, ermöglicht die im Text geschilderte Konstruktion.

Typus $ABCD$ liege AB in der x-Achse, $y = g(x)$ sei die Gleichung der Geraden $C'D'$ und $y = f(x)$ die Gleichung der krummen Linie CD. Dann betrachten wir die Transformation

$$x' = x, \qquad y' = y\frac{g(x)}{f(x)}.$$

Wenn wir voraussetzen, daß die zugrunde gelegte Strecke a hinreichend klein, also auch die totale Drehung der Tangente an dem Kurvenbogen CB bzw. CD hinreichend klein genommen wird, so haben offenbar die hier betrachteten Transformationen genau die Gestalt (21), und die dort mit ε bezeichnete Größe wird beliebig klein. Nach dem Zusatz zu Satz 10 unterscheiden sich dann aber die entsprechenden n^{ten} Eigenwerte für die Gebiete E und E' nur um einen für alle n gleichmäßig wenig von 1 verschiedenen Faktor, Mithin gilt dasselbe auch für die entsprechenden Anzahlen $B_E(\lambda)$ und $B_{E'}(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen zur Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ gehörigen Eigenwerte.

Da nun das Gebiet E' entweder ein rechtwinkliges Dreieck mit Seiten kleiner als $4a$ ist, oder sich aus einem solchen Dreieck und einem Rechteck mit Seiten kleiner als $3a$ zusammensetzt, so folgt, sobald nur a hinreichend klein genommen ist, jedenfalls für die Anzahl $B_E(\lambda)$ von einem gewissen λ ab

$$B_E(\lambda) < c_3 a^2 \lambda + c_4 a \sqrt{\lambda}, \tag{33}$$

wo c_1, c_2 geeignet zu wählende numerische Konstanten bedeuten.

Nunmehr sind wir in der Lage, für das Gebiet G die asymptotischen Eigenwertgesetze zu beweisen. Es sei also $A(\lambda)$ wieder die Anzahl der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte unserer Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ für das Gebiet G und irgend eine der betrachteten Randbedingungen, wobei wir wieder zuerst gegebenenfalls die Voraussetzung $\sigma \geqq 0$ machen. Eine Quadrateinteilung der Ebene durch Quadrate mit der Seitenlänge a führe zu einer Zerlegung des Gebietes G in h Quadrate $Q_1, Q_2, \ldots, Q_h$ und r Randgebiete $E_1, E_2, \ldots, E_r$. Wie früher bezeichnen wir die Anzahlen der zu den Quadraten gehörigen unterhalb λ liegenden Eigenwerte mit $A_i(\lambda)$ bzw. $B_i(\lambda)$, je nachdem die Randbedingung $u = 0$ oder $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ gestellt ist. Mit $A_{E_i}(\lambda)$ bzw. $B_{E_i}(\lambda)$ werden die entsprechenden Zahlen für die Gebiete E_i bezeichnet (von den letzteren brauchen wir jedoch nur die Zahlen $B_{E_i}(\lambda)$).

Gemäß den Gleichungen (23) ist

$$A_i(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi}\lambda + a\vartheta_1 c_1\sqrt{\lambda}, \qquad B_i(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi}\lambda + a\vartheta_2 c_2\sqrt{\lambda},$$

und nach dem Vorangehenden gilt

$$B_{E_i}(\lambda) = \vartheta_3(c_3\lambda a^2 + a c_4\sqrt{\lambda}),$$

wobei, wie stets, mit $\vartheta, \vartheta_1, \ldots$ Zahlen zwischen -1 und $+1$, mit $c_1, c_2, \ldots$ irgendwelche von a und λ unabhängige Konstanten bezeichnet werden.

Nach den Sätzen 5, 2 und 4 ist

$$A_1(\lambda) + A_2(\lambda) + \cdots + A_h(\lambda) \leqq A(\lambda) \leqq B_1(\lambda) + \cdots + B_h(\lambda) + \\ + B_{E_1}(\lambda) + \cdots + B_{E_r}(\lambda),$$

ferner ist jedenfalls

$$A_1(\lambda) + \cdots + A_h(\lambda) = \frac{h a^2}{4\pi}\lambda + \vartheta_1 c_1 h a \sqrt{\lambda} = \lambda\left(\frac{h a^2}{4\pi} + \frac{\vartheta_1 c_1 h a}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$$B_1(\lambda) + \cdots + B_h(\lambda) + B_{E_1}(\lambda) + \cdots + B_{E_r}(\lambda) \\ = \frac{h a^2}{4\pi}\lambda + \vartheta_2 c_2 h a\sqrt{\lambda} + \vartheta_3 r a^2 \lambda c_3 + \vartheta_3 r a c_4 \sqrt{\lambda} \\ = \lambda\left[\left(\frac{h a^2}{4\pi} + \vartheta c_3 r a^2\right) + (h a \vartheta_2 c_2 + r a \vartheta_3 c_4)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right].$$

Da nun $a r \leq c_5$, also $a^2 r$ bei hinreichend kleinem a beliebig klein ist, da ferner bei hinreichend kleinem a für jedes noch so kleine δ gilt

$$|h a^2 - f| < \delta,$$

so folgt aus diesen Ungleichungen unmittelbar das asymptotische Gesetz

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{4\pi A(\lambda)}{\lambda f} = 1.$$

Denn wir haben die Größe a frei zur Verfügung und können, etwa indem wir ein festes hinreichend kleines a wählen, die Faktoren von λ in den obigen Ungleichungen für hinreichend große λ beliebig nahe an den Wert $\frac{f}{4\pi}$ bringen.

Auch wenn wir die Voraussetzung $\sigma \geqq 0$ fallen lassen, erhalten wir nunmehr dasselbe asymptotische Gesetz durch die schon mehrfach ausgeführte Anwendung der Ungleichung (17) mittels derselben Schlüsse, wie sie an analoger Stelle in § 4, 1 ausgeführt wurden. Zusammenfassend ergibt sich also das Resultat:

Satz 16: *Bei allen betrachteten Randbedingungen ist die Anzahl $A(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ für das Gebiet G asymptotisch gleich $\frac{\lambda f}{4\pi}$, d. h. es gilt*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{4\pi A(\lambda)}{\lambda f} = 1, \tag{34}$$

wobei f den Flächeninhalt des Gebietes bedeutet.

Beim Beweise hatten wir zunächst angenommen, daß der Rand Γ von G keine Ecken besitzt. Die Überlegungen sowie das Resultat bleiben jedoch im wesentlichen unverändert, wenn Ecken in endlicher Anzahl zugelassen werden. Man zerlege dann das Gebiet durch gerade Linien,

welche durch die Ecken gehen, ohne dort die Äste der Randkurve zu berühren, und wende auf die Teilgebiete die eben durchgeführten Überlegungen an.

Ebenso bleiben die vorangehenden Überlegungen gültig, wenn statt der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ die allgemeinere Differentialgleichung $L[u] + \lambda \varrho u = 0$ zugrunde gelegt wird. Es ergibt sich genau in derselben Weise wie in Nr. 2 als Resultat

Satz 17: *Die Anzahl $A(\lambda)$ der zur Differentialgleichung $L[u]+\lambda \varrho u=0$ gehörigen, unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte des Gebietes G ist für jede der betrachteten Randbedingungen asymptotisch gleich $\frac{\lambda}{4\pi}\iint_G \frac{\varrho}{p}\,dx\,dy$, d. h. es gilt*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{4\pi}\iint_G \frac{\varrho}{p}\,dx\,dy\,.$$

Ähnliche Überlegungen, wie sie hier für die Ebene durchgeführt sind, ergeben für das Eigenwertproblem im Raume die folgenden Resultate:

Satz 18: *Die Anzahl $A(\lambda)$ der zur Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ gehörigen, unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte eines räumlichen Gebietes G mit dem Volumen V ist für alle betrachteten Randbedingungen asymptotisch gleich $\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6\pi^2} V$, d. h. es gilt*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda^{\frac{3}{2}} V} = \frac{1}{6\pi^2}. \tag{35}$$

Satz 19: *Die entsprechende Anzahl für die allgemeinere Differentialgleichung $L[u] + \lambda \varrho u = 0$ ist asymptotisch gleich $\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6\pi^2}\iiint_G \left(\frac{\varrho}{p}\right)^{\frac{3}{2}} dx\,dy\,dz$, d. h. es gilt*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{6\pi^2}\iiint_G \left(\frac{\varrho}{p}\right)^{\frac{3}{2}} dx\,dy\,dz\,. \tag{36}$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß G von endlich vielen Flächenstücken mit stetiger Krümmung begrenzt wird, welche sich gegenseitig nicht berühren, wohl aber Ecken und Kanten bilden dürfen.

4. Die Gesetze der asymptotischen Eigenwertverteilung für die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ in verschärfter Form. Unsere Theorie gibt uns die Möglichkeit, die in den obigen Sätzen ausgesprochenen asymptotischen Eigenwertgesetze noch weiter zu präzisieren, d. h. eine *Abschätzung für den Fehler* zu finden, den wir machen, wenn wir den Ausdruck $A(\lambda)$ durch den gefundenen asymptotischen Wert ersetzen. Wir wollen die Untersuchung für die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ durchführen.

Zu diesem Zwecke brauchen wir nur die bei der Exhaustion des Gebietes G durch Elementarquadrate bzw. Würfel gegebenen Möglich-

keiten besser auszunutzen, indem wir diese Gebiete nicht zahlreicher und kleiner als nötig annehmen. Es sei G zunächst ein ebenes Gebiet. Wir bauen es folgendermaßen auf: Zuerst wird eine Quadrateinteilung der Ebene etwa mit der Seitenlänge 1 zugrunde gelegt. Es mögen hiervon die h_0 Quadrate $Q_1^0, Q_2^0, \ldots, Q_{h_0}^0$ ganz ins Innere von G fallen. Sodann werden sämtliche Quadrate in vier kongruente Quadrate von der Seitenlänge $\frac{1}{2}$ zerlegt. Von diesen Quadraten mögen h_1 Quadrate $Q_1^1, Q_2^1, \ldots, Q_{h_1}^1$ ins Innere von G, aber nicht ins Innere eines der Quadrate Q_i^0 fallen. Nunmehr wird die Quadrateinteilung wiederum durch Halbierung der Seitenlänge verfeinert, und man gelangt zu h_2 neuen Quadraten $Q_1^2, Q_2^2, \ldots, Q_{h_2}^2$ mit der Seitenlänge $\frac{1}{2^2}$, welche im Innern von G liegen, aber keinem der früheren Quadrate Q_i^0 oder Q_i^1 angehören, usw. Nach t Schritten gelangt man zu h_t Quadraten $Q_1^t, Q_2^t, \ldots, Q_{h_t}^t$ der Seitenlänge $\frac{1}{2^t}$. Gemäß den Vorschriften der vorigen Nummer richten wir es so ein, daß der Exhaustionsrest aus r Elementargebieten $E_1, E_2, \ldots, E_r$ der dort definierten Art besteht, wobei die dort mit a bezeichnete Zahl gleich $\frac{1}{2^t}$ zu setzen ist.

Für die Zahlen h_i und r gelten bei unseren Voraussetzungen über den Rand die Beziehungen

$$h_i < 2^i c\,, \qquad r < 2^t c\,, \tag{37}$$

wobei c eine von i und t unabhängige wesentlich durch die Länge des Randes bedingte Konstante ist[1]).

Wir bezeichnen wieder die Anzahlen der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte für die Gebiete Q_m^i, E_m mit $A_m^i(\lambda)$, $A_{E_m}(\lambda)$, wenn die Randbedingung $u = 0$, mit $B_m^i(\lambda)$, $B_{E_m}(\lambda)$, wenn die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ zugrunde gelegt ist. Jedenfalls gilt nach Satz 2, 4, 5, wenn die Funktion σ im Falle der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ nicht negativ ist,

$$\begin{cases} A(\lambda) \leqq (B_1^0 + B_2^0 + \cdots + B_{h_0}^0) + \cdots + (B_1^t + B_2^t + \cdots + B_{h_t}^t) \\ \qquad\qquad + (B_{E_1} + B_{E_2} + \cdots + B_{E_r})\,, \\ A(\lambda) \geqq (A_1^0 + A_2^0 + \cdots + A_{h_0}^0) + \cdots + (A_1^t + A_2^t + \cdots + A_{h_t}^t)\,. \end{cases} \tag{38}$$

Nun ist die rechte Seite der ersten dieser Ungleichungen zufolge den Gleichungen (23) und der Gleichung (33) der vorigen Nummer gleich

$$\frac{1}{4\pi}\left(h_0 + \frac{h_1}{2^2} + \frac{h_2}{2^4} + \cdots + \frac{h_t}{2^{2t}} + \frac{r\vartheta c}{2^{2t}}\right)\lambda + \vartheta_1 c_1 \left(h_0 + \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2^2} + \cdots + \frac{h_t}{2^t} + \frac{r}{2^t}\right)\sqrt{\lambda}\,,$$

[1]) Diese Ungleichheiten drücken aus, daß der Gesamtumfang der Quadrate Q^t bzw. Q^t die Größenordnung des Umfanges von G nicht übersteigt.

also folgt, da

$$h_0 + \frac{h_1}{2^2} + \cdots + \frac{h_t}{2^{2t}} = f - \vartheta_2 c_2 \frac{r(t)}{2^{2t}}$$

ist, mit Rücksicht auf (37), daß diese rechte Seite die Gestalt hat

$$\frac{1}{4\pi}\left(f + \frac{c\,\vartheta_3 c_3}{2^t}\right)\lambda + \vartheta_4 c_4 (t+2)\sqrt{\lambda}\,.$$

Somit ergibt sich für diesen Ausdruck schließlich die bei hinreichend großem λ gültige Ungleichung

$$(39)\quad (B_1^0 + \cdots + B_{h_0}^0) + \cdots + (B_{E_1} + \cdots + B_{E_r}) \leqq \frac{f}{4\pi}\lambda + C\left(\frac{\lambda}{2^t} + t\sqrt{\lambda}\right),$$

in welcher, wie immer, mit dem Buchstaben C eine von λ und t unabhängige Konstante gemeint ist.

Wählen wir nun die Zahl t, welche noch verfügbar ist, so, daß die beiden Summanden in der Klammer annähernd gleich werden, nämlich t etwa gleich der größten ganzen in $\frac{1}{2}\frac{\log\lambda}{\log 2}$ enthaltenen ganzen Zahl, so folgt aus (38) und (39)

$$(40)\qquad A(\lambda) \leqq \frac{f}{4\pi}\lambda + C\sqrt{\lambda}\log\lambda\,.$$

Genau dieselbe Gestalt ergibt sich für die untere Schranke des Ausdruckes $A(\lambda)$.

Diese Überlegungen gelten zunächst nur, wenn die gegebenenfalls in der Randbedingung auftretende Funktion σ nirgends negativ wird, weil nur dann die erste Ungleichung (38) gesichert ist. Doch zeigt genau dieselbe Überlegung wie in Nr. 1 auf Grund der Ungleichung (17) aus § 1, 3, daß auch bei Verzicht auf die einschränkende Bedingung die Grenzen in der obigen Form bestehen bleiben. Wir erhalten also allgemein das schärfere asypmtotische Gesetz:

Satz 20: *Für alle betrachteten Randbedingungen wächst die Differenz*

$$A(\lambda) - \frac{f}{4\pi}\lambda$$

mit wachsendem λ sicher nicht stärker an als der Ausdruck

$$\sqrt{\lambda}\log\lambda\,.$$

Dieselben Überlegungen, für den Raum durchgeführt, ergeben

Satz 21: *Für alle betrachteten Randbedingungen strebt bei dem Problem für ein räumliches Gebiet vom Volumen V die Differenz*

$$A(\lambda) - \frac{V}{6\pi^2}\lambda^{\frac{3}{2}}$$

mit wachsendem λ nicht stärker gegen Unendlich als der Ausdruck

$$\lambda\log\lambda\,.$$

5. Vektorielle Randwertaufgaben. Das Gesetz der asymptotischen Eigenwertverteilung für die elektrischen Eigenschwingungen eines Hohlraumes. Die hier entwickelten Methoden lassen sich unverändert auch auf solche Randwertaufgaben anwenden, bei denen nicht eine einzelne Funktion, sondern ein System von Funktionen, etwa ein Vektor, bestimmt werden soll[1]). Die wichtigste dieser Aufgaben, die mit anderen erst den Anstoß zu den Untersuchungen über asymptotische Eigenwertverteilung gegeben hat, ist die *Randwertaufgabe der Hohlraumstrahlung*, d. h. für uns die Frage nach der Verteilung der elektrischen Eigenschwingungen eines Hohlraumes[2]). Wir wollen unsere Methode an diesem Fall durchführen und werden dabei erkennen, daß wir das Problem nur sinngemäß in unseren Gedankenkreis einzuordnen brauchen, um ohne Mühe das asymptotische Eigenwertgesetz zu erhalten.

Zunächst haben wir das Problem geeignet zu formulieren.

Es sei G ein „Hohlraum", d. h. ein von einer oder mehreren geschlossenen Flächen begrenzter Körper vom Volumen V. Die Begrenzungsflächen mögen aus endlich vielen durchweg stetig gekrümmten Stücken bestehen, welche Kanten miteinander bilden dürfen, ohne sich jedoch dort zu berühren. Es gelten im übrigen dieselben Bezeichnungen wie bisher. Dann werden die elektrischen Eigenschwingungen des Hohlraumes durch folgendes Eigenwertproblem charakterisiert: Es ist ein Vektor $\mathfrak{e}$ gesucht, der in G mit seinen ersten und zweiten Ableitungen stetig ist, in G der Differentialgleichung

$$\Delta \mathfrak{e} + \lambda \mathfrak{e} = 0 \tag{41}$$

für einen geeigneten Parameterwert λ genügt, der ferner in G die Bedingungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{e} = 0 \tag{42}$$

und

$$\iiint_G \mathfrak{e}^2 \, dx\, dy\, dz = 1 \tag{43}$$

befriedigt und der zu der Oberfläche normal steht.

Die Lösungen dieses Problems, welches wir einfach als „*Strahlungsproblem*" oder Problem I bezeichnen wollen, heißen die *Eigenvektoren*.

[1]) In diesem Abschnitt werden wir von den üblichen Bezeichnungen und von einigen elementaren Relationen der Vektoranalysis Gebrauch machen.

[2]) Vgl. *Lorentz, H. A.:* Alte und neue Fragen der Physik, Phys. Zeitschr. Bd. 11, S. 1234–1257, insb. S. 1248, 1910 und *Sommerfeld, A.:* Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung für ein beliebiges Gebiet. Ib. S. 1057–1066, insb. S. 1061–1062, 1910. Die physikalische Fragestellung zielt immer darauf ab, wie weit die Verteilung der Eigenwerte von der zugrunde gelegten geometrischen Gestalt unabhängig ist.

Die zugehörigen Eigenwerte sind im wesentlichen die Quadrate der Eigenschwingungszahlen.

Man vereinfacht sich dieses Problem, indem man zunächst die Bedingung (42) für das Innere fallen läßt und lediglich für die Oberfläche Γ von G beibehält. Hierdurch entsteht ein neues Eigenwertproblem, welches wir als Problem II bezeichnen wollen. Ist $\mathfrak{v}$ eine Lösung des Problems II, so folgt unmittelbar für die Größe $q = \operatorname{div} \mathfrak{v}$

$$\Delta q + \lambda q = 0,$$

d. h. entweder ist q identisch Null, oder q ist eine Lösung des früher behandelten „skalaren" Eigenwertproblems: $\Delta q + \lambda q = 0$ im Innern, $q = 0$ am Rande. Im ersten Falle genügt $\mathfrak{v}$ also überall in G der Bedingung (42), d. h. $\mathfrak{v}$ ist eine Lösung des Strahlungsproblems. Im zweiten Falle trifft dies nicht zu.

Hat man umgekehrt eine Lösung q des eben betrachteten skalaren Eigenwertproblems, so erhält man, indem man $\mathfrak{v} = \operatorname{grad} q$ setzt, eine Lösung des Problems II. Denn dann ist am Rande $\operatorname{div} \mathfrak{v} = \Delta q = -\lambda q = 0$. Auf diese Weise ergibt sich, daß jeder r-fache Eigenwert λ des Problems II als Eigenwert des skalaren Problems eine gewisse Vielfachheit h, als Eigenwert des Strahlungsproblemes die Vielfachheit $r - h$ besitzen muß, wobei h irgend eine der Zahlen $0, 1, \ldots, r$ sein kann. Wegen der Umkehrbarkeit dieses Zusammenhanges erhält man also die sämtlichen Eigenwerte des Strahlungsproblems I, indem man aus der Reihe der Eigenwerte des Problems II die Eigenwerte des skalaren Problems mit der Randbedingung $q = 0$ in richtiger Vielfachheit fortstreicht. Da wir diese letzteren nach Nr. 2 und 3 beherrschen, so brauchen wir uns also nur noch mit dem einfacheren Problem II zu beschäftigen:

$$\Delta \mathfrak{v} + \lambda \mathfrak{v} = 0$$

im Inneren,

$$\mathfrak{v} \text{ normal zur Oberfläche von } G, \quad \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$$

auf Γ.

Die Randbedingung der Normalität von $\mathfrak{v}$ drückt sich, wenn u, v, w die Komponenten von $\mathfrak{v}$ und α, β, γ die Richtungskosinus der Normale am Rande sind, in der Form aus

$$u = t\alpha, \qquad v = t\beta, \qquad w = t\gamma,$$

wo t ein im allgemeinen vom Orte abhängiger Proportionalitätsfaktor ist. Die zweite Randbedingung kann man unter Berücksichtigung der ersten in die Form setzen

$$\text{Normalkomponente von } \left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial n} + K\mathfrak{v}\right) = 0.$$

Hierbei ist K eine auf der Oberfläche Γ beschränkte, bis auf endliche Sprünge an den Kanten stetige Funktion, nämlich die doppelte *mittlere Krümmung der Oberfläche*[1]).

Entsprechend den Entwicklungen von § 1 setzen wir nun unser Differentialgleichungsproblem in ein Variationsproblem um. Wir erhalten zunächst, indem wir die Greensche Formel (vgl. Kap. IV, § 8) auf die einzelnen Komponenten der betrachteten Vektoren anwenden und die Resultate addieren, folgende Tatsachen:

Für zwei mit ihren Ableitungen in G stetige Vektoren $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{w}$ besteht die Greensche Formel

$$\begin{cases} \iiint\limits_G \left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \\ \qquad = -\iiint\limits_G \mathfrak{f}\,\Delta\mathfrak{w}\,dx\,dy\,dz + \iint\limits_\Gamma \mathfrak{f}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial n}\,do. \end{cases} \tag{44}$$

Denken wir uns nun, wie in § 1, die Eigenwerte in eine ansteigende Reihe geordnet:

$$\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \mu_3 \leqq \cdots$$

und bezeichnen die entsprechenden Eigenvektoren mit $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots$, wobei für $i \neq k$ die Orthogonalitätsbeziehung

$$\iiint\limits_G \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k\,dx\,dy\,dz = 0 \tag{45}$$

gilt, so erhalten wir genau wie in § 1, 1 für den n^{ten} Eigenvektor $\mathfrak{e}_n$ und den zugehörigen Eigenwert μ_n folgende *Minimaleigenschaft: Sei $\mathfrak{f}$ irgend ein Vektor, welcher in G stetig und mit ersten Ableitungen versehen ist, die höchstens an endlich vielen analytischen Flächen-*

---

[1]) Der Beweis ist kurz folgender: Wir betrachten einen Punkt P der Oberfläche R, von dem wir annehmen, daß er der Nullpunkt des Koordinatensystems sei und die z-Achse zur äußeren Normalen besitze. Die Randbedingung $\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$ lautet ausgeschrieben $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$. In P ist $u = 0$, $v = 0$, $|w| = |\mathfrak{v}| = |\mathfrak{v}_n|$. In einem in Richtung der x-Achse gelegenen Nachbarpunkte P_1 finden wir den Wert u_1 von u, indem wir berücksichtigen, daß auch dort der Vektor $\mathfrak{v}$ normal steht und bis auf Größen höherer Ordnung denselben Betrag $|w|$ hat wie in P. Die ebene Schnittkurve der z-x-Ebene mit der Fläche habe in P den Krümmungsradius R_1, dann ergibt sich sofort für den Wert von $\frac{\partial u}{\partial n}$ im Punkte P_1 die Größe $w\frac{ds}{R_1}$, wo ds die bis auf Größen höherer Ordnung mit dx übereinstimmende Länge des Kurvenbogens PP_1 ist. An der Stelle P_1 wird also $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{w}{R_1}$. Entsprechend gilt $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{w}{R_2}$, wenn R_2 der Krümmungsradius der von der z-y-Ebene ausgeschnittenen Kurve in P ist. Schließlich ist $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{v}_n}{\partial n}$, und hieraus ergibt sich durch Addition unmittelbar die zu beweisende Tatsache.

stücken sprunghaft unstetig, im übrigen stetig sind, welcher ferner den Bedingungen

$$\iiint_G \mathfrak{f}^2\,dx\,dy\,dz = 1, \qquad \iiint_G \mathfrak{f}\,\mathfrak{e}_i\,dx\,dy\,dz = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

und den Randbedingungen

(46) $\qquad \mathfrak{f}$ normal zu Γ, $\qquad \operatorname{div}\mathfrak{f} = 0$

auf Γ genügt, dann ist

$$\mathfrak{D}[\mathfrak{f}] = \iiint_G \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz - \iint_\Gamma \mathfrak{f}\,\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial n}\,do \geqq \mu_n,$$

wobei für $\mathfrak{f} = \mathfrak{e}_n$ das Gleichheitszeichen gilt; d. h., das Variationsproblem, den Ausdruck

$$\mathfrak{D}[\mathfrak{f}] = D[\mathfrak{f}] - \iint_\Gamma \mathfrak{f}\,\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial n}\,do$$

oder, was dem Obigen zufolge dasselbe ist, den Ausdruck

$$\mathfrak{D}[\mathfrak{f}] = D[\mathfrak{f}] + \iint_\Gamma K\mathfrak{f}^2\,do$$

zum Minimum zu machen, wenn $\mathfrak{f}$ den gestellten Bedingungen genügt, besitzt den n^{ten} Eigenvektor $\mathfrak{e}_n$ zur Lösung, und der Wert des Minimums ist gleich dem n^{ten} Eigenwert μ_n.

Diese Minimumeigenschaft gestattet sofort genau wie in § 1, 2 die Umsetzung in eine *Maximum-Minimumeigenschaft:*

Es seien $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_{n-1}$ stetige oder stückweise stetige Vektoren in G, es sei $\mathfrak{f}$ ein Vektor, welcher den Bedingungen

$$\iiint_G \mathfrak{f}^2\,dx\,dy\,dz = 1, \qquad \iiint_G \mathfrak{f}\,\mathfrak{v}_i\,dx\,dy\,dz = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

und den Randbedingungen (46) *unterworfen wird, im übrigen in G stetig und stückweise stetig differenzierbar ist. Es sei weiter $d\{\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_{n-1}\}$ die untere Grenze aller Werte, welche der Ausdruck*

$$\mathfrak{D}[\mathfrak{f}] = D[\mathfrak{f}] + \iint_\Gamma K\mathfrak{f}^2\,do$$

für alle zulässigen Vektoren $\mathfrak{f}$ annehmen kann. Dann ist der n^{te} Eigenwert μ_n des Problems II *das Maximum aller Werte, welche die Zahl $d\{\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_{n-1}\}$ annimmt, wenn das System der $n-1$ Vektoren $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_{n-1}$ beliebig variiert wird. Dieser Maximum-Minimumwert wird angenommen für $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{v}_{n-1} = \mathfrak{e}_{n-1}, \mathfrak{f} = \mathfrak{e}_n$.*

Nach diesen Vorbereitungen ergeben sich die Gesetze für die Eigenwertverteilung unseres Problems folgendermaßen: Verschärfen wir zu-

nächst die Zulassungsbedingungen für den Vektor $\mathfrak{f}$ in unserem Maximum-Minimumproblem, indem wir verlangen, daß er in einer gegebenen, nachher hinreichend schmal zu wählenden, an die Oberfläche angrenzenden Schale identisch verschwindet, wodurch die gestellten Randbedingungen identisch erfüllt werden, so wird jedenfalls das einzelne Minimum $d\{\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_{n-1}\}$ steigen oder nicht fallen, mithin auch das Maximum-Minimum.

Das durch die Verschärfung entstehende Maximum-Minimumproblem fordert, den Ausdruck $D[\mathfrak{f}]$, genommen für das aus G nach Abzug der Schale entstehende Restgebiet G', zu einem Maximum-Minimum im selben Sinne wie oben zu machen, nur mit dem Unterschiede, daß auf dem Rande von G' für den Vektor identisches Verschwinden verlangt wird. Die Lösung dieses Problems bzw. des entsprechenden Differentialgleichungsproblems kann man nun direkt angeben. Ist nämlich u'_n die n^{te} Eigenfunktion des skalaren Problems für das Gebiet G' und die Randbedingung $u' = 0$, und ist λ'_n der zugehörige Eigenwert, so erhalten wir die Eigenvektoren des vektoriellen Problems als die Vektoren, deren Komponenten

$$u'_n, 0, 0; \qquad 0, u'_n, 0; \qquad 0, 0, u'_n$$

sind. Die zugehörigen Eigenwerte sind λ'_n, und man sieht, daß jeder dieser Werte dreifach auftritt Da die Eigenwerte λ'_n nach Satz 11 stetig von G abhängen, so erhalten wir folgendes Resultat:

Satz 22: *Die Anzahl $A(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte des Problems* II *ist sicher mindestens dreimal so groß wie die entsprechende Anzahl für das skalare Problem mit der Randbedingung $u = 0$.*

Um auch eine Grenze nach oben zu erhalten, nehmen wir zunächst an, daß K durchweg positiv oder gleich Null ist, was jedenfalls zutrifft, wenn G von einer einzigen konvexen Fläche begrenzt wird. Dann wird sicher

$$\mathfrak{D}[\mathfrak{f}] \geqq D[\mathfrak{f}].$$

Erleichtern wir nunmehr die Zulassungsbedingungen für den Vektor $\mathfrak{f}$ in dem Variationsproblem, indem wir sämtliche Randbedingungen streichen, so erkennen wir wie oben, daß die Lösung des so entstehenden Maximum-Minimumproblems, bei welchem das Maximum-Minimum des Ausdruckes $D[\mathfrak{f}]$ zu bestimmen ist, einen jedenfalls nicht größeren Wert ergibt als den Maximum-Minimumwert μ_n des urprünglichen Problems. Genau wie oben erhalten wir aber die Eigenwerte des neuen Problems, indem wir die Eigenwerte des skalaren Problems

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

im Inneren,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

am Rande, dreifach nehmen. Wir gelangen also zu dem Ergebnis: *Unter der für K gemachten Voraussetzung ist die Anzahl der unterhalb einer Grenze gelegenen Eigenwerte des Problems* II *nicht größer als die dreifache Anzahl der entsprechenden Eigenwerte des skalaren Problems mit der Randbedingung* $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Da die asymptotischen Eigenwertgesetze für die skalaren Probleme übereinstimmend durch den Satz 18 gegeben werden, so erhalten wir aus diesem Satze als asymptotischen Ausdruck für die Zahl $A(\lambda)$ sofort

$$3\,\frac{V}{6\pi^2}\lambda^{\frac{3}{2}}$$

und aus dem Satz 21 für den Fehler die Abschätzung

$$\left| A(\lambda) - \frac{V}{2\pi^2}\lambda^{\frac{3}{2}} \right| < \text{konst.}\,\lambda \log \lambda .$$

Um nun noch die über K gemachte Voraussetzung abzustreifen, brauchen wir lediglich die Betrachtung aus § 1, 3 anzuwenden, welche besagt, daß das in dem Ausdruck $\mathfrak{D}[f]$ auftretende Oberflächenintegral jedenfalls mit $D[f]$ nicht stärker ins Unendliche wachsen kann als $\sqrt{D[f]}$. Hieraus ergibt sich durch dieselbe Schlußweise wie in Nr. 1, daß die oben gefundenen asymptotischen Ausdrücke bestehen bleiben, auch wenn K nicht durchweg positiv oder Null ist.

Berücksichtigen wir nun noch, daß die Eigenwerte des Strahlungsproblems erhalten werden, indem man aus denen des Problems II die Eigenwerte des skalaren Problems für die Randbedingung $u = 0$ fortstreicht, und beachten wieder das für diese geltende asymptotische Gesetz aus Satz 18, so gewinnen wir für das Strahlungsproblem folgendes Resultat:

Satz 23: *Für einen beliebigen Hohlraum vom Volumen V ist die Anzahl $S(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte des Strahlungsproblems asymptotisch gleich*

$$\frac{V}{3\pi^2}\lambda^{\frac{3}{2}},$$

und zwar gilt für hinreichend großes λ die schärfere asymptotische Formel

$$\left| S(\lambda) - \frac{V}{3\pi^2}\lambda^{\frac{3}{2}} \right| < C\,\lambda \log \lambda , \tag{47}$$

wobei C eine von λ unabhängige positive Konstante ist.

§ 5. Die Knoten der Eigenfunktionen.

Während wir im vorangehenden Paragraphen über das Verhalten der Eigenwerte präzise Aussagen von großer Allgemeinheit machen konnten, bietet das Studium der allgemeinen Eigenschaften von Eigen-

funktionen wesentlich größere Schwierigkeiten und ist noch lange nicht so weit gefördert wie das der Eigenwerte, was bei der Mannigfaltigkeit der durch Eigenwertprobleme definierten Funktionenklassen nicht wundernehmen kann. Einige spezielle dieser Funktionen werden wir im nächsten Kapitel näher studieren, während wir uns im vorliegenden Paragraphen mit allgemeineren Untersuchungen über die Eigenfunktionen befassen wollen.

Ein besonderes Interesse bieten diejenigen Stellen des Grundgebietes G dar, in welchen eine Eigenfunktion verschwindet. Je nachdem, ob wir es mit Problemen in einer, zwei, drei usw. Dimensionen zu tun haben, sprechen wir von *Knotenpunkten, Knotenlinien, Knotenflächen* usw. Allgemein wollen wir das Wort *Knoten* gebrauchen.

Wir schicken die Bemerkung voraus, deren Beweis wir der Bequemlichkeit wegen in einem allgemeineren Zusammenhang erst ein wenig später nachholen werden, *daß die erste Eigenfunktion eines Eigenwertproblems keine Knoten im Innern des Grundgebietes besitzen kann.* Sie muß also überall dasselbe Vorzeichen haben, und *jede andere Eigenfunktion,* die auf ihr orthogonal steht, *muß daher Knoten besitzen.*

Danach lassen sich über die Lage bzw. Dichte der Knoten einige allgemeine Aussagen machen. Betrachten wir z. B. die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ bei der Randbedingung $u = 0$. Ist G' ein Gebiet, welches ganz in G liegt und keine Punkte von Knotenlinien von u_n enthält, so betrachten wir das kleinste von Knotenlinien der Funktion u_n begrenzte und G' enthaltende Teilgebiet G'' von G. Für dieses Gebiet G'' muß die Funktion u_n die erste Eigenfunktion, λ_n der kleinste Eigenwert sein. Andererseits ist nach unserem allgemeinen Satz 2 der erste Eigenwert von G'' nicht größer als der erste Eigenwert γ von G', und mithin ist $\gamma \geqq \lambda_n$. Ist z. B. G' ein Kreis vom Radius a, so ist $\gamma = \tau^2$, wo τ die kleinste Wurzel der Gleichung $J_0(a\tau) = 0$ ist. Es wird also $\gamma = \frac{k_{0,1}^2}{a^2}$, wenn wir in Übereinstimmung mit Kapitel V, § 7, 5 mit $k_{0,1}$ die erste Nullstelle der nullten Besselschen Funktion bezeichnen. Mithin erhalten wir $a^2 \leqq \frac{k_{0,1}^2}{\lambda_n}$, eine Beziehung, welche über die Dichtigkeit des Netzes der Knotenlinien soviel aussagt, wie man nur im allgemeinen erwarten kann. Berücksichtigt man die asymptotische Beziehung $\lambda_n \sim 4\pi \frac{n}{f}$ aus § 4, so erkennt man, daß bei hinreichend großem n jeder Kreis, dessen Flächeninhalt größer als $\frac{k_{0,1}^2 f}{4n}$ ist, Knotenlinien der n^{ten} Eigenfunktion enthalten muß. Nehmen wir statt eines Kreises ein Quadrat der Seitenlänge a, so ergibt sich entsprechend $a^2 \leqq 2\frac{\pi^2}{\lambda_n}$. Ganz analoge Aussagen wird der Leser bei anderen Problemen mit einer oder mehreren Variablen selbst ableiten können.

Ferner kann man über die Knoten einer Eigenfunktion den folgenden allgemeinen Satz beweisen: *Ordnet man die Eigenfunktionen einer sich selbst adjungierten Differentialgleichung* $L[u] + \lambda \varrho u = 0$ $(\varrho > 0)$ *für ein Gebiet* G *bei beliebigen homogenen Randbedingungen nach wachsenden Eigenwerten, so teilt die* n^{te} *Eigenfunktion* u_n *durch ihre Nullstellen das Gebiet in nicht mehr als* n *Teilgebiete. Dabei werden über die Ordnung der Differentialgleichung sowie über die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen keinerlei Voraussetzungen gemacht*[1]).

Der Einfachheit halber beziehen wir uns beim Beweise auf ein Gebiet G der xy-Ebene bei der Randbedingung $u = 0$. Es sei λ_n der n^{te} Eigenwert, also das Maximum-Minimum des zugehörigen Integrals $D[\varphi]$ unter der vorgeschriebenen Randbedingung und den Nebenbedingungen

$$\iint_G \varrho \varphi^2 \, dx \, dy = 1, \tag{48}$$

$$\iint_G \varrho \varphi v_i \, dx \, dy = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{49}$$

Wir nehmen an, daß die zugehörige Eigenfunktion u_n durch ihre Nullstellen das Gebiet G in mehr als n Teilgebiete $G_1, G_2, \ldots, G_n, G_{n+1} \ldots$ zerlege und definieren n Funktionen $w_1, w_2, \ldots, w_n$, von denen w_i in G_i mit u_n bis auf einen Normierungsfaktor übereinstimmt und außerhalb G_i verschwindet, während

$$\iint_G \varrho w_i^2 \, dx \, dy = 1$$

wird. Für eine lineare Kombination $\varphi = c_1 w_1 + \cdots + c_n w_n$, die selbst der Normierungsbedingung

$$\iint_G \varrho \varphi^2 \, dx \, dy = c_1^2 + \cdots + c_n^2 = 1$$

genügt, erkennt man durch Produktintegration sofort das Bestehen der Gleichung

$$D[\varphi] \geqq \lambda_n,$$

indem man beachtet, daß w_i der Gleichung $L[w_i] + \lambda_n \varrho w_i = 0$ genügt. Da man nun offenbar bei beliebig gegebenen Funktionen v_i stets die Koeffizienten c_i so bestimmen kann, daß außer (48) auch die Bedingungen (49) von φ erfüllt werden, so kann der n^{te} Eigenwert λ_n' des Gebietes $G' = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ für dieselbe Differentialgleichung und die Randbedingung $u = 0$ nicht größer als λ_n sein; er ist genau gleich λ_n,

[1]) Vgl. *Courant, R.:* Ein allgemeiner Satz zur Theorie der Eigenfunktionen selbstadjungierter Differentialausdrücke. Nachr. Ges. Göttingen (math.-phys.) 1923, Sitzung vom 13. Juli.

weil er nach Satz 2, § 2, 1 auch nicht kleiner als λ_n werden kann. Daraus folgt aber wieder nach Satz 3, daß für jedes Teilgebiet G'' von G, welches selber G' in sich enthält, der n^{te} Eigenwert genau gleich λ_n wird. Die für eine beliebige Anzahl m derartiger Gebiete G'', G''', ..., $G^{(m)}$, von denen jedes das vorangehende enthält, auf diese Weise erhaltenen Eigenfunktionen $u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(m)}$ bilden, wenn wir sie jeweils außerhalb des entsprechenden Intervalls in G als identisch Null fortsetzen, ein System von m linear unabhängigen[1]) Funktionen, die alle in G der Differentialgleichung $L[u_n^{(i)}] + \lambda_n u_n^{(i)} = 0$ genügen. Eine lineare Kombination

$$\varphi = \gamma_1 u_n^{(1)} + \cdots + \gamma_m u_n^{(m)}$$

mit nicht durchweg verschwindenden Koeffizienten γ_i kann dann so bestimmt werden, daß die $m - 1$ Bedingungen

$$\iint_G \varrho \varphi u_i \, dx \, dy = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1)$$

erfüllt sind, und, da φ wegen der linearen Unabhängigkeit der $u_n^{(i)}$ nicht identisch verschwinden kann, läßt sich gleichzeitig durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor die Normierung (48) erreichen. Dann muß aber wegen der Maximum-Minimumeigenschaft der m^{ten} Eigenfunktion

$$D[\varphi] \geqq \lambda_m$$

werden. Andererseits erhält man durch Ausrechnung mit Hilfe der Produktintegration

$$D[\varphi] = \lambda_n .$$

Wegen $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$ wird aber für hinreichend große m sicher $\lambda_m > \lambda_n$; also ergibt sich ein Widerspruch, der die Unmöglichkeit unserer obigen Annahme von mehr als n Gebieten $G_1, G_2, \ldots$ beweist. Daß der Beweis unseres Satzes auch bei einer anderen Anzahl von Variablen genau entsprechend verläuft, bedarf kaum der Hervorhebung.

Der so bewiesene allgemeine Satz läßt für den speziellen Fall des Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems $(py')' - qy + \lambda \varrho y = 0$ eine bemerkenswerte Präzisierung zu. Hier teilt nämlich die n^{te} Eigenfunktion das Grundgebiet auch in nicht weniger als n Teile, so daß also der Satz gilt: *Die n^{te} Eigenfunktion bei einem Sturm-Liouvilleschen Problem teilt durch ihre Knotenpunkte das Grundgebiet in genau n Teile.* Der Beweis wird am besten durch eine Kontinuitätsbetrachtung geführt,

[1]) Daß diese Funktionen linear unabhängig sind, sieht man unmittelbar, wenn man berücksichtigt, daß $u_n^{(k)}$ in keinem Teilgebiet von $G^{(k)}$ identisch Null sein kann. Diese Tatsache ist bei gewöhnlichen Differentialgleichungen eine Selbstverständlichkeit; bei partiellen ist sie eine Folge des elliptischen Charakters, worauf wir später in Bd. 2 noch zurückkommen werden.

deren Gedanke hier kurz wiedergegeben sei. Wir beschränken uns auf die Differentialgleichung $y'' + \lambda \varrho y = 0$. Mit $y(x, \lambda)$ bezeichnen wir eine von dem Parameter λ stetig abhängende, für $x = 0$ verschwindende Lösung dieser Differentialgleichung. Es ergibt sich sofort die Identität

$$y(x, \lambda_1) y'(x, \lambda) - y(x, \lambda) y'(x, \lambda_1) = (\lambda_1 - \lambda) \int_0^x \varrho y(x, \lambda) y(x, \lambda_1) dx .$$

Ist nun $x = \xi$ eine positive Nullstelle von $y(x, \lambda)$, so folgt

$$y(\xi, \lambda_1) y'(\xi, \lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \int_0^\xi \varrho y(x, \lambda) y(x, \lambda_1) dx .$$

Es sei nun $\lambda_1 > \lambda$ und so nahe bei λ, daß das Integral rechts positiv bleibt. Dann müssen $y(\xi, \lambda_1)$ und $y'(\xi, \lambda)$ dasselbe Vorzeichen haben. Nehmen wir an, daß bei $x = \xi$ die Funktion $y(x, \lambda)$ von negativen zu positiven Werten übergeht, daß also $y'(\xi, \lambda)$ positiv ist, so ist auch $y(\xi, \lambda_1)$ positiv. Da $y(\xi, \lambda_1)$ sich von $y(\xi, \lambda)$ bei hinreichend kleinem $\lambda_1 - \lambda$ beliebig wenig unterscheidet, also in der Nähe von $x = \xi$ von negativen Werten zu positiven übergehen muß, so liegt eine Nullstelle von $y(x, \lambda_1)$ links von ξ, und wir können sagen: *Bei stetiger Vergrößerung von λ rücken die Nullstellen der Funktion $y(x, \lambda)$ sämtlich nach links.* Für die erste Eigenfunktion gibt es im Innern des Grundgebietes keine Nullstelle, sondern nur in den beiden Enden. Wächst λ vom ersten Eigenwert bis zum zweiten Eigenwert, so rückt dabei die zweite Nullstelle von rechts in das Innere des Intervalls, und zwar so lange, bis der Endpunkt des Intervalls mit der dritten Nullstelle der Funktion zusammenfällt usw., wodurch der behauptete Satz evident wird.

Die hier bewiesene Tatsache beruht im Gegensatz zu dem obigen allgemeinen Resultate ganz wesentlich auf dem Umstande, daß man es mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung zu tun hat. Bei Eigenwertproblemen partieller Differentialgleichungen kann es vorkommen, daß noch beliebig große Werte von n existieren, für welche die Knoten der Eigenfunktion u_n das ganze Grundgebiet in nur zwei Teile teilen[1]).

§ 6. Das asymptotische Verhalten der Sturm-Liouvilleschen Eigenfunktionen und die Erweiterung der Entwicklungssätze.

Beim Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblem können wir nicht nur den asymptotischen Ausdruck des n^{ten} Eigenwerts, sondern sogar asymptotische Ausdrücke für die n^{te} Eigenfunktion bei großem n angeben. Diese asymptotischen Ausdrücke gestatten uns als wichtigste Anwendung eine wesentliche Erweiterung der Entwicklungssätze.

[1]) Beispiele dafür liefert in einfachster Weise die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ für ein Quadrat oder das Eigenwertproblem der Laplaceschen Kugelfunktionen.

1. Asymptotische Entwicklung der Eigenfunktionen. Wir gehen aus von der Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichung $(py')' - qy + \lambda \varrho y = 0$ für irgendein Grundgebiet G, z. B. wieder $0 \leqq x \leqq \pi$. Als Randbedingung nehmen wir der Einfachheit halber beiderseits $y = 0$. Durch die Transformation (18) auf S. 335 führen wir unser Eigenwertproblem zurück auf das Eigenwertproblem der Differentialgleichung

$$z'' - rz + \lambda z = 0, \tag{19}$$

wobei die unabhängige Variable t in einem Gebiete $0 \leqq t \leqq l$ läuft und r eine im abgeschlossenen Intervall stetige Funktion von t ist. Da bei großen Werten von λ unsere Differentialgleichung sich verhältnismäßig wenig von der Differentialgleichung $v'' + \lambda v = 0$ unterscheidet, so steht zu vermuten, daß sich die für $t = 0$ verschwindenden Lösungen der Differentialgleichung (19) bei hinreichend großen Werten des Parameters λ nur wenig von den Lösungen $a \sin \sqrt{\lambda}\, t$ der zweiten Differentialgleichung unterscheiden werden. Um dies genauer festzustellen, beachten wir, daß unsere Differentialgleichung mit der Beziehung

$$z(t) = a \sin \sqrt{\lambda}\, t + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t r(\tau)\, z(\tau) \sin \sqrt{\lambda}\,(t - \tau)\, d\tau \tag{50}$$

gleichbedeutend ist, wie man entweder durch Differentiation bestätigt oder unmittelbar der Auflösungsformel für die unhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (Kap. V, § 2, 3) entnimmt, wenn man statt der rechten Seite dort die Funktion rz einsetzt. Die Gleichung (50) ist aber nichts anderes, als eine sogenannte *Volterrasche Integralgleichung* (vgl. Kap. III, § 10, 7). Sie läßt sich sofort durch eine beständig konvergente Potenzreihe nach fallenden Potenzen von $\sqrt{\lambda}$ auflösen. Bevor wir diese Lösung diskutieren, ziehen wir aus (50) den Schluß, daß die für $t = 0$ verschwindende und der Bedingung $\int_0^l z^2\, dt = 1$ genügende Lösung $z(t; \lambda)$ der Differentialgleichung (19) gleichmäßig für alle λ beschränkt ist, was die schon früher (S. 343) behauptete *gleichmäßige Beschränktheit der Eigenfunktionen* nach sich zieht. Solange nämlich λ in einem bestimmten endlichen Intervall verbleibt, ist die Beschränktheit der in t und λ stetigen Funktion $z(t; \lambda)$ selbstverständlich. Ferner gilt für das Integral rechts in der Formel (50) nach der Schwarzschen Ungleichung die Abschätzung

$$\left| \int_0^t r(\tau)\, z(\tau) \sin \sqrt{\lambda}\,(t - \tau)\, d\tau \right| \leqq \int_0^l |r(\tau)|\, |z(\tau)|\, d\tau$$

$$\leqq \sqrt{\int_0^l r(\tau)^2\, d\tau \int_0^l z(\tau)^2\, d\tau} = \sqrt{\int_0^l r(\tau)^2\, d\tau}\,. \quad = M$$

Also ist auch dieses Integral beschränkt. Mithin muß die Konstante a, welche natürlich von λ abhängt, für alle λ beschränkt bleiben, wie man aus der Normierungsbedingung $\int_0^l z^2\,dt = 1$ mit Rücksicht auf (50) erkennt. Also bleibt auch $z(t)$ beschränkt.

Für die Konstante a ergibt sich nunmehr aus (50) und der Normierungsbedingung die genaue Abschätzung

$$a = \sqrt{\frac{2}{l}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad [1] \tag{51}$$

und die daraus folgende

$$z(t) - \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\sqrt{\lambda}\, t = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right). \tag{52}$$

Da der n^{te} Eigenwert λ_n der Differentialgleichung mit wachsendem n ins Unendliche strebt, so erhalten wir hieraus für die n^{te} Eigenfunktion $z_n(t)$ sofort die asymptotische Darstellung

$$z_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\sqrt{\lambda_n}\, t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} O(1).$$

Nun kennen wir für λ_n die asymptotische Abschätzung (vgl. § 2, 2)

$$\lambda_n = n^2 \frac{\pi^2}{l^2} + O(1). \tag{53}$$

Es ist somit $\sqrt{\lambda_n} = n\frac{\pi}{l} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, und daher

$$\sin\sqrt{\lambda_n}\, t = \sin n\frac{\pi}{l} t + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Danach ergibt sich für die normierten Eigenfunktionen der Differentialgleichung $z'' - rz + \lambda z = 0$ die asymptotische Darstellung

$$z_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin n\frac{\pi}{l} t + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{54}$$

Entsprechend findet man nach Differentiation der Volterraschen Integralgleichung (50) die Formel

$$z_n'(t) = n\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{2}{l}} \cos n\frac{\pi}{l} t + O(1). \tag{55}$$

---

[1] Wir benutzen hier die übliche Bezeichnungsweise, nach der unter $O(f(x))$ eine Funktion $g(x)$ verstanden wird, für die der Quotient $\left|\frac{g}{f}\right|$ bei wachsendem Argument beschränkt bleibt.

Für die ursprüngliche Differentialgleichung drückt sich das Resultat in den Beziehungen aus:

$$y_n(x) = c_n \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{l}\int_0^x \sqrt{\frac{\varrho}{p}}\,dx\right)}{\sqrt[4]{p\varrho}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{56}$$

wobei der Normierungsfaktor c_n festgelegt ist durch

$$\frac{1}{c_n^2} = \int_0^\pi \frac{\sin^2\left(n\frac{\pi}{l}\int_0^x \sqrt{\frac{\varrho}{p}}\,dx\right)}{\sqrt{p\varrho}}\,dx$$

und worin

$$l = \int_0^\pi \sqrt{\frac{\varrho}{p}}\,dx$$

ist. Entsprechend wird

$$y_n'(x) = c_n \frac{n\pi}{l} \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{l}\int_0^x \sqrt{\frac{\varrho}{p}}\,dx\right)}{\sqrt[4]{p\varrho}} \sqrt{\frac{\varrho}{p}} + O(1). \tag{57}$$

In genau derselben Weise erhält man bei den allgemeineren homogenen Randbedingungen die asymptotischen Ausdrücke für die Eigenfunktionen und deren Ableitungen. Es ergeben sich die Ausdrücke

$$z_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos n\frac{\pi}{l} t + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{58}$$

bzw.

$$z_n'(t) = -\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{2}{l}} \sin n\frac{\pi}{l} t + O(1), \tag{59}$$

die allgemein gelten, solange in der Randbedingung $z'(0) - hz(0) = 0$ der Koeffizient h endlich bleibt.

Aus unserer Volterraschen Integralgleichung können wir aber zu sehr viel genaueren Darstellungen der Eigenfunktionen bzw. ihrer Ableitungen gelangen, entsprechend dem schon in Kap. III hervorgehobenen Umstand, daß die *Neumannsche Reihe* einer solchen Volterraschen Integralgleichung beständig konvergiert[1]). Ohne auf die allgemeine Theorie zurückgreifen zu müssen, erhalten wir unmittelbar, indem wir in (50) für a den Wert 1 nehmen und damit auf die Normierung ver-

[1]) Vgl. *Liouville, J.*: J. math. pures appl. Bd. 1, 2 (siehe Literaturverzeichnis), wo die Volterrasche Integralgleichung und die Neumannsche Reihe ohne diese Personalbezeichnungen vorkommen.

zichten, sodann unter dem Integralzeichen rechts für $z(\tau)$ wieder den durch die Integralgleichung gegebenen Wert einsetzen und dies Verfahren wiederholen, mit der Abkürzung $v(t) = \sin\sqrt{\lambda}\,t$ die Formel

$$
(60)\quad \left\{\begin{aligned}
z(t) &= v(t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^t d\tau_1 v(\tau_1) r(\tau_1) \sin\sqrt{\lambda}(t-\tau_1)\\
&+ \frac{1}{\lambda}\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 v(\tau_2) r(\tau_1) r(\tau_2) \sin\sqrt{\lambda}(t-\tau_1)\sin\sqrt{\lambda}(\tau_1-\tau_2)\\
&+ \frac{1}{\sqrt{\lambda^3}}\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_3 v(\tau_3) r(\tau_1) r(\tau_2) r(\tau_3) \sin\sqrt{\lambda}(t-\tau_1)\\
&\qquad\qquad \sin\sqrt{\lambda}(\tau_1-\tau_2)\sin\sqrt{\lambda}(\tau_2-\tau_3)\\
&+ \dots.\\
&+ \frac{1}{\sqrt{\lambda^n}}\int_0^t d\tau_1 \dots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n z(\tau_n) r(\tau_1)\dots r(\tau_n)\sin\sqrt{\lambda}(t-\tau_1)\dots\\
&\qquad\qquad \sin\sqrt{\lambda}(\tau_{n-1}-\tau_n).
\end{aligned}\right.
$$

Wir sehen also, daß wir die nach fallenden Potenzen von $\sqrt{\lambda}$ fortschreitende Reihe ins Unendliche fortsetzen können und so eine für alle $\lambda > 0$ konvergente, nach fallenden Potenzen von $\sqrt{\lambda}$ fortschreitende Reihe für $z(t, \lambda)$ erhalten. Brechen wir die Reihe mit dem n^{ten} Gliede ab, so wird der Fehler von geringerer Größenordnung als $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^n$. Man sagt, *die Reihe zeigt ein asymptotisches Verhalten.* (Im Kap. VII werden wir übrigens nichtkonvergente Reihen mit asymptotischem Verhalten kennen lernen.)

2. Anwendung zur Verschärfung der Entwicklungssätze. Die asymptotischen Ausdrücke, die wir gefunden haben, erlauben uns in einfachster Weise die früher in § 3 bewiesenen Entwicklungssätze wesentlich zu verallgemeinern, und zwar den Satz zu beweisen, *daß jede im Grundgebiete stückweise stetige Funktion mit quadratisch integrierbarer erster Ableitung*[1]) *sich in eine Reihe nach den Eigenfunktionen entwickeln läßt, welche in allen von Sprungstellen der Funktion freien Teilgebieten absolut und gleichmäßig konvergiert und in den Sprungstellen wie die Fouriersche Reihe das arithmetische Mittel des rechten und linken Grenzwertes darstellt.* (Man beachte, daß dieser Satz von den zu entwickelnden Funktionen *nicht* die Erfüllung der Randbedingungen verlangt.)

[1]) Wir meinen mit quadratischer Integrierbarkeit der Ableitung, daß das Integral über das Quadrat der Ableitung für jedes der endlich vielen Intervalle des Grundgebietes endlich bleibt, für welches die Funktion stetig ist.

Wir betrachten zu diesem Zweck die Reihe

$$G(t,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n(t)\, z_n'(\tau)}{\lambda_n},$$

worin z_n wie bisher die n^{te} Eigenfunktion der Differentialgleichung (19), etwa für die Randbedingung $z = 0$, bedeutet.

Die Anwendung der asymptotischen Formeln (53), (54) und (55) ergibt

$$G(t,\tau) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{l}\, t \cos n\frac{\pi}{l}\, \tau}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t,\tau),$$

wobei $\psi_n(t,\tau) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ist, so daß sich $G(t,\tau)$ nur additiv um eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe unterscheidet von

$$G^*(t,\tau) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{l}\, t \cos n\frac{\pi}{l}\, \tau}{n}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin n\frac{\pi}{l}\,(t+\tau) + \sin n\frac{\pi}{l}\,(t-\tau) \right).$$

Von dieser Reihe wissen wir aber aus Kap. II, § 4, 3: Bei festem τ $(0 < \tau \leqq l)$ konvergiert sie absolut und gleichmäßig für alle t eines abgeschlossenen Intervalles, welches den Bedingungen $|t+\tau| > \varepsilon$, $|t-\tau| > \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ genügt; von diesen bleibt wegen $\tau > 0$, $t \geqq 0$ nur $|t-\tau| > \varepsilon$ übrig, was besagt, daß das Intervall den Punkt $t = \tau$ nicht enthalten darf. Während also die Reihe für $t \neq \tau$ eine stetige Funktion darstellt, besitzt ihre Summe für $t = \tau$ einen endlichen Sprung und ist dort gleich dem arithmetischen Mittel der beiderseitigen Grenzwerte.

Wenn wir bei einer willkürlichen Funktion, die den oben genannten Bedingungen genügt, durch Addition einer geeigneten Summe

$$\sum_i a_i G(\tau_i, t)$$

die Unstetigkeiten beseitigen, so erhalten wir eine Funktion, welche die Voraussetzungen des bereits in § 3 bewiesenen allgemeinen Entwicklungssatzes erfüllt und somit in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen entwickelt werden kann. Die hinzugefügte Summe aber ist nach den soeben erhaltenen Ergebnissen darstellbar durch eine Reihe nach Eigenfunktionen, welche die oben behaupteten Eigenschaften besitzt. Damit ist der Entwicklungssatz in der oben ausgesprochenen allgemeinen Form zunächst für die Eigenfunktionen der Differentialgleichung (19) bewiesen. Transformieren wir die Variabeln z, t wieder zurück in y, x und demgemäß die Differentialgleichung in die allgemeine Sturm-Liouvillesche Gestalt, so erhalten wir unmittelbar den Entwicklungssatz

auch für die Eigenfunktionen $y_n(x)$ der ursprünglichen Differentialgleichung, da diese aus den Eigenfunktionen z_n bis auf konstante Faktoren durch Multiplikation mit derselben nirgends verschwindenden Funktion entstehen.

3. Übertragung der Resultate auf die Besselschen und Legendreschen Funktionen. Die obigen Überlegungen verlieren zunächst ihre Anwendbarkeit, wenn ein Endpunkt des Grundgebietes ein singulärer Punkt der Differentialgleichung ist, in welchem z. B. q unendlich wird. Wir wollen am Beispiel der Besselschen Differentialgleichung zeigen, wie man in solchen Fällen die Schwierigkeiten umgehen kann. Ist $z_m(x)$ eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung, so gilt für $y = z_m\sqrt{x}$:

$$y'' + \left(1 - \frac{4m^2 - 1}{4x^2}\right) y = 0. \quad [1] \tag{61}$$

Setzen wir

$$y = \alpha \sin(x + \delta), \qquad y' = \alpha \cos(x + \delta),$$

wo $\alpha(x)$ und $\delta(x)$ zu bestimmende Funktionen von x mit den Ableitungen α' und δ' sind, so wird

$$y'' = \alpha' \cos(x+\delta) - \alpha(\delta' + 1)\sin(x+\delta) = \left(-1 + \frac{4m^2 - 1}{4x^2}\right)\alpha \sin(x+\delta),$$

$$\operatorname{tg}(x + \delta) = \frac{\alpha'}{\alpha\left(\delta' + \frac{4m^2 - 1}{4x^2}\right)};$$

$$y' = \alpha \cos(x + \delta) = \alpha' \sin(x + \delta) + \alpha(\delta' + 1)\cos(x + \delta),$$

$$\operatorname{tg}(x + \delta) = -\frac{\alpha\,\delta'}{\alpha'};$$

$$\operatorname{tg}^2(x + \delta) = -\frac{\delta'}{\delta' + \frac{4m^2 - 1}{4x^2}},$$

$$\delta' = -\frac{4m^2 - 1}{x^2}\sin^2(x + \delta), \tag{62}$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{-\delta'}{\operatorname{tg}(x + \delta)} = \frac{4m^2 - 1}{x^2}\sin(x + \delta)\cos(x + \delta). \tag{63}$$

Hiernach haben α und δ für $x \to \infty$ je einen bestimmten Grenzwert. Es ist nämlich $\delta(x) = \delta(\beta) - \int_x^\beta \delta'(\xi)\,d\xi$; lassen wir β über alle Grenzen wachsen, so konvergiert wegen (62) das Integral rechts, da der Integrand wie $\frac{1}{\xi^2}$ verschwindet. Also existiert $\lim_{\beta \to \infty} \delta(\beta) = \delta_\infty$, und die obige Darstellung zeigt außerdem, daß

$$\delta(x) = \delta_\infty + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

[1] Vgl. Kap. V, § 9, 1.

ist. Entsprechend ergibt sich aus der Formel (63) für $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{d}{dx}\log\alpha$ die Beziehung

$$\alpha(x) = \alpha_\infty\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

in der übrigens $\alpha_\infty \neq 0$ ist. Damit haben wir für jede Lösung y der Gleichung (61) die asymptotische Darstellung

$$y = \alpha\sin(x+\delta) = \alpha_\infty\sin(x+\delta_\infty) + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Die Werte der Konstanten α_∞ und δ_∞ für die durch ihr Verhalten bei $x = 0$ festgelegten Funktion J_n werden wir später durch andere Betrachtungen bestimmen; für den gegenwärtigen Zweck können wir auf ihre Bestimmung verzichten. (Vgl. Kap. VII, § 5, 3.)

Das Randwertproblem der Differentialgleichung

$$z'' + \frac{1}{x}z' + \left(\lambda - \frac{m^2}{x^2}\right)z = 0$$

oder

$$y'' + \left(\lambda - \frac{4m^2-1}{4x^2}\right)y = 0$$

mit der Randbedingung: z endlich bei $x = 0$ und $z'(1) + hz(1) = 0$ wird gelöst durch die Funktionen $z = J_m(\sqrt{\lambda}x)$, $y = \sqrt{x}\,J_m(\sqrt{\lambda}x)$ die bei $x = 1$ die Randbedingung erfüllen.

Man erkennt nun leicht, daß $\lambda_n = n^2\pi^2 + O(n)$ sein muß; denn die vorgelegte Randbedingung bedeutet, daß für $x = 1$ der Quotient $\frac{y'}{y}$ einen vorgegebenen Wert haben soll; d. h. aber es soll $\operatorname{tg}\left(\sqrt{\lambda_n} + \delta(\sqrt{\lambda_n})\right)$ einen vorgeschriebenen Wert c erhalten. Da $\delta(\sqrt{\lambda_n})$ bei wachsendem λ_n einem bestimmten Grenzwert zustrebt, so erhalten wir die Lösung der Gleichung $\operatorname{tg}\left(\sqrt{\lambda_n} + \delta(\sqrt{\lambda_n})\right) = c$ asymptotisch in der angegebenen Form, und es wird

$$\sqrt{\lambda_n} = n\pi + \operatorname{arctg} c - \delta_\infty + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

mit einer geeigneten Bestimmung von $\operatorname{arctg} c$. Daher folgt

$$\begin{aligned}\int_0^1 y(\sqrt{\lambda_n}x)^2\,dx &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^{\sqrt{\lambda_n}} y(t)^2\,dt \\ &= \frac{\alpha_\infty^2}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^{\sqrt{\lambda_n}}\sin^2(t+\delta_\infty)\,dt + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^{\sqrt{\lambda_n}} O(1)\,dt + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^{\sqrt{\lambda_n}} O\left(\frac{1}{t}\right)dt \\ &= \frac{\alpha_\infty^2}{2} + O\left(\frac{\log n}{n}\right).\end{aligned}$$

Indem wir nun die Überlegungen aus § 6, 1 auf die Differentialgleichung

anwenden, die aus (61) durch die Substitution $x_1 = 1 - x$ entsteht, und ein Intervall $\varepsilon < x < 1$ $(\varepsilon > 0)$ betrachten, erhalten wir die Formeln

$$y_n(x) = \sqrt{2}\cos n\pi(1-x) + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \qquad (h \text{ endlich})$$

bzw.

$$= \sqrt{2}\sin n\pi(1-x) + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \qquad (h = \infty)$$

und

$$y_n'(x) = \quad n\pi\sqrt{2}\sin n\pi(1-x) + O(\log n) \qquad (h \text{ endlich})$$

bzw.

$$y_n'(x) = -n\pi\sqrt{2}\cos n\pi(1-x) + O(\log n), \qquad (h = \infty)$$

und zwar bei festem ε gleichmäßig für alle $x > \varepsilon$ [1]). Hieraus folgt wieder die gleichmäßige Konvergenz der bilinearen und der differenzierten bilinearen Reihe und damit die Entwickelbarkeit aller stückweise stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Funktionen für die betrachteten Intervalle, *so daß also auch für die Besselschen Funktionen der Entwicklungssatz in demselben Umfange bewiesen ist wie früher für die Fourierschen Reihen.*

In ganz ähnlicher Weise und mit demselben Ergebnis kann man bei den *Legendreschen Funktionen* vorgehen; doch soll diese Betrachtung hier nicht durchgeführt werden, zumal ohnehin im nächsten Kapitel auch für die Legendreschen Funktionen asymptotische Formeln entwickelt werden.

§ 7. Ergänzungen und Aufgaben zum sechsten Kapitel.

1. Ableitung der Minimumeigenschaften der Eigenwerte aus ihrer Vollständigkeit. Wenn man sich auf den Standpunkt stellt, daß man die Existenz der Eigenwerte und Eigenfunktionen und deren Vollständigkeit kennt, so lassen sich ihre Extremumeigenschaften auf folgendem Wege ableiten. Es handle sich um die Differentialgleichung

$$L[u] + \lambda\varrho u = 0$$

für das zweidimensionale Gebiet G und die Randbedingung $u = 0$. Die Eigenfunktionen seien $u_1, u_2, \ldots$. Wir zeigen zunächst, daß für alle in G mit ihrer ersten Ableitung stetigen und mit einer stückweise stetigen zweiten Ableitung versehenen Funktionen φ, die auf dem Rande Γ verschwinden und den Bedingungen

$$(3) \qquad \iint_G \varrho\varphi^2\,dx\,dy = 1$$

$$(9) \qquad \iint_G \varrho\varphi u_i\,dx\,dy = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

[1]) Vgl. hierzu Kap. VII, § 5.

genügen, das Integral

$$D[\varphi] \geqq \lambda_n$$

wird. Aus der Greenschen Formel folgt nämlich wegen der Randbedingung $\varphi = 0$:

$$D[\varphi] = -\iint_G \varphi L[\varphi]\, dx\, dy,$$

und die Vollständigkeitsrelation, angewandt für die Funktionen φ und $\frac{L(\varphi)}{\varrho}$, ergibt weiter

$$D[\varphi] = -\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \iint_G u_i L[\varphi]\, dx\, dy \tag{64}$$

mit

$$\gamma_i = \iint_G \varrho\, \varphi\, u_i\, dx\, dy.$$

Für die Integrale in (64) folgt nach der Greenschen Formel unter Berücksichtigung von $L[u_i] = -\lambda_i \varrho\, u_i$:

$$D[\varphi] = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \gamma_i^2. \tag{65}$$

Da nun nach (9)

$$\gamma_i = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

und nach (3) wegen der Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^2 = 1$$

ist, so folgt unmittelbar, wenn die λ_i nach wachsender Größe geordnet sind:

$$D[\varphi] \geqq \lambda_n.$$

Man erhält ferner, wie schon früher gezeigt, durch einfache Ausrechnung

$$D[u_n] = \lambda_n,$$

so daß die Minimaleigenschaft der n^{ten} Eigenfunktion gegenüber den oben bezeichneten Funktionen φ bereits bewiesen ist. Daß sie auch für solche Funktionen φ besteht, von denen nur Stetigkeit und Existenz einer stückweise stetigen ersten Ableitung vorausgesetzt wird, folgt aus dem Umstande, daß man eine solche Funktion mit ihrer Ableitung stets durch Funktionen der oben gekennzeichneten Klasse derart approximieren kann, daß sich die zugehörigen Integrale $D[\varphi]$ beliebig wenig unterscheiden. (Vgl. hierzu die Überlegungen in Kap. IV, § 3, 1.)

2. Andere Minimumeigenschaften der Eigenwerte. Man beweise folgenden Satz: Das Problem, den Integralausdruck

$$D[v_1, \ldots, v_n] = \mathfrak{D}[v_1] + \cdots + \mathfrak{D}[v_n]$$

zum Minimum zu machen, wobei zur Konkurrenz alle Systeme von n zueinander orthogonalen, normierten, im Grundgebiet mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung versehenen Funktionen zugelassen werden, wird gelöst durch die Funktionen $v_i = u_i$ oder irgend ein durch orthogonale Transformation aus diesen Funktionen entstehendes Funktionensystem. Dabei sind die Funktionen $u_1, \ldots, u_n$ die ersten n zur Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ gehörigen Eigenfunktionen des Gebietes. Der Minimalwert ist gleich der Summe der ersten n Eigenwerte $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

Man beweise ferner folgenden Satz: Sind $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ stetige Funktionen in G und bedeutet $d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ die untere Grenze des Integralausdruckes $\mathfrak{D}[\varphi]$, wobei φ außer den üblichen Stetigkeitsbedingungen noch der einzigen Nebenbedingung

$$\iint_G \varrho \varphi^2 \, dx \, dy - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\iint_G \varrho \varphi v_i \, dx \, dy \right)^2 = 1$$

unterworfen wird, so ist der n^{te} Eigenwert λ_n gleich dem Maximum von $d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ welches für $v_1 = u_1, \ldots, v_{n-1} = u_{n-1}$; $\varphi = u_n$ angenommen wird.

Diese Formulierung[1]) ist deshalb bemerkenswert, weil sie nur die eine quadratische Nebenbedingung braucht und auf die linearen verzichten kann. Allerdings muß man dafür eine etwas kompliziertere aus dem üblichen Rahmen der isoperimetrischen Probleme herausfallende Gestalt der Nebenbedingung in Kauf nehmen.

Die Übertragung dieser Formulierung auf das entsprechende elementare Problem bei quadratischen Formen soll dem Leser als Aufgabe überlassen bleiben.

3. Direkte Ableitung der Eigenwertgleichung. Bei unseren linearen Eigenwertproblemen kann man die Differentialgleichung aus dem Variationsproblem leicht ohne Berufung auf die allgemeine Theorie folgendermaßen ableiten. Wir betrachten z. B. das Variationsproblem

$$D[\varphi] = \text{Min.}$$

unter der Nebenbedingung

$$\iint_G \varphi^2 \, dx \, dy = 1$$

bei der Randbedingung $\varphi = 0$ und verlangen von den zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen die Existenz der Ableitungen jeder Ordnung.

---

[1]) Wir verdanken sie Herrn stud. math. K. Friedrichs.

Gibt es eine Lösung u, so muß für jede Variation $\zeta(x, y)$, welche der Orthogonalitätsbedingung

$$\iint_G \zeta u \, dx \, dy = 0 \tag{66}$$

und der Randbedingung $\zeta = 0$ genügt, auch die Gleichung

$$D[u, \zeta] = 0$$

oder nach partieller Integration

$$\iint_G \zeta L[u] \, dx \, dy = 0 \tag{67}$$

erfüllt sein. Da man eine beliebige stetige, auf u orthogonale, aber nicht notwendig der Randbedingung $\zeta = 0$ genügende Funktion ζ durch eine den obigen Bedingungen genügende so approximieren kann, daß die obigen Integrale dabei beliebig wenig von Null verschieden bleiben, so gelten die angegebenen Bedingungen für eine beliebige stetige auf u orthogonale Funktion ζ. Addieren wir die Gleichung (67) zu der mit einem Parameter λ multiplizierten Gleichung (66), so folgt

$$\iint_G \zeta (L[u] + \lambda u) \, dx \, dy = 0.$$

Wir bestimmen nun λ so, daß die Funktion $L[u] + \lambda u$ auf u orthogonal steht, d. h. wir setzen

$$\lambda = -\iint u L[u] \, dx \, dy = D[u];$$

dann können wir $\zeta = L[u] + \lambda u$ nehmen, und es wird

$$\iint_G (L[u] + \lambda u)^2 \, dx \, dy = 0,$$

mithin wegen der Stetigkeit des Integranden

$$L[u] + \lambda u = 0.$$

4. Stetigkeitseigenschaft der Eigenwerte bei unendlich werdendem σ. Bei der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ unter der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$, wobei $\sigma \geqq 0$ auf dem Rande Γ konstant sei, ist, wie wir in § 2, 4 sahen, der n^{te} Eigenwert $\mu_n = \mu_n(\sigma)$ eine monoton nicht abnehmende Funktion von σ. Die naheliegende Vermutung, daß $\lim_{\sigma \to \infty} \mu_n(\sigma) = \lambda_n$, dem n^{ten} zur Randbedingung $u = 0$ gehörigen Eigenwerte sein wird, ist in der Tat richtig. Zu ihrem Beweise muß man etwas näher auf die Eigenfunktionen $u_n(x, y) = u_n(x, y; \sigma)$ eingehen, was im zweiten Bande geschehen soll. Es zeigt sich dann, daß beim Grenzübergang $\sigma \to \infty$ die Eigenfunktionen $u_n(x, y)$ für die Rand-

bedingung $u = 0$ sich ergeben, und daraus läßt sich leicht das ausgesprochene Resultat schließen. Zugleich ergibt sich, daß in den Integralen $\mathfrak{D}[u_n(x, y; \sigma)]$ der Randbestandteil $\int_{\sigma} u_n^2 ds$ mit wachsendem σ gegen Null konvergiert.

5. Asymptotische Eigenwertverteilung bei der schwingenden Platte. Für die Differentialgleichung $\Delta\Delta u - \lambda u = 0$ der schwingenden Platte gilt bei den Randbedingungen $u = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ (eingespannte Platte) die asymptotische Abschätzung

$$A(\lambda) \sim \frac{f}{4\pi}\sqrt{\lambda},$$

woraus folgt

$$\lambda_n \sim \left(\frac{4\pi n}{f}\right)^2.$$

Dabei ist wie früher $A(\lambda)$ die Anzahl der Eigenwerte unterhalb der Schranke λ, ferner λ_n der n^{te} Eigenwert und f der Flächeninhalt der Platte. Wir können also auch sagen: Der n^{te} Eigenwert der eingespannten Platte ist mit wachsendem n asymptotisch gleich dem Quadrate des n^{ten} Eigenwertes der eingespannten Membran. Insbesondere hängt er wiederum nur von der Größe, nicht von der Gestalt der Platte ab. Analoges gilt in drei Dimensionen[1]).

6. Aufgabe. Man leite die Gesetze der asymptotischen Eigenwertverteilung für die Sturm-Liouvillesche Differentialgleichung (vgl. die Resultate von § 6), sowie für gewöhnliche Differentialgleichungen vierter Ordnung nach der Methode von § 4, 2 ab.

7. Aufgabe. Man stelle die Gesetze der asymptotischen Eigenwertverteilung auf für elliptische sich selbst adjungierte Differentialgleichungen, die aus einem beliebigen definiten quadratischen Variationsproblem entspringen.

8. Aufgabe. Man führe die Behandlung zweiparametriger Eigenwertprobleme (siehe das Lamésche Problem aus Kap. V, § 9, 5) mit Methoden der Variationsrechnung durch.

9. Parameter in den Randbedingungen. Die Eigenwertprobleme, bei denen, wie in Kap. V, § 12, 12, der Parameter in der Randbedingung auftritt, lassen sich vom Standpunkte der Variationsrechnung aus ebenfalls leicht beherrschen. Im Falle der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ und der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = \lambda u$ handelt es sich darum, ein Integral

$$\iint (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy$$

[1]) Vgl. *Courant, R.:* Über die Schwingungen eingespannter Platten. Math. Zeitschr. Bd. 15, S. 195—200. 1922.

zum Minimum zu machen, während für das Randintegral von φ^2 eine Beziehung

$$\int \varphi^2 ds = 1$$

besteht und außerdem noch geeignete lineare Nebenbedingungen gestellt werden. Der Leser möge diesen Ansatz selbständig weiter verfolgen.

10. Minimumsätze für Membran und Platte. Unter allen eingespannten Membranen oder Platten von gegebenem Umfang oder Flächeninhalt, gegebener konstanter Dichte und Elastizität haben die kreisförmigen den tiefsten Grundton. Für den Fall gegebenen Umfanges sind die Sätze bewiesen (vgl. die erste unten zitierte Arbeit), für den Fall gegebenen Flächeninhalts bleibt der Beweis eine dankbare Aufgabe.

11. Minimumprobleme bei variabler Massenverteilung. Man beweise folgende Sätze, welche interessante Beispiele zur Variationsrechnung darstellen:

Der Grundton einer eingespannten Saite gegebener gleichmäßiger Spannung, auf welcher eine gegebene Gesamtmasse verteilt ist, wird möglichst tief, wenn die Gesamtmasse im Mittelpunkt konzentriert ist.

Man beweise die analogen Resultate für eine Membran und eine Platte.

Literatur zum sechsten Kapitel.

Courant, R.: Beweis des Satzes, daß von allen homogenen Membranen gegebenen Umfanges und gegebener Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton besitzt. Math. Zeitschr. Bd. 1, S. 321—328. 1918. — Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Ib. Bd. 7, S 1—57. 1920. — Über die Schwingungen eingespannter Platten. Ib. Bd. 15, S. 195—200. 1922. — Ein allgemeiner Satz zur Theorie der Eigenfunktionen selbstadjungierter Differentialausdrücke. Nachr. Ges. Göttingen (math.-phys.) 1923, Sitzung vom 13. Juli.

Kneser, A.: Integralgleichungen; vgl. Literatur zu Kap. 3.

Liouville, J.: Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujetis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable. J. math. pures appl. Ser. 1, Bd. 1, S. 253—265. 1836. — Ib. Bd. 2, S. 16—35, 418—436. 1837.

Weyl, H.: Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung). Math. Ann. Bd. 71, S. 441—479. 1912. — Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran von deren Begrenzung. J. reine angew. Math. Bd. 141, S. 1—11. 1912. — Über das Spektrum der Hohlraumstrahlung. Ib. S. 163—181. — Über die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie und asymptotische Spektralgesetze. Ib. Bd. 143, S. 177—202. 1913.

Siebentes Kapitel.

Spezielle durch Eigenwertprobleme definierte Funktionen.

§ 1. Vorbemerkungen über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wir wollen in diesem Kapitel auf einige der schon früher definierten Funktionenklassen näher eingehen, nämlich auf die Legendreschen Funktionen, die allgemeinen Laplaceschen Kugelfunktionen und die Besselschen Funktionen. Dabei werden wir uns auf einen etwas allgemeineren Standpunkt stellen als in den vorangehenden Kapiteln. Wir wollen nämlich die unabhängige Variable beliebige komplexe Werte durchlaufen lassen und demgemäß unsere Funktionen als Funktionen einer komplexen Variablen mit Hilfe der Methoden der Funktionentheorie untersuchen, wobei ganz von selbst der Rahmen der Untersuchung sich wesentlich erweitern und allgemeinere Funktionen als die ursprünglich ins Auge gefaßten einschließen wird.

Unsere Funktionen hatten wir definiert als Lösungen gewisser gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Wir wollen als bekannt voraussetzen, daß jede solche Differentialgleichung auch bei komplexer unabhängiger Variabler x zwei linear unabhängige Lösungen besitzt, aus denen sich die allgemeinste mit konstanten Koeffizienten linear zusammensetzen läßt, und daß alle Lösungen überall da reguläre analytische Funktionen von x sind, wo die Koeffizienten der Differentialgleichung diesen Charakter haben. Durch solche lineare Differentialgleichungen werden zahlreiche neue und wichtige Funktionenklassen definiert, die sich nicht unmittelbar auf die elementaren transzendenten Funktionen reduzieren lassen, aber vielfach durch Integrale über elementare Funktionen ausgedrückt werden können. Um zu diesen Integraldarstellungen zu kommen, bedient man sich zweckmäßigerweise in vielen Fällen der sogenannten *Laplaceschen Transformation*, welche darauf beruht, daß man an Stelle der unbekannten Funktion $y(x)$ eine neue unbekannte Funktion $z(t)$ durch die Gleichung

$$y(x) = \int_C z(t)\, e^{xt}\, dt \tag{1}$$

einführt, wobei der Integrationsweg C zunächst noch vorbehalten bleibt. Wie wir sogleich im nächsten Paragraphen sehen werden, leistet eine solche Transformation für die Integration der Differentialgleichung in der Tat oft nützliche Dienste.

Man gelangt zu dem Ansatz der Laplaceschen Transformation ganz naturgemäß, indem man sich zunächst daran erinnert, daß bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung $ay'' + by' + cy = 0$ mit konstanten Koeffizienten die Lösungen von der Form sind: αe^{tx} oder $\alpha' e^{t'x}$, wobei die Exponenten t und t' aus den Koeffizienten als Wurzeln der quadratischen Gleichung $at^2 + bt + c = 0$ bestimmt werden. Denken wir uns nun, unter Beschränkung auf reelle Werte von a, b, c, x, das betrachtete Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$ in eine große Anzahl, etwa n Teile $G_1, G_2, \ldots, G_n$ geteilt und die Koeffizienten der Differentialgleichung in jedem Intervall konstant, aber von Intervall zu Intervall variabel, so können wir uns die Lösung durch Superposition von n Funktionen zusammengesetzt denken. Jede dieser Funktionen genügt in einem der Intervalle G_h unserer Differentialgleichung und ist außerhalb identisch Null; sie hat dann in ihrem Intervall die Form $\alpha_h e^{t_h x} + \alpha_h' e^{t_h' x}$. Indem man diese Ausdrücke summiert, wobei die Summanden nach den Werten von t anzuordnen sind, und dann den Grenzübergang $n \to \infty$ macht, wird man direkt zu dem Ansatz von Laplace geführt.

§ 2. Die Besselschen Funktionen.

Wir betrachten zunächst die Besselschen Funktionen und erweitern unsere Aufgabe sogleich, indem wir verlangen, die sämtlichen Lösungen der Besselschen Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{2}$$

aufzufinden und zu untersuchen, wobei sowohl x als auch der Parameter λ als komplexe Größen angesehen werden sollen.

1. Anwendung der Laplaceschen Transformation. Wir versuchen die Integration von (2) durch die Laplacesche Transformation (1) zu leisten, wobei der Integrationsweg C in der Ebene der komplexen Variablen t geeignet zu bestimmen ist.

Da e^{xt} eine in der ganzen t-Ebene eindeutige und reguläre Funktion ist, dürfen wir unter dem Integralzeichen nach x differenzieren — vorausgesetzt, daß die differenzierten Integrale, falls sie uneigentlich sind, gleichmäßig in x konvergieren — und erhalten:

$$y' = \int_C z(t)\, t\, e^{xt}\, dt, \qquad y'' = \int_C z(t)\, t^2\, e^{xt}\, dt.$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung folgt

$$\int_C \left[z(t)\, t^2 e^{xt} + \frac{1}{x} z(t)\, t\, e^{xt} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right) z(t)\, e^{xt} \right] dt = 0 .$$

Da $x e^{xt}$ und $x^2 e^{xt}$ die erste und zweite Ableitung von e^{xt} nach t sind, ergibt sich nach Multiplikation mit x^2

$$\int_C \left[(t^2+1)\, z \frac{d^2 e^{xt}}{dt^2} + tz \frac{d e^{xt}}{dt} - \lambda^2 z e^{xt} \right] dt = 0 .$$

Wir formen die beiden ersten Glieder, die Ableitungen nach der Integrationsveränderlichen t enthalten, durch partielle Integration um.

Wenden wir die Formel

$$\int (PQ' - P'Q)'\, dt = \int PQ''\, dt - \int P''Q\, dt ,$$

worin P und Q zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen von t bedeuten mögen, auf

$$P = (t^2+1)\, z(t) , \qquad Q = e^{xt}$$

an, wozu $z(t)$ als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt werden muß, so folgt für das erste Glied

$$\int_C (t^2+1)\, z \frac{d^2 e^{xt}}{dt^2}\, dt = \int_C \frac{d^2 (t^2+1)\, z}{dt^2} e^{xt}\, dt + \int_C \frac{d}{dt} \left\{ (t^2+1)\, z\, x\, e^{xt} - \frac{d\,(t^2+1)\, z}{dt} e^{xt} \right\} dt .$$

Für das zweite Glied gilt

$$\int_C tz \frac{d e^{xt}}{dt}\, dt = \int_C \frac{d\,(tz\, e^{xt})}{dt}\, dt - \int_C \frac{d\,(tz)}{dt} e^{xt}\, dt ;$$

daher ergibt sich durch Einsetzen

$$\int_C e^{xt} \left\{ \frac{d^2 (t^2+1)\, z}{dt^2} - \frac{d\,(tz)}{dt} - \lambda^2 z \right\} dt + \int_C \frac{d}{dt} \left\{ (t^2+1)\, z\, x\, e^{xt} - \frac{d\,(t^2+1)\, z}{dt} e^{xt} + tz e^{xt} \right\} dt = 0 .$$

Das zweite Integral ist gleich der Differenz der Funktionswerte des Klammerausdruckes am Ende und am Anfang von C, verschwindet also, wenn die Klammer beide Male den gleichen Wert besitzt. Damit das erste Integral verschwindet, setzen wir die darin auftretende Klammer identisch gleich Null und erhalten so eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für z:

$$\frac{d^2 (t^2+1)\, z(t)}{dt^2} - \frac{d\,tz(t)}{dt} - \lambda^2 z(t) = 0 .$$

Wir sind von einer Differentialgleichung zweiter Ordnung für y ausgegangen; es könnte also scheinen, als ob durch die Laplacesche Transformation nichts gewonnen sei; aber die Differentialgleichung für z läßt sich leichter integrieren als die für y.

Die beiden ersten Glieder können, zusammengefaßt, folgendermaßen umgeformt werden:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}[(t^2+1)z] - tz\right) = \frac{d}{dt}\left((t^2+1)z' + tz\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{\sqrt{t^2+1}\,\frac{d}{dt}\left(z\sqrt{t^2+1}\right)\right\};$$

die Differentialgleichung lautet also

$$\frac{d}{dt}\left\{\sqrt{t^2+1}\,\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t^2+1}\,z\right)\right\} = \lambda^2 z.$$

Diese Differentialgleichung kann auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt werden. Können wir nämlich z so bestimmen, daß

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t^2+1}\,z\right) = \pm\lambda z$$

wird, so ist auch die Differentialgleichung zweiter Ordnung gelöst; denn ihre linke Seite wird hiernach:

$$\frac{d}{dt}\left\{\sqrt{t^2+1}\,\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t^2+1}\,z\right)\right\} = \pm\lambda\,\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t^2+1}\right)z = \pm\lambda(\pm\lambda z) = \lambda^2 z.$$

Wir verlangen nun, daß $\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t^2+1}\,z\right) = -\lambda z$ wird, oder, indem wir beide Seiten durch $\sqrt{t^2+1}\,z$ dividieren:

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t^2+1}\,z\right)}{\sqrt{t^2+1}\,z} = \frac{-\lambda}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Durch Integration folgt

$$\log\sqrt{t^2+1}\,z = \lambda\log\left(\sqrt{t^2+1} - t\right),$$

wobei wir die Integrationskonstante gleich Null wählen, da wir nur eine partikuläre Lösung suchen. Es ergibt sich also die Lösung

$$z = \frac{\left(\sqrt{t^2+1} - t\right)^\lambda}{\sqrt{t^2+1}},$$

die eine mehrdeutige Funktion von t ist. Um sie eindeutig zu machen, müssen wir die komplexe t-Ebene aufschneiden. Verzweigungspunkte von z sind die Nullstellen des Nenners, also $t = \pm i$, und, falls λ keine ganze rationale Zahl ist, der Punkt $t = \infty$. Andere Verzweigungspunkte gibt es nicht, da der Zähler für keinen endlichen Wert von t verschwindet.

Die Funktion z wird also eindeutig, wenn wir von $+i$ und $-i$ Schnitte nach ∞ führen, die wir folgendermaßen wählen: Von $+i$ längs der positiven imaginären Achse bis zu einem beliebig kleinen positiv rein imaginären Wert $\varepsilon i\,(\varepsilon > 0)$, dann parallel der negativen reellen Achse nach $-\infty$ und entsprechend von $-i$. Wir wählen einen bestimmten Zweig der Wurzel $\sqrt{t^2+1}$, und zwar den, der für reelle t positiv ist, und von $(\sqrt{t^2+1}-t)^\lambda = e^{\lambda \log(\sqrt{t^2+1}-t)}$ den, in dem der Logarithmus seinen Hauptwert hat, d. h. reell ist für reelle t und reelle positive Werte von $\sqrt{t^2+1}-t$, also für alle reellen t.

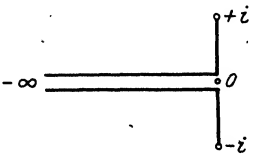


Abb. 13. t-Ebene.

2. Diskussion des Integrationsweges. Hankelsche Funktionen. Den Integrationsweg C in der aufgeschnittenen t-Ebene legen wir so, daß

$$\left\{(t^2+1)\,z\,x\,e^{xt} - \frac{d\,(t^2+1)\,z}{dt}\,e^{xt} + t\,z\,e^{xt}\right\} \tag{3}$$

an den Enden von C gleiche Werte hat. Einen im Endlichen geschlossenen Weg können wir nicht wählen, da dann wegen des Cauchyschen Integralsatzes

$$y = \int_C z\,(t)\,e^{xt}\,dt$$

identisch verschwinden würde. Wir legen den Integrationsweg C so, daß er einen der Verzweigungsschnitte umschließt und daß die Größe (3) an beiden Enden den gleichen Wert, nämlich Null, annimmt. Dies trifft, falls $x = \xi + i\eta$ gesetzt und $\xi > 0$ gewählt wird, für reelles

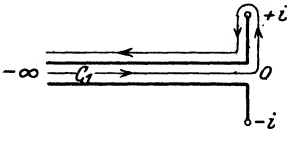


Abb. 14. t-Ebene.

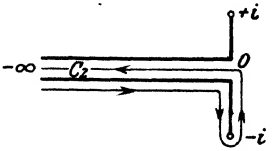


Abb. 15. t-Ebene.

negativ unendlich großes t zu; denn setzen wir $t = -t'$ und lassen t' über reelle Werte nach $+\infty$ wachsen, so wird $|e^{-xt}| = e^{-\Re(xt)} = e^{-\xi t} = e^{\xi t'}$ stärker unendlich als irgend eine Potenz von t', also $|e^{xt}|$ stärker Null als irgend eine Potenz von $\frac{1}{t}$, und da tz, $(t^2+1)\,z$, $\frac{d}{dt}[(t^2+1)\,z]$ nicht stärker unendlich werden als eine Potenz von t', so wird

$$\left\{(t^2+1)\,z\,x\,e^{xt} - \frac{d\,(t^2+1)\,z}{dt}\,e^{xt} + t\,z\,e^{xt}\right\} \to 0$$

für $t \to -\infty$.

Wir führen demgemäß einen Integrationsweg C_1 längs der negativen reellen Achse von $-\infty$ bis 0, dann von 0 am rechten Ufer des

Verzweigungsschnittes entlang nach $+i$, dann um $+i$ herum und am anderen Ufer des Verzweigungsschnittes entlang zurück nach $t = -\infty$, und entsprechend den Integrationsweg C_2 um den anderen Verzweigungsschnitt herum; beide sollen in dem in den Abbildungen 14 und 15 durch Pfeile bezeichneten Sinne durchlaufen werden. Wir dürfen die zwei der reellen Achse parallelen Teile der Verzweigungsschnitte gegen die reelle Achse konvergieren lassen, wenn nur in den betreffenden Teilen der Integrationswege C_1 und C_2 das Vorzeichen von $\sqrt{t^2+1}$ richtig gewählt wird.

Indem wir das eine Mal C_1, das andere Mal C_2 als Integrationsweg wählen, erhalten wir also zwei Lösungen y. Die jeweils für y, y', y'' erhaltenen Integrale konvergieren gleichmäßig in x, denn der Integrand hat die Majorante $t'^k e^{-\xi t'}$, und $\int_0^\infty t'^k e^{-\xi t'} dt'$ konvergiert für $\xi > 0$, und zwar gleichmäßig für $\xi \geqq \xi_0 > 0$. Die Differentiation unter dem Integralzeichen, wie sie oben ausgeführt wurde, ist also erlaubt.

Man bezeichnet:

$$\frac{1}{\pi i}\int_{C_1} e^{xt}\frac{(\sqrt{t^2+1}-t)^\lambda}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = H_\lambda^1(x) \tag{4}$$

als *erste Hankelsche Funktion* und

$$\frac{1}{\pi i}\int_{C_2} e^{xt}\frac{(\sqrt{t^2+1}-t)^\lambda}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = H_\lambda^2(x) \tag{4'}$$

als *zweite Hankelsche Funktion*. Wir müssen später noch besonders beweisen, daß die Funktionen $H_\lambda^1(x)$ und $H_\lambda^2(x)$ nicht identisch verschwinden, und darüber hinaus, daß sie linear unabhängig sind.

Um die Wurzel $\sqrt{t^2+1}$ aus den Formeln zu beseitigen, führen wir eine neue Integrationsveränderliche τ ein, indem wir

$$t = -i\sin\tau, \quad \sqrt{t^2+1} = \cos\tau$$

setzen[1]; dann wird

$$\sqrt{t^2+1} - t = e^{i\tau}, \qquad i\tau = \log(\sqrt{t^2+1} - t),$$
$$\sqrt{t^2+1} + t = e^{-i\tau}, \quad -i\tau = \log(\sqrt{t^2+1} + t),$$
$$dt = -i\cos\tau\,d\tau = -i\sqrt{t^2+1}\,d\tau.$$

Die Integrale $H_\lambda^1(x)$, $H_\lambda^2(x)$ unterscheiden sich nur durch den Integrationsweg. Sehen wir von diesem zunächst ab, so ergibt sich durch Einsetzen der obigen Werte für beide Funktionen ein Ausdruck der Form

$$H_\lambda(x) = -\frac{1}{\pi}\int_L e^{-ix\sin\tau + i\lambda\tau}\,d\tau.$$

[1]) Der funktionentheoretische Sinn dieser Transformation ist die Verwandlung des Integranden aus einer vieldeutigen in eine eindeutige Funktion.

Die Integrationswege von $H_\lambda^1(x)$ und $H_\lambda^2(x)$ sind die Bilder von C_1 und C_2 in der τ-Ebene.

Läuft t in C_1 von $-\infty$ nach 0, so ist dort $\sqrt{t^2+1} > 0$, also geht $i\tau$ von $+\infty$ nach 0, τ von $-i\infty$ nach 0 durch rein imaginäre Werte; geht weiter t von 0 bis $+i$, so ändert sich $\sin\tau$ von 0 bis -1, $\cos\tau$ von 1 bis 0, also τ von 0 bis $-\frac{\pi}{2}$; läuft dann t von $+i$ bis 0, so ist dort $\sqrt{t^2+1} < 0$, und es geht $\sin\tau$ von -1 bis 0, $\cos\tau$ von 0 bis -1, also τ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $-\pi$. Für $t=0$ ist $\tau=-\pi$, $-i\tau=\pi i$, und für negative Werte von $(\sqrt{t^2+1}+t)$ ist $\log(\sqrt{t^2+1}+t) = \pi i + \log|\sqrt{t^2+1}+t|$. Variiert also t zwischen 0 und $-\infty$, so geht $|\sqrt{t^2+1}+t|$ von 1 nach ∞, $\log|\sqrt{t^2+1}+t|$ von 0 nach ∞, daher $-i\tau$ von πi nach $\pi i+\infty$, τ von $-\pi$ nach $-\pi+i\infty$.

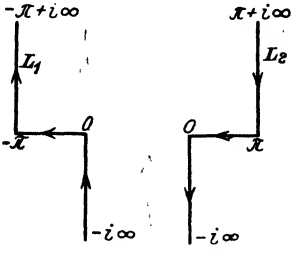


Abb. 16. Abb. 17.
τ-Ebene.

Das Bild L_1 von C_1 in der τ-Ebene ist also das folgende: Von $-i\infty$ nach 0 längs der negativen imaginären Achse, von 0 bis $-\pi$ längs der negativen reellen Achse, dann parallel der positiv imaginären Achse nach $-\pi+i\infty$.

Das Bild L_2 von C_2 wird entsprechend gefunden.

Wir haben also die Hankelschen Funktionen

$$H_\lambda^1(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{L_1} e^{-ix\sin\tau + i\lambda\tau}\,d\tau, \tag{5}$$

$$H_\lambda^2(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{L_2} e^{-ix\sin\tau + i\lambda\tau}\,d\tau \tag{5'}$$

und wissen, daß beide Funktionen in der rechten Halbebene existieren und dort keine singuläre Stelle haben. Daß sie sich in die linke Halbebene fortsetzen lassen, soll später gezeigt werden (Nr. 7, S. 404 unten).

3. Besselsche und Neumannsche Funktionen. Integraldarstellung von $J_\lambda(x)$. Von physikalischem Interesse sind die Lösungen der Differentialgleichung (2), die für reelle λ und x reell sind. Um zu ihnen zu gelangen, bilden wir die bei reellem x, das wir vorläufig noch positiv annehmen, und reellem λ konjugiert komplexe Funktion zu $H_\lambda^1(x)$:

$$\bar{H}_\lambda^1(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{\bar{L}_1} e^{ix\sin\tau - i\lambda\tau}\,d\tau,$$

wo $\bar{L}_1$ das Spiegelbild von L_1 an der reellen Achse ist.

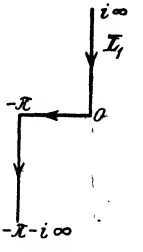


Abb. 18.
τ-Ebene.

Ersetzen wir τ durch $-\tau$, d. h. spiegeln wir am Nullpunkt der τ-Ebene, so folgt

$$\bar{H}_\lambda^1(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\bar{L}_1} e^{-ix\sin\tau+i\lambda\tau}(-d\tau),$$

und da $-\bar{L}_1$ gleich dem im negativen Sinne durchlaufenen Weg L_2 ist, wird

$$\bar{H}_\lambda^1(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{L_2} e^{-ix\sin\tau+i\lambda\tau}d\tau,$$

also

$$\bar{H}_\lambda^1(x) = H_\lambda^2(x).$$

Die Hankelschen Funktionen sind also für reelle λ und x konjugiert komplex zueinander. Ihr Realteil

$$\Re(H_\lambda^1(x)) = \frac{H_\lambda^1(x)+H_\lambda^2(x)}{2} = J_\lambda(x) \tag{6}$$

ist ebenfalls eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung. Die Funktionen $J_\lambda(x)$ werden *Besselsche Funktionen* genannt; diese sind also für reelle λ und x gleich den Realteilen der entsprechenden Hankelschen Funktionen.

Eine Funktion $H_{-\lambda}^\nu(x)$ $(\nu = 1, 2)$ ist eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung für den gleichen Wert von λ wie $H_\lambda^\nu(x)$, da in der Differentialgleichung nur λ^2 auftritt. Es ist z. B.

$$H_{-\lambda}^1(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{L_1} e^{-ix\sin\tau-i\lambda\tau}d\tau.$$

Führen wir statt τ die Veränderliche $\tau+\pi$ ein, d. h. verschieben wir den Integrationsweg um π in der Richtung der positiven reellen Achse, so wird

$$H_{-\lambda}^1(x) = -\frac{e^{i\lambda\pi}}{\pi}\int_{L_1+\pi} e^{ix\sin\tau-i\lambda\tau}d\tau.$$

Indem wir τ durch $-\tau$ ersetzen, folgt

$$H_{-\lambda}^1(x) = -\frac{e^{i\lambda\pi}}{\pi}\int_{-(L_1+\pi)} e^{-ix\sin\tau+i\lambda\tau}(-d\tau),$$

und, da $-(L_1+\pi)$ gleich L_1 im negativen Sinne ist,

$$H_{-\lambda}^1(x) = -\frac{e^{i\lambda\pi}}{\pi}\int_{L_1} e^{-ix\sin\tau+i\lambda\tau}d\tau,$$

$$H_{-\lambda}^1(x) = e^{i\lambda\pi}H_\lambda^1(x).$$

Da die Hankelschen Funktionen konjugiert komplex sind, gilt entsprechend

$$H^2_{-\lambda}(x) = e^{+i\lambda\pi} H^2_\lambda(x) .$$

Hiernach ist

$$J_{-\lambda}(x) = \frac{H^1_{-\lambda}(x) + H^2_{-\lambda}(x)}{2} = \frac{e^{i\lambda\pi} H^1_\lambda(x) + e^{+i\lambda\pi} H^2_\lambda(x)}{2} . \tag{7}$$

Der Imaginärteil der ersten Hankelschen Funktion bei reellem λ und x:

$$\Im(H^1_\lambda(x)) = \frac{H^1_\lambda(x) - H^2_\lambda(x)}{2i} = N_\lambda(x) \tag{8}$$

genügt auch der Besselschen Differentialgleichung. Die Funktion $N_\lambda(x)$ wird *Neumannsche Funktion* genannt. Ebenso gilt

$$N_{-\lambda}(x) = \frac{H^1_{-\lambda}(x) - H^2_{-\lambda}(x)}{2i} = \frac{e^{i\lambda\pi} H^1_\lambda(x) - e^{+i\lambda\pi} H^2_\lambda(x)}{2i} . \tag{9}$$

Allgemein setzen wir

$$H^1_\lambda(x) = J_\lambda(x) + iN_\lambda(x) , \tag{10}$$

$$H^2_\lambda(x) = J_\lambda(x) - iN_\lambda(x) \tag{10'}$$

und halten diese Definition der Funktionen $J_\lambda(x)$ und $N_\lambda(x)$ auch bei komplexem x und λ aufrecht; die Eigenschaft, reeller und imaginärer Teil von $H^1_\lambda(x)$ zu sein, bleibt dabei natürlich nicht bestehen.

Die Beziehungen zwischen den Funktionen H, J und N entsprechen also denen zwischen der Exponentialfunktion, dem Kosinus und dem Sinus.

Wir wissen noch nicht, ob $J_\lambda(x)$ und $J_{-\lambda}(x)$ bzw. $N_\lambda(x)$ und $N_{-\lambda}(x)$ linear unabhängig sind, können dies aber behaupten, falls $H^1_\lambda(x)$ und $H^2_\lambda(x)$ linear unabhängig sind und die Determinante der Substitution, die die Hankelschen Funktionen in die Besselschen bzw. Neumannschen überführt, nicht verschwindet. Diese Substitutionsdeterminante hat den Wert

$$\frac{1}{4} \begin{vmatrix} e^{i\lambda\pi} & e^{-i\lambda\pi} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} (e^{i\lambda\pi} - e^{-i\lambda\pi}) ,$$

verschwindet also nicht, falls

$$e^{2i\lambda\pi} \neq 1$$

ist, d. h. λ keine ganze rationale Zahl ist. Ist λ eine ganze rationale Zahl, so sind die Besselschen bzw. Neumannschen Funktionen linear abhängig; es gilt

$$J_{-\lambda}(x) = (-1)^\lambda J_\lambda(x) , \tag{11}$$

$$N_{-\lambda}(x) = (-1)^\lambda N_\lambda(x) \tag{11'}$$

(für ganze rationale λ).

Wie in diesem Fall statt $J_{-\lambda}$ eine neue Lösung bestimmt wird, soll später

gezeigt werden, ebenso, daß $\mathfrak{F}_\lambda$ und $\mathfrak{F}_{-\lambda}$, falls λ keine ganze rationale Zahl ist, linear unabhängig sind. (Vgl. Nr. 4, S. 397 und Nr. 8, S. 408.)

Jetzt wollen wir eine Integraldarstellung für $J_\lambda(x)$ selbst aufsuchen und nehmen zunächst an, es sei λ eine ganze rationale Zahl und x positiv. Dann ist

$$J_\lambda(x) = \Re\left(H_\lambda^1(x)\right);$$

also folgt, wenn wir den Integralausdruck einsetzen und den Integrationsweg L_1 in drei Teile von $-i\infty$ bis 0, von 0 bis $-\pi$ und von $-\pi$ bis $-\pi + i\infty$ teilen:

$$J_\lambda(x) = -\frac{1}{\pi}\Re\left(\int_{-i\infty}^{0} e^{-ix\sin\tau + i\lambda\tau}\,d\tau + \int_{0}^{-\pi} e^{-ix\sin\tau + i\lambda\tau}\,d\tau + \int_{-\pi}^{-\pi+i\infty} e^{-ix\sin\tau + i\lambda\tau}\,d\tau\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\Re\left(\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}\right).$$

Ersetzen wir im zweiten Integral τ durch $-\tau$, so wird

$$\Re(\mathrm{II}) = -\Re\left(\int_0^{\pi} e^{ix\sin\tau - i\lambda\tau}\,d\tau\right).$$

Weiter ergibt sich, wenn wir die Substitutionen $\tau = -it$ in I, $\tau = -\pi + it$ in III ausführen:

$$\Re(\mathrm{I} + \mathrm{III}) = \Re\left(\int_{\infty}^{0} e^{ix\sin it + \lambda t}(-i\,dt) + \int_0^{\infty} e^{ix\sin it - i\lambda\pi - \lambda t} i\,dt\right).$$

Es ist danach $\Re(\mathrm{I} + \mathrm{III}) = 0$; denn da $\sin it = \dfrac{e^{-t} - e^{t}}{2i}$ rein imaginär, x reell und λ eine ganze rationale Zahl ist, sind die beiden Exponentialfunktionen reell, die Integrale also rein imaginär und daher ihr Realteil gleich Null. Es gilt somit für reelle x und ganze rationale λ

$$(12)\qquad J_\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\Re\left(\int_0^{\pi} e^{ix\sin\tau - i\lambda\tau}\,d\tau\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\tau - \lambda\tau)\,d\tau.$$

Da $\cos(x\sin\tau - \lambda\tau)$ bei festem τ eine ganze Funktion von x ist, so ist auch $J_\lambda(x)$ eine ganze transzendente Funktion (wenn sie nicht etwa ein Polynom bzw. eine Konstante sein sollte, eine Annahme, die sich als nicht zutreffend erweisen wird).

Es sei jetzt λ wieder eine komplexe Zahl, $\Re(x) > 0$ und der Integrationsweg aus den beiden Wegen C_1 und C_2 (Abb. 14, 15) zusammengesetzt. Bilden wir

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{2}\left(H_\lambda^1(x) + H_\lambda^2(x)\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1+C_2} e^{xt}\frac{(\sqrt{t^2+1} - t)^\lambda}{\sqrt{t^2+1}}\,dt,$$

so hebt sich der zwischen den beiden Verzweigungsschnitten gelegene Teil von C_1 und C_2 auf; indem wir den so entstandenen Integrationsweg mit C bezeichnen (vgl. Abb. 19), erhalten wir

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{xt}\frac{(\sqrt{t^2+1}-t)^\lambda}{\sqrt{t^2+1}}\,dt.$$

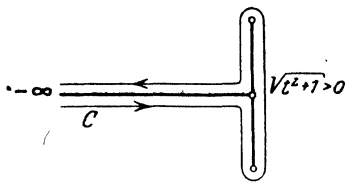


Abb. 19. t-Ebene.

Durch die Substitution

$$\sqrt{t^2+1}-t=\frac{1}{u}$$

führen wir eine neue Integrationsveränderliche u ein. Es wird

$$\sqrt{t^2+1}+t=u,\qquad \sqrt{t^2+1}=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right),\qquad t=\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right),$$

$$dt=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du=\frac{1}{2u}\left(u+\frac{1}{u}\right)du,\qquad \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{du}{u}.$$

Setzen wir diese Werte ein, so folgt

$$J_\lambda(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{\frac{x}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)}u^{-(\lambda+1)}\,du, \tag{13}$$

wo L das Bild von C in der u-Ebene bedeutet. Läuft t von $-\infty$ bis 0, so ist dort $\sqrt{t^2+1}<0$, also geht u von $-\infty$ bis -1. Für t zwischen 0 und $-i$ setzen wir $t=ai$, wobei a von 0 bis -1 variiert. Dann hat $u=-\sqrt{1-a^2}+ai$ den absoluten Betrag 1, läuft also auf dem Einheitskreise und zwar von -1 nach $-i$. Für t zwischen $-i$ und 0 geht $u=\sqrt{1-a^2}+ai$ auf dem Einheitskreise von $-i$ nach 1. Für t zwischen 0 und $+i$, d. h. a zwischen 0 und 1, läuft $u=\sqrt{1-a^2}+ai$ von 1 nach i. Für t zwischen i und 0, d. h. a zwischen 1 und 0, variiert $u=-\sqrt{1-a^2}+ai$ von i nach -1. Schließlich läuft für t zwischen 0 und $-\infty$ die Variable u zwischen -1 und $-\infty$.

Wir erhalten also das nebenstehende Bild (Abb. 20).

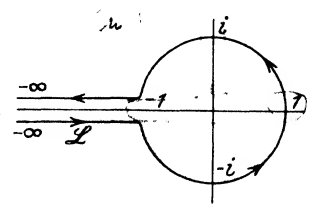


Abb. 20. u-Ebene.

Falls λ keine ganze rationale Zahl ist, wird $u^{-(\lambda+1)}$ eine mehrdeutige Funktion mit den Verzweigungspunkten $u=0$, $u=\infty$. Um sie eindeutig zu machen, schneiden wir die u-Ebene längs der negativen Achse von 0 nach $-\infty$ auf und legen der Funktion $u^{-(\lambda+1)}$ ihren Hauptwert bei. Wenn λ eine ganze rationale Zahl ist, brauchen wir keinen Verzweigungsschnitt zu führen. Dann bleibt als Integrationsweg nur der Einheitskreis; die geradlinigen Teile heben sich auf. In diesem

Fall hat $J_\lambda(x)$ eine einfache Bedeutung, es ist nämlich $J_\lambda(x)$ gleich dem Koeffizienten von u^λ in der Laurentschen Entwicklung von $e^{\frac{x}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)}$. Verwandeln wir durch die Substitution

$$u = e^{i\tau}$$

die Laurentsche in eine Fouriersche Reihe, so ergibt sich wegen

$$\frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\tau} - e^{-i\tau}\right) = i \sin\tau$$

die Entwicklung

$$e^{ix\sin\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, e^{in\tau}$$

oder nach Addition bzw. Subtraktion derselben Formel für $-\tau$

$$\cos(x\sin\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos n\tau\,,$$

$$\sin(x\sin\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\sin n\tau\,.$$

Mit Hilfe der Beziehung $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ kann man diese Formeln in die Gestalt bringen

$$(14)\qquad \begin{cases} \cos(x\sin\tau) = J_0(x) + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos 2n\tau\,, \\ \sin(x\sin\tau) = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x)\sin(2n+1)\tau\,. \end{cases}$$

Diese Entwicklungen können auch als Definition der $J_n(x)$ für ganzzahliges n durch *erzeugende Funktionen* betrachtet werden. Insbesondere ergibt sich für $\tau = \frac{\pi}{2}$

$$\cos x = J_0(x) - 2J_2(x) + 2J_4(x) - \cdots,$$
$$\sin x = 2J_1(x) - 2J_3(x) + 2J_5(x) - \cdots.$$

Der Integraldarstellung der Laurentschen Koeffizienten entspricht die Integraldarstellung der Fourierschen Koeffizienten, die also wieder auf Formeln führen muß, die mit den oben erhaltenen gleichbedeutend sind. In der Tat ergibt sich

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos n\tau\cos(x\sin\tau)\,d\tau = \begin{cases} J_n(x) & \text{für } n \equiv 0 \pmod 2, \\ 0 & \text{für } n \equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin n\tau\sin(x\sin\tau)\,d\tau = \begin{cases} 0 & \text{für } n \equiv 0 \pmod 2, \\ J_n(x) & \text{für } n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

und durch Addition

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\tau - x\sin\tau)\, d\tau, \tag{15}$$

was mit Formel (12) auf S. 390 übereinstimmt.

4. Potenzreihendarstellung für $J_\lambda(x)$. Es sei $x > 0$, λ komplex. Setzen wir

$$u = \frac{2v}{x},$$

so entsteht aus (13)

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda}\int_L e^{v-\left(\frac{x}{2}\right)^2 v^{-1}}\, v^{-(\lambda+1)}\, dv. \tag{16}$$

Nach dem Cauchyschen Satz dürfen wir nämlich auch in der v-Ebene L als Integrationsweg wählen, da $x > 0$ ist, der transformierte Weg also aus L durch eine Ähnlichkeitstransformation vom Nullpunkt aus hervorgehen würde.

Wir entwickeln $e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2 v^{-1}}$ in die Exponentialreihe:

$$e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2 v^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} v^{-n}.$$

Die Reihe konvergiert bei festem x gleichmäßig für alle v, wenn $v = 0$ durch einen kleinen Kreis ausgeschlossen wird, ist also gleichmäßig konvergent auf L. Durch Einsetzen erhalten wir

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda}\int_L e^v\, v^{-(\lambda+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} v^{-n}\, dv.$$

Da der Integrationsweg ins Unendliche reicht, dürfen wir nicht ohne weiteres gliedweise integrieren. Um diese Integration zu rechtfertigen, zerlegen wir den Integrationsweg L in endliche Stücke

$$L_m \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

die sich nach der Reihenfolge ihrer Indizes aneinanderschließen; dann wird

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{L_m} e^v\, v^{-(\lambda+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} v^{-n}\, dv.$$

Für den endlichen Weg L_m können wir Summation und Integration vertauschen und erhalten

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{L_m} e^v\, v^{-(\lambda+1)} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} v^{-n}\, dv. \tag{17}$$

Führen wir dieselbe Betrachtung an dem ebenfalls konvergenten Integral

$$\int_L |e^v v^{-(\lambda+1)}| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} |v^{-n}| \, |dv|$$

durch, in dem die Summe wieder auf jedem Stück L_m gleichmäßig konvergiert, so erhalten wir eine konvergente Majorante der Doppelsumme in (17). Wir können daher die Summationen vertauschen, und es folgt

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{L_m} e^v v^{-(\lambda+1)} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} v^{-n} \, dv$$

d. h. es gilt die Reihenentwicklung

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \int_L e^v v^{-(n+\lambda+1)} \, dv .$$

Wir bestimmen den Wert des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L e^v v^{-(n+\lambda+1)} \, dv$$

und zunächst als Hilfsbetrachtung den von

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L e^v v^{t-1} \, dv \quad \text{für} \quad t > 0 .$$

Hierbei verstehen wir unter v^{t-1} den Zweig von $e^{(t-1)\log v}$, in dem der Logarithmus seinen Hauptwert hat. Auf dem ersten Teile des Integrationsweges von $-\infty$ bis -1 unterhalb der reellen Achse gilt $\log v = \log|v| - \pi i$, auf dem Rückweg von -1 nach $-\infty$ oberhalb der reellen Achse $\log v = \log|v| + \pi i$.

Unter der Voraussetzung, daß $t > 0$ ist, können wir den Einheitskreis auf den Nullpunkt zusammenziehen; denn da der Exponent $t - 1 > -1$ ist, ist das Integral in den Nullpunkt hinein konvergent; nach dem Cauchyschen Satze ändert sich der Wert des Integrals nicht, wenn wir statt über L von $-\infty$ bis 0 unterhalb der reellen Achse und dann von 0 bis $-\infty$ oberhalb der reellen Achse integrieren:

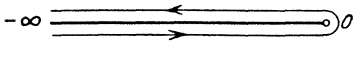


Abb. 21. v-Ebene.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L e^v v^{t-1} \, dv = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{0} e^v v^{t-1} \, dv}_{\text{unterhalb der reellen Achse.}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{0}^{-\infty} e^v v^{t-1} \, dv}_{\text{oberhalb}} \quad (\text{für } t > 0).$$

Wir führen $|v|$ als Integrationsveränderliche ein, indem wir $v = -w$ setzen, und müssen dann also im ersten Integral $v^{t-1} = e^{(t-1)(\log w - \pi i)}$, im zweiten $v^{t-1} = e^{(t-1)(\log w + \pi i)}$ schreiben. Das erste Integral wird somit:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{0} w^{t-1} e^{-(t-1)\pi i} e^{-w}(-dw) = \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty} w^{t-1} e^{-(t-1)\pi i} e^{-w}\, dw,$$

das zweite

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty} w^{t-1} e^{(t-1)\pi i} e^{-w}(-dw),$$

also die Summe

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty} w^{t-1} e^{-w}(e^{t\pi i} - e^{-t\pi i})\, dw,$$

und da $e^{t\pi i} - e^{-t\pi i} = 2i \sin \pi t$ und definitionsgemäß

$$\int_{0}^{\infty} w^{t-1} e^{-w}\, dw = \Gamma(t)$$

ist, so hat die Integralsumme den Wert

$$\frac{\sin \pi t}{\pi}\Gamma(t).$$

Aus dem Ergänzungssatze der Gammafunktion

$$\Gamma(t)\,\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t}$$

ergibt sich

$$\frac{\sin \pi t}{\pi}\Gamma(t) = \frac{1}{\Gamma(1-t)}.$$

Es gilt also für positive t:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L} v^{t-1} e^{v}\, dv = \frac{1}{\Gamma(1-t)}.$$

Diese Beziehung besteht nun allgemein für beliebige t. Denn das Integral konvergiert gleichmäßig für alle t in einem festen endlichen Bereich, da der Integrationsweg nach $-\infty$ geht und e^{v} dort stärker Null als eine beliebige Potenz unendlich wird, und es stellt demnach eine analytische Funktion von t dar. Andererseits ist auch $\frac{1}{\Gamma}$ eine analytische Funktion, und zwei analytische Funktionen, die auf einer Strecke übereinstimmen, sind im ganzen Existenzbereich identisch.

Wir wenden die Gleichung für $t = -(n+\lambda)$ an und erhalten

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L v^{-(n+\lambda+1)} e^v \, dv = \frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)}.$$

Es gilt daher für $J_\lambda(x)$ die Entwicklung

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)}. \tag{18}$$

Die Koeffizienten $\frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)}$ verschwinden nie, falls λ keine negative ganze rationale Zahl ist. Ist λ jedoch eine solche, so ist

$$\frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)} = 0 \quad \text{für} \quad n \leqq |\lambda| - 1 .$$

Falls λ eine ganze rationale Zahl ist, brauchen wir nicht die Theorie der Gammafunktion zur Bestimmung der Koeffizienten von $J_\lambda(x)$. In diesem Falle fällt, wie schon oben (S. 391 unten) bemerkt, der Verzweigungsschnitt fort, und als Integrationsweg bleibt nur der Einheitskreis, da die geradlinigen Teile sich aufheben. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L v^{-(n+\lambda+1)} e^v \, dv$$

gleich dem Residuum der Funktion $v^{-(n+\lambda+1)} e^v$ im Nullpunkt, also

für nicht negative ganze rationale λ gleich $\frac{1}{(n+\lambda)!}$,

für negative ganze rationale λ gleich $\begin{cases} 0 & \text{für } n \leqq |\lambda| - 1, \\ \frac{1}{(n+\lambda)!} & \text{für } n \geqq |\lambda|. \end{cases}$

Da die Konvergenz der Reihe in (18) für alle positiven x feststeht, so folgt, daß sie beständig konvergiert, daß also $\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda}$ eine *ganze transzendente Funktion*, wenn nicht etwa ein Polynom bzw. eine Konstante ist. Dies letztere ist aber unmöglich, weil $\Gamma(n+\lambda+1)$ mit endlich vielen im Falle eines negativen ganzen rationalen λ auftretenden Ausnahmen eine endliche Zahl ist, so daß auch der Koeffizient von x^{2n} nicht verschwindet; also besitzt die Reihe für $\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda}$ in jedem Fall unendlich viele nicht verschwindende Glieder.

Aus der Reihenentwicklung (18) ist unmittelbar ersichtlich, daß $J_\lambda(x)$ für reelle λ und x reell ist, da die Gammafunktion für reelle Argumente reelle Werte hat.

Die Unabhängigkeit der Funktionen $J_\lambda(x)$ und $J_{-\lambda}(x)$ für nicht ganze rationale λ ergibt sich daraus, daß die ersten Glieder der betreffenden Reihenentwicklungen verschieden sind. Es beginnt die Reihe

$$J_\lambda(x) \quad \text{mit} \quad \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)},$$

$$J_{-\lambda}(x) \quad \text{mit} \quad \left(\frac{x}{2}\right)^{-\lambda} \frac{1}{\Gamma(-\lambda+1)},$$

wobei $\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}$ und $\frac{1}{\Gamma(-\lambda+1)}$ nicht verschwinden. Wir betrachten den Quotienten $\frac{J_\lambda(x)}{J_{-\lambda}(x)}$; seine Potenzreihe beginnt mit $\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}$, er ist also sicher nicht konstant, so daß keine lineare Abhängigkeit zwischen $J_\lambda(x)$ und $J_{-\lambda}(x)$ bestehen kann. Für ganze rationale λ dagegen bestätigt man auch an der Potenzreihe (18) leicht die schon (S. 389) abgeleitete Beziehung

$$J_\lambda(x) = (-1)^\lambda J_{-\lambda}(x). \tag{11}$$

5. Abhängigkeit vom Parameter λ. Bei veränderlichem λ ist $J_\lambda(x)$ für $x \neq 0$ eine analytische Funktion von λ. Variiert λ im Kreise $|\lambda| \leqq k$, wo k eine ganze Zahl bedeutet, so ist für alle $n \geqq k+1 = N$

$$|\Gamma(n+\lambda+1)| \geqq |\Gamma(N+\lambda)|.$$

Wir schreiben

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)} \right\}$$

und führen statt der zweiten Summe die Majorante

$$\frac{1}{|\Gamma(N+\lambda)|} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n!} \left|\frac{x}{2}\right|^{2n}$$

ein. Für alle $|\lambda| \leqq k$ ist $\frac{1}{|\Gamma(N+\lambda)|}$ als Betrag einer ganzen transzendenten Funktion beschränkt:

$$\left|\frac{1}{\Gamma(N+\lambda)}\right| \leqq M,$$

die zweite Summe hat also die von λ unabhängige konvergente Majorante

$$M \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n!} \left|\frac{x}{2}\right|^{2n};$$

daher konvergiert auch

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)}$$

gleichmäßig für $|\lambda| \leqq k$, und, da die einzelnen Reihenglieder analytische Funktionen von λ sind, ist $J_\lambda(x)$ als gleichmäßig konvergente Reihe

analytischer Funktionen von λ selbst eine analytische Funktion von λ nach dem bekannten Weierstraßschen Satz. Ebenso kann gezeigt werden, daß auch $\frac{dJ_\lambda(x)}{dx}$ und $\frac{d^2J_\lambda(x)}{dx^2}$ analytische Funktionen von λ sind. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe darf $J_\lambda(x)$ unter dem Summenzeichen nach λ differenziert werden.

Differenzieren wir die Besselsche Differentialgleichung

$$\frac{d^2J_\lambda(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_\lambda(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right) J_\lambda(x) = 0,$$

die eine Identität in λ darstellt, nach λ, so folgt

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial J_\lambda(x)}{\partial \lambda} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{\partial J_\lambda(x)}{\partial \lambda} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)\frac{\partial J_\lambda(x)}{\partial \lambda} = \frac{2\lambda}{x^2} J_\lambda(x).$$

Für $-\lambda$ gilt ebenso

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial J_{-\lambda}(x)}{\partial \lambda} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{\partial J_{-\lambda}(x)}{\partial \lambda} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)\frac{\partial J_{-\lambda}(x)}{\partial \lambda} = \frac{2\lambda}{x^2} J_{-\lambda}(x).$$

Multiplizieren wir die zweite Gleichung mit $(-1)^\lambda$ und subtrahieren sie von der ersten, so folgt für ganze rationale λ aus der Beziehung $J_\lambda(x) = (-1)^\lambda J_{-\lambda}(x)$, daß die rechte Seite der resultierenden Gleichung verschwindet; wir erhalten also als weitere Lösung der Besselschen Differentialgleichung für ganzzahlige λ die Funktion

$$\frac{\partial J_\lambda(x)}{\partial \lambda} - (-1)^\lambda \frac{\partial J_{-\lambda}(x)}{\partial \lambda} = Y_\lambda(x); \qquad (\lambda \text{ ganz}) \tag{19}$$

ihre Unabhängigkeit von J_λ wird sich in Nr. 8 erweisen.

Diese Funktion $Y_\lambda(x)$ kann sehr einfach mit Hilfe der Neumannschen Funktion ausgedrückt werden.

Der Quotient

$$\frac{J_\lambda(x)\cos\lambda\pi - J_{-\lambda}(x)}{\sin\lambda\pi}$$

stellt, falls λ keine ganze rationale Zahl und $x \neq 0$ ist, eine analytische Funktion von λ dar. Für ganzzahlige rationale Werte von λ hat sowohl der Nenner $\sin\lambda\pi$ als auch der Zähler $(-1)^\lambda J_\lambda(x) - J_{-\lambda}(x)$ eine einfache Nullstelle. Da Zähler und Nenner reguläre Funktionen sind, dürfen wir beide differenzieren, um den Wert der Funktion für ganze rationale λ zu ermitteln. Der Quotient

$$\frac{\frac{\partial J_\lambda(x)}{\partial \lambda}\cos\lambda\pi - J_\lambda(x)\,\pi\sin\lambda\pi - \frac{\partial J_{-\lambda}(x)}{\partial \lambda}}{\pi\cos\lambda\pi}$$

strebt, wenn λ gegen ganze rationale Werte konvergiert, gegen

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial J_\lambda(x)}{\partial \lambda} - (-1)^\lambda \frac{\partial J_{-\lambda}(x)}{\partial \lambda}\right) = \frac{Y_\lambda(x)}{\pi}.$$

Dies ist also der Wert von

$$\frac{J_\lambda(x)\cos\lambda\pi - J_{-\lambda}(x)}{\sin\lambda\pi}$$

für ganze rationale λ. Allgemein ist dieser Quotient gleich

$$\frac{\frac{1}{2}(H_\lambda^1(x)+H_\lambda^2(x))\,\frac{e^{i\lambda\pi}+e^{-i\lambda\pi}}{2} - \frac{1}{2}(H_\lambda^1(x)e^{i\lambda\pi}+H_\lambda^2(x)\,e^{+i\lambda\pi})}{\frac{e^{i\lambda\pi}-e^{-i\lambda\pi}}{2i}}$$
$$= \frac{H_\lambda^1(x)-H_\lambda^2(x)}{2i},$$

d. h. es gilt

$$\frac{J_\lambda(x)\cos\lambda\pi - J_{-\lambda}(x)}{\sin\lambda\pi} = \frac{H_\lambda^1(x)-H_\lambda^2(x)}{2i} = N_\lambda(x)$$

und

$$Y_\lambda(x) = \pi N_\lambda(x) \tag{20}$$

für ganze rationale λ.

6. Eine andere Integraldarstellung der Hankelschen und Besselschen Funktionen. Wir wollen uns jetzt einer anderen Integraldarstellung der Besselschen Funktion zuwenden, die wir erhalten, wenn wir die Differentialgleichung für $\frac{J_\lambda}{x^\lambda}$ ansetzen und auf sie die Laplacesche Transformation anwenden. — Es liegt nämlich nahe, zu vermuten, daß wir so zu einfachen Ergebnissen gelangen werden, da $\frac{J_\lambda}{x^\lambda}$ eine eindeutige Funktion von x ist. — Zu diesem Zweck führen wir in

$$z'' + \frac{1}{x}z' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)z = 0$$

die neue Veränderliche $v(x)$ ein durch

$$z = v\,x^\lambda,$$

wodurch wir erhalten

$$x\,v'' + (2\lambda+1)\,v' + x\,v = 0. \tag{21}$$

Der Laplacesche Ansatz liefert

$$v = \int_C e^{xt} f(t)\,dt, \qquad v' = \int_C t\,e^{xt} f(t)\,dt, \qquad v'' = \int_C t^2\,e^{xt} f(t)\,dt.$$

Unsere Gleichung geht über in

$$\int_C \{t^2\,e^{xt}\,x\,f(t) + (2\lambda+1)\,t\,e^{xt} f(t) + x\,e^{xt} f(t)\}\,dt = 0$$

oder

$$\int_C \{(1+t^2)\,e^{xt}\,x\,f(t) + (2\lambda+1)\,t\,e^{xt} f(t)\}\,dt = 0.$$

Nun ist

$$\int_C (1+t^2)\, e^{xt} x f(t)\, dt = \Big[(1+t^2) f(t) e^{xt}\Big]_C - \int_C \{(1+t^2) f'(t) + 2t f(t)\} e^{xt}\, dt;$$

durch Einsetzen finden wir

$$\Big[(1+t^2) e^{xt} f(t)\Big]_C - \int_C \{(1+t^2) f'(t) - (2\lambda - 1) t f(t)\} e^{xt}\, dt = 0.$$

Die Differentialgleichung ist also gelöst, wenn wir C und $f(t)$ so bestimmen, daß

$$\Big[(1+t^2) e^{xt} f(t)\Big]_C = 0 \quad \text{und} \quad (1+t^2) f'(t) - (2\lambda - 1) t f(t) = 0$$

wird; es ergibt sich

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{(2\lambda - 1) t}{1+t^2}$$

oder

$$\log f(t) = \frac{2\lambda - 1}{2} \log (1+t^2) + \log c = \log (1+t^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} + \log c,$$

$$f(t) = c (1+t^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}.$$

Also wird

$$v = c \int_C e^{xt} (1+t^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}\, dt.$$

Die Integrationsvariable t ersetzen wir jetzt durch it und ziehen $i(-1)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ in die Konstante; dadurch ergibt sich, wenn wir den Integrationsweg wieder mit C bezeichnen,

$$v = c \int_C e^{ixt} (t^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}}\, dt.$$

Dieses Integral gibt uns also eine Lösung unserer Differentialgleichung, falls

$$\Big[(t^2-1)(t^2-1)^{\lambda - \frac{1}{2}} e^{ixt}\Big]_C = \Big[(t^2-1)^{\lambda + \frac{1}{2}} e^{ixt}\Big]_C = 0$$

ist. Zunächst müssen wir sagen, was wir unter $(t^2-1)^{\lambda + \frac{1}{2}}$ verstehen wollen. Wir setzen

$$(t^2-1)^{\mu} = e^{\mu \log (t^2 - 1)}.$$

Um den Logarithmus eindeutig festzulegen, ziehen wir Verzweigungsschnitte, indem wir die t-Ebene längs der beiden in -1 und $+1$ beginnenden Halbgeraden parallel zur positiv imaginären Achse nach ∞ hin aufschneiden, und setzen fest: $\log (t^2 - 1)$ soll seinen Hauptwert

haben, d. h. für $t > 1$ reell sein und sonst die Werte haben, die daraus durch analytische Fortsetzung ohne Überschreitung der Schnitte hervorgehen. Dann ist $(t^2-1)^\mu$ in jedem Falle in der ganzen aufgeschnittenen Ebene eindeutig definiert.

Wir suchen jetzt einen Weg C_1, an dessen Enden $(t^2-1)^{\lambda+\frac{1}{2}} e^{ixt} = 0$ ist. Es sei zunächst $\Re(x) > 0$. Dann wird $\lim (t^2-1)^{\lambda+\frac{1}{2}} e^{ixt} = 0$ für $t \to k + i\infty$ und unser Integral konvergiert, wenn es längs eines der beiden in Abb. 22 gezeichneten Wege ins Unendliche erstreckt wird.

Wir werden in Nr. 7 sehen, daß der um den rechten Verzweigungsschnitt gelegte Weg bis auf einen nur von λ abhängigen Faktor die Funktion H_λ^1, der andere bis auf einen nur von λ abhängigen Faktor H_λ^2 liefert. Auch wollen wir sogleich anmerken, daß für unseren Integranden der Weg, der entsteht, indem zuerst der in Abb. 22 rechts gelegene Weg in der Richtung der Pfeile, sodann der in dieser Abb. links gelegene Weg entgegengesetzt zur Pfeilrichtung durchlaufen wird, durch den sogleich zu beschreibenden Achterweg von Abb. 23 ersetzt werden darf.

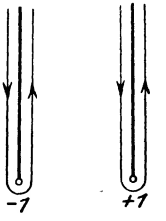


Abb. 22.

Speziell sei $\Re(\lambda) > -\frac{1}{2}$; dann können wir in die Punkte $t = \pm 1$ hineinintegrieren. Will man für $\Re(\lambda) < -\frac{1}{2}$ etwas Ähnliches erreichen, so kann man — da in der ursprünglichen Differentialgleichung nur λ^2 auftritt — die Integrale

$$\int_C e^{ixt}(t^2-1)^{-\lambda-\frac{1}{2}}\,dt$$

betrachten, die dann für $\Re(\lambda) < \frac{1}{2}$ ein Hineinintegrieren gestatten. Für $-\frac{1}{2} < \Re(\lambda) < \frac{1}{2}$ sind beide Arten von Integralen zulässig.

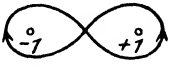


Abb. 23.

Einen endlichen Weg, der für alle λ und alle x zugleich brauchbar ist, erhalten wir in dem Achterweg der Abb. 23, welcher $+1$ im positiven, -1 im negativen Sinne umkreist. Kehren wir nämlich zum Ausgangspunkt zurück, so hat dabei $(t^2-1)^\mu$ seinen Ausgangswert, multipliziert mit $e^{2\pi i\mu} \cdot e^{-2\pi i\mu} = 1$ angenommen. Diesen Weg wollen wir $\mathfrak{A}$ nennen und wollen sehen, wie sich

$$w = x^\lambda \int_{\mathfrak{A}} e^{ixt}(t^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dt$$

durch die uns bekannten Besselschen Funktionen ausdrücken läßt. Die Potenz $(t^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ legen wir auf dem Integrationsweg dadurch fest, daß wir in seinem Schnittpunkt mit der Halbgeraden $t > 1$ dem Logarithmus von t^2-1 seinen Hauptwert zuweisen.

Das Integral

$$\int_{\mathfrak{A}} e^{ixt}(t^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dt$$

stellt eine ganze Funktion von x dar, weil es das Integral einer ganzen Funktion von x über einen endlichen Weg in der t-Ebene ist. Also ist $\frac{w}{x^\lambda}$ eine ganze transzendente Funktion von x. Es sei $\Re(\lambda) > 0$. Wir wissen, daß $\frac{J_\lambda}{x^\lambda}$ eine ganze transzendente Funktion ist und daß J_λ und $J_{-\lambda}$ für nicht ganze und rationale λ zwei unabhängige Lösungen der Besselschen Differentialgleichung sind; also ist

$$c_1\frac{J_\lambda}{x^\lambda} + c_2\frac{J_{-\lambda}}{x^\lambda}$$

die vollständige Lösung der Gleichung (21) und stellt mit geeigneten Werten c_1, c_2 unser Integral dar. Das Integral ist aber ebenso wie $\frac{J_\lambda}{x^\lambda}$ eine ganze transzendente Funktion, während es $\frac{J_{-\lambda}}{x^\lambda}$ nicht ist; also können wir schließen: $c_2 = 0$. Wir müssen jetzt noch zeigen, daß $c_1 \neq 0$, daß also w keine triviale Lösung ist. Wir bestimmen c_1, indem wir, unter der Voraussetzung, daß $\Re(\lambda) > 0$ und nicht ganz rational ist, $x = 0$ einsetzen. Dann ist nach der Potenzreihenentwicklung für J_λ:

$$\left(\frac{w}{x^\lambda}\right)_{x=0} = c_1\left(\frac{J_\lambda}{x^\lambda}\right)_{x=0} = \frac{c_1}{2^\lambda\,\Gamma(\lambda+1)}$$

und

$$c_1 = 2^\lambda\,\Gamma(\lambda+1)\left[\int_{\mathfrak{A}} e^{ixt}(t^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dt\right]_{x=0} = 2^\lambda\,\Gamma(\lambda+1)\int_{\mathfrak{A}}(t^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dt\,.$$

Dieses Integral wollen wir auswerten, indem wir den Integrationsweg $\mathfrak{A}$ um die Strecke $-1 \leqq t \leqq 1$ zusammenziehen, was wegen $\Re(\lambda) > 0$ erlaubt ist.

Der Wert des Integranden ist

von	0	bis	1:	$e^{-\pi i(\lambda-\frac{1}{2})}(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$,
von	1	bis	0:	$e^{+\pi i(\lambda-\frac{1}{2})}(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$,
von	0	bis	−1:	$e^{+\pi i(\lambda-\frac{1}{2})}(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$,
von	−1	bis	0:	$e^{-\pi i(\lambda-\frac{1}{2})}(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$.

Also wird

$$\int_{\mathfrak{A}}(t^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dt = e^{-\pi i(\lambda-\frac{1}{2})}\int_0^1(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dt + e^{\pi i(\lambda-\frac{1}{2})}\int_1^0(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dt$$
$$+ e^{\pi i(\lambda-\frac{1}{2})}\int_0^{-1}(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dt + e^{-\pi i(\lambda-\frac{1}{2})}\int_{-1}^0(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dt\,.$$

In den beiden letzten Integralen vertauschen wir t mit $-t$ und erhalten:

$$\int_{\mathfrak{A}} (t^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dt = 2\,(e^{-\pi i(\lambda-\frac{1}{2})} - e^{\pi i(\lambda-\frac{1}{2})}) \int_0^1 (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= -4\,i \sin\pi(\lambda-\tfrac{1}{2}) \int_0^1 (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dt\,.$$

Durch die Transformation $t^2 = u$ geht dies über in

$$\int_{\mathfrak{A}} (t^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dt = -2\,i \sin\pi(\lambda-\tfrac{1}{2}) \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,du\,.$$

Das Integral rechts ist ein Eulersches Integral erster Gattung. Aus der bekannten Beziehung

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

folgt

$$\int_{\mathfrak{A}} (t^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dt = -2\,i \sin\pi(\lambda-\tfrac{1}{2})\, B(\tfrac{1}{2}, \lambda+\tfrac{1}{2})$$

$$= 2\,i \sin\pi(\lambda+\tfrac{1}{2})\, \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+1)}\,.$$

Nun ist aber

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}, \quad \text{also} \quad \Gamma(\lambda+\tfrac{1}{2})\sin\pi(\lambda+\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda)}.$$

Daher wird

$$\int_{\mathfrak{A}} (t^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dt = 2\,\pi\,i\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda)}$$

und endlich

$$c_1 = 2\,\pi\,i \cdot 2^{\lambda}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda)} \cdot \neq 0$$

Wir erhalten also schließlich für $J_\lambda(x)$ die Darstellung

$$J_\lambda(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda)}{2\pi i\,\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda} \int_{\mathfrak{A}} e^{ixt}\,(t^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dt\,. \tag{22}$$

Diese zunächst nur für $\Re(\lambda) > 0$ bewiesene Darstellung gilt, da J_λ eine reguläre Funktion von λ ist, für alle λ außer $\lambda = k + \frac{1}{2}$, wo k eine ganze rationale Zahl $\geqq 0$ ist. Für $\Re(\lambda) > -\frac{1}{2}$ kann man hieraus die sehr gebräuchliche Darstellung ableiten:

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda} \int_{-1}^{+1} e^{ixt}\,(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dt\,. \tag{23}$$

Setzt man $t = \sin\tau$, so ergibt sich für $\Re(\lambda) > -\frac{1}{2}$:

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\tau)\,(\cos\tau)^{2\lambda}\,d\tau. \tag{24}$$

Beiläufig geben wir noch eine Darstellung von $Y_0(x)$ an. Es war (vgl. S. 398)

$$Y_\lambda = \frac{\partial J_\lambda}{\partial\lambda} - (-1)^\lambda \frac{\partial J_{-\lambda}}{\partial\lambda}$$

und insbesondere

$$Y_0 = \left(\frac{\partial J_\lambda}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0} - \left(\frac{\partial J_{-\lambda}}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0} = 2\left(\frac{\partial J_\lambda}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0}.$$

Durch Differentiation der Integraldarstellung (24) erhalten wir nach einigen Umformungen die Beziehung

$$Y_0(x) = (2C + \log 2)\,J_0(x) + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos\tau)\log(x\sin^2\tau)\,d\tau,$$

wo C die bekannte Eulersche Konstante ist.

7. Charakterisierung der Hankelschen Funktionen durch ihr Verhalten im Unendlichen. Die Hankelschen Funktionen $H_\lambda^1(x)$ und $H_\lambda^2(x)$, die sich (bei dem Integralansatz S. 385) durch die Wahl der einfachsten, für alle λ brauchbaren Integrationswege ergaben, lassen sich statt dessen auch durch innere Eigenschaften, nämlich ihr Verhalten im Unendlichen, kennzeichnen. In der Integraldarstellung

$$H_\lambda^1(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{C_1} e^{xt}\,\frac{(\sqrt{t^2+1}-t)^\lambda}{\sqrt{t^2+1}}\,dt, \tag{4}$$

die zunächst für $\Re(x) > 0$ gilt, können wir nach dem Cauchyschen Integralsatz den Integrationsweg verlegen. Wir können nämlich C_1 (vgl. Abb. 14) ersetzen durch eine Schleife, welche aus dem Unendlichen der linken Halbebene kommt, den Punkt i im positiven Sinne umkreist und wieder ins Unendliche zurückführt, wobei der Integrationsweg, abgesehen von einem beliebig kleinen Kreise um den Punkt i, aus den beiden Ufern einer Parallelen $t = i + s\,e^{i\pi}$ $(s > 0)$ zur reellen Achse besteht. Sodann können wir diesen Schleifenweg um den Punkt i herumdrehen und ihn längs eines Strahles $t = i + s\,e^{i\omega}$ führen, solange nur $\Re(x\,e^{i\omega})$ negativ bleibt und diese Verlegung sich stetig durchführen läßt, ohne daß dabei der singuläre Punkt $-i$ getroffen wird. Nach dieser Drehung des Integrationsweges erkennt man unmittelbar, daß das Integral für H_λ^1 in einem anderen Bereich konvergiert, als für $\Re(x) > 0$, nämlich für alle x, für die $\Re(x\,e^{i\omega}) < 0$ ist. Damit haben wir die Hankelschen Funktionen analytisch fortgesetzt. Insbesondere können wir $\omega = \frac{\pi}{2}$ wählen,

d. h. längs einer in der positiven imaginären Achse liegenden Schleife integrieren; dann konvergiert das Integral für alle x der oberen Halbebene. Beschränken wir x auf einen Winkel $\delta < \arg x < \pi - \delta$ $(\delta > 0)$, so ist $|e^{xt}| < e^{-c|x|}$, wo $c > 0$ und von x und t unabhängig ist. Lassen wir daher $|x|$ anwachsen, so strebt der Beitrag jedes endlichen Teiles des Integrationsweges gegen Null. Da außerdem das Integral für $|x| > \varepsilon > 0$ gleichmäßig konvergiert, können wir den Rest beliebig klein machen und haben so das Ergebnis:

$$\lim_{x \to \infty} H_\lambda^1(x) \to 0 \qquad (\delta < \arg x < \pi - \delta). \tag{25}$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir

$$\lim_{x \to \infty} H_\lambda^2(x) \to 0 \qquad (-\pi + \delta < \arg x < -\delta). \tag{25'}$$

Wir haben also das Resultat: *Die Hankelsche Funktion $H_\lambda^1(x)$ strebt gegen Null, wenn die Variable x in einem Sektor $\delta < \arg x < \pi - \delta$ der oberen Halbebene ins Unendliche geht. Die Hankelsche Funktion $H_\lambda^2(x)$ strebt gegen Null, wenn x in einem Sektor $\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta$ der unteren Halbebene ins Unendliche geht*[1]).

Durch diese Eigenschaften und die Differentialgleichung (2) *sind die Funktionen $H_\lambda^1(x)$, $H_\lambda^2(x)$ bei reellem λ bis auf einen von x freien Faktor eindeutig festgelegt.*

Gäbe es nämlich zwei voneinander linear unabhängige Lösungen der Besselschen Differentialgleichung, welche die genannte Eigenschaft etwa für die obere Halbebene haben, so müßte jede Lösung sie besitzen, also z. B. auch $J_\lambda(x)$. Nun wird aber für reelle λ die Funktion $\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda}$ unendlich, wenn x auf der positiven imaginären Achse ins Unendliche strebt, wie man unmittelbar aus der Potenzreihe (18) für $\frac{J_\lambda}{x^\lambda}$ entnimmt, da sie für $x = i\eta$ in eine Potenzreihe von η mit nicht negativen und unendlich vielen positiven Koeffizienten übergeht. Für reelle positive λ ist damit die Behauptung bewiesen (für komplexe Werte von λ folgt sie übrigens aus den in § 5 abzuleitenden asymptotischen Darstellungen).

Genau dieselbe Überlegung können wir bei der zweiten Integraldarstellung (Nr. 5) durchführen. Hier muß, damit das Integral konvergiert, der Integrationsweg längs eines Strahles ins Unendliche führen, auf dem $\Re(ixt) < 0$ ist. Liegt x in der oberen Halbebene, so können wir das erste Integral (Abb. 22 rechts) längs der (positiv) reellen Achse erstrecken und sehen wie vorher, daß es eine Lösung darstellt, die gegen Null strebt, wenn x längs eines Strahles in der oberen Halbebene ins Unendliche geht. Diese

[1]) Diese Aussage gilt nur von dem betrachteten Ausgangszweig der Funktion H_λ^1 bzw. H_λ^2; bei analytischer Fortsetzung um $x = 0$ herum gelangt man zu einer linearen Kombination der Ausgangszweige, die das beschriebene Verhalten nicht zeigt.

Lösung ist also bis auf einen von x unabhängigen Faktor c_1 gleich H_λ^1. Liegt x in der unteren Halbebene, so können wir den zweiten Integrationsweg in die (negativ) reelle Achse verlegen und sehen, daß das zweite Integral die Funktion $c_2 H_\lambda^2(x)$ darstellt. Die Differenz ist aber, wie wir S. 401 u. 403 sahen:

$$c_1 H_\lambda^1 - c_2 H_\lambda^2 = \frac{2\pi i\, \Gamma(\frac{1}{2})\, 2^\lambda}{\Gamma(\frac{1}{2} - \lambda)} J_\lambda .$$

Da nun wegen der linearen Unabhängigkeit der beiden Hankelschen Funktionen die Funktion $J_\lambda(x)$ nur auf eine Weise aus ihnen linear zusammengesetzt werden kann, nämlich nach (6) in der Gestalt $J_\lambda = \frac{H_\lambda^1 + H_\lambda^2}{2}$, so folgt

$$c_1 = -c_2 = \frac{\pi i\, \Gamma(\frac{1}{2})\, 2^\lambda}{\Gamma(\frac{1}{2} - \lambda)},$$

womit die Integraldarstellungen der Hankelschen Funktionen aus Nr. 6 endgültig gewonnen sind. Da diese Beziehungen analytische Relationen in λ sind, so gelten sie auch für komplexe λ.

8. Explizite Darstellung der Neumannschen Funktion. Wir wollen eine explizite Darstellung der Neumannschen Funktionen $N_\lambda(x)$ für ganzzahlige $\lambda \geqq 0$ aus der Reihenentwicklung für $J_\lambda(x)$ ableiten. Es gilt

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\Gamma(n + \lambda + 1)}, \tag{18}$$

und da wir unter dem Summenzeichen nach λ differenzieren dürfen:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J_\lambda(x)}{\partial \lambda} = \log \dfrac{x}{2}\, J_\lambda(x) + \left(\dfrac{x}{2}\right)^\lambda \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=n+\lambda+1}, \\ \dfrac{\partial J_{-\lambda}(x)}{\partial \lambda} = -\log \dfrac{x}{2}\, J_{-\lambda}(x) - \left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\lambda} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=n-\lambda+1}. \end{cases} \tag{26}$$

Wir bestimmen die Werte der Differentialquotienten $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=n\pm\lambda+1}$ für ganze rationale λ, und zwar durch einen Grenzübergang für die Werte $t = 0, -1, -2, -3, \ldots$, an denen $\Gamma(t)$ einen Pol hat. Es gilt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \quad \text{für} \quad t \neq 0, -1, -2, \ldots .$$

Durch logarithmische Differentiation ergibt sich

$$\frac{\Gamma'(t+1)}{\Gamma(t+1)} = \frac{1}{t} + \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)},$$

und durch k-malige Wiederholung

$$\frac{\Gamma'(t+k+1)}{\Gamma(t+k+1)} = \frac{1}{t+k} + \frac{1}{t+k-1} + \cdots + \frac{1}{t} + \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Es ist

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)} = -\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma^2(t)} = -\frac{1}{\Gamma(t)}\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}.$$

Für $t+k+1 \geqq 2$ setzen wir $t+k+1 = n+1$, $t = 1$, $n = k+1$. Dann ergibt die obige Formel:

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + 1 + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + 1 - C$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Mit dem Wert $\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$ für die positiven ganzen Zahlen kennen wir den gesuchten Wert der Ableitung $\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}$ in diesen Punkten:

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=1} = C;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)} = -\frac{1}{(t-1)!}\left\{\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-2} + \cdots + 1 - C\right\} \text{ für } t = 2, 3, \ldots.$$

Wir brauchen ferner den Wert der Ableitung für negative ganze Werte t. Um ihn zu bestimmen, lösen wir die Gleichung

$$\frac{\Gamma'(t+k+1)}{\Gamma(t+k+1)} = \frac{1}{t+k} + \frac{1}{t+k-1} + \cdots + \frac{1}{t} + \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$$

nach $\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$ auf. Dann erhalten wir nach Multiplikation mit $-\frac{1}{\Gamma(t)}$:

$$-\frac{1}{\Gamma(t)}\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = \frac{1}{\Gamma(t)}\left\{\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \cdots + \frac{1}{t+k-1} + \frac{1}{t+k}\right\} - \frac{1}{\Gamma(t)}\frac{\Gamma'(t+k+1)}{\Gamma(t+k+1)},$$

Lassen wir t gegen 0 oder eine negative ganze rationale Zahl konvergieren: $t \to -k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, so konvergiert die ~~rechte~~ linke Seite gegen die Ableitung $\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=-k}$.

Für $t \to -k$ strebt $\frac{1}{\Gamma(t)}$ gegen Null, $\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \cdots + \frac{1}{t+k-1}$ bleibt endlich; die ersten k Glieder fallen also fort. Ferner ist $\frac{1}{\Gamma(t)}\frac{\Gamma'(t+k+1)}{\Gamma(t+k+1)} \to 0$; es bleibt also nur das Glied $\frac{1}{\Gamma(t)}\frac{1}{t+k}$. Wir erweitern mit $t(t+1)\cdots(t+k-1)$, schreiben also

$$\frac{1}{\Gamma(t)}\frac{t(t+1)\cdots(t+k-1)}{t(t+1)\cdots(t+k)}.$$

Wegen der Funktionalgleichung der Gammafunktion wird dann der Nenner gleich $\Gamma(t+k+1)$. Für $t \to -k$ konvergiert daher der Nenner gegen $\Gamma(1) = 1$, und da der Zähler gegen $(-1)^k k!$ strebt, gilt

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=-k} = (-1)^k k!$$

Setzt man den Wert der Ableitung $\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}$ in den ganzen rationalen Zahlen in die Reihen (18) und (26) von S. 406 ein, so ergibt sich für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$:

$$Y_\lambda(x) = \frac{\partial J_\lambda(x)}{\partial \lambda} - (-1)^\lambda \frac{\partial J_{-\lambda}(x)}{\partial \lambda}$$

$$= 2 J_\lambda(x)\left(\log\frac{x}{2} + C\right) - \left(\frac{x}{2}\right)^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\lambda-1}\frac{(\lambda-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$- \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\,(n+\lambda)!}\left\{\frac{1}{n+\lambda} + \frac{1}{n+\lambda-1} + \cdots + 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + 1\right\}.$$

Die Funktion $Y_\lambda(x)$ setzt sich also zusammen aus einer Potenzreihe in $\frac{x}{2}$, die eine meromorphe Funktion ist, und aus einem Produkt von $\log x$ und der Besselschen Funktion $J_\lambda(x)$, sie hat daher im Nullpunkt einen logarithmischen Verzweigungspunkt und ist für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ linear unabhängig von $J_\lambda(x)$.

Wir haben somit für ganze rationale λ in $Y_\lambda(x) = \pi N_\lambda(x)$ wirklich ein zweites partikuläres Integral der Differentialgleichung (2) gewonnen.

9. Relationen zwischen den Besselschen Funktionen. Nachdem wir für die Besselschen Funktionen die Potenzreihenentwicklung und Integraldarstellung abgeleitet haben, wollen wir aus der Integraldarstellung einige allgemeine Eigenschaften der Besselschen Funktionen entwickeln. Für $x > 0$ ist (vgl. S. 393)

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \int_L v^{-(\lambda+1)} e^{v - \frac{x^2}{4v}}\, dv, \tag{16}$$

wobei L den Integrationsweg von Abb. 20, S. 391 bedeutet, somit

$$\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda}\frac{1}{2\pi i}\int_L v^{-(\lambda+1)}\, e^{v - \frac{x^2}{4v}}\, dv.$$

Wir differenzieren nach x^2, und zwar auf der rechten Seite formal unter dem Integralzeichen, was, wie wir sogleich zeigen werden, erlaubt ist:

$$\frac{d^k}{d(x^2)^k}\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda}\frac{1}{2\pi i}\int_L v^{-(\lambda+1)}\left(\frac{-1}{4v}\right)^k e^{v - \frac{x^2}{4v}}\, dv.$$

Die Differentiation unter dem Integralzeichen ist gestattet, weil auf dem Integrationsweg L die Ungleichung $|v| \geqq 1$ gilt, und somit für $|x| \leqq h$ die Funktion

$$\left| e^{-\frac{x^2}{4v}} \right| \leqq e^{\left|\frac{x^2}{4v}\right|} \leqq e^{h^2}$$

gleichmäßig beschränkt, die rechte Seite also ein gleichmäßig konvergentes Integral über eine analytische Funktion von x^2 ist.

Wir schreiben die letzte Gleichung anders:

$$\frac{d^k}{d(x^2)^k}\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} = \frac{(-1)^k}{2^k}\frac{1}{2^{\lambda+k}}\frac{1}{2\pi i}\int_L v^{-(\lambda+k+1)}\, e^{v-\frac{x^2}{4v}}\, dv,$$

so daß wir rechts eine Besselsche Funktion erhalten, wenn wir vor dem Integralzeichen mit $x^{\lambda+k}$ erweitern:

$$\frac{d^k}{d(x^2)^k}\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{J_{\lambda+k}(x)}{x^{\lambda+k}}. \tag{27}$$

Wir können daher auch schreiben:

$$\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^k \frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} = (-1)^k \frac{J_{\lambda+k}(x)}{x^{\lambda+k}}.$$

Speziell gilt für $k = 1$:

$$\frac{d}{dx}\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} = -\frac{J_{\lambda+1}(x)}{x^\lambda}, \tag{28}$$

d. h. die Rekursionsformel

$$\frac{dJ_\lambda(x)}{dx} = \frac{\lambda}{x} J_\lambda(x) - J_{\lambda+1}(x), \tag{29}$$

also eine Relation zwischen $J_{\lambda+1}(x)$, $J_\lambda(x)$ und $\frac{dJ_\lambda(x)}{dx}$, die für $\lambda = 0$ die spezielle Gestalt

$$J_1(x) = -\frac{dJ_0(x)}{dx}$$

annimmt. Wir untersuchen noch besonders die Fälle $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Nach (18) ist

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

und da

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

ist, wird

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \tag{30}$$

Benutzen wir die obenstehende Differentiationsformel (28) für $\lambda = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{d}{dx}\frac{J_{-\frac{1}{2}}(x)}{x^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{J_{\frac{1}{2}}(x)}{x^{-\frac{1}{2}}},$$

so folgt

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x = -\frac{J_{\frac{1}{2}}(x)}{x^{-\frac{1}{2}}},$$

d. h.

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x. \tag{30'}$$

Durch Division ergibt sich

$$\frac{J_{-\frac{1}{2}}(x)}{J_{\frac{1}{2}}(x)} = \operatorname{ctg} x.$$

Die Besselschen Funktionen für $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ drücken sich also einfach durch trigonometrische Funktionen aus.

Aus

$$J_\lambda(x) = \frac{H_\lambda^1(x) + H_\lambda^2(x)}{2},$$

$$J_{-\lambda}(x) = \frac{H_\lambda^1(x)\,e^{i\lambda\pi} + H_\lambda^2(x)\,e^{-i\lambda\pi}}{2}$$

folgt für $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{H_{\frac{1}{2}}^1(x) + H_{\frac{1}{2}}^2(x)}{2},$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{i\left(H_{\frac{1}{2}}^1(x) - H_{\frac{1}{2}}^2(x)\right)}{2}$$

oder

$$-iJ_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{H_{\frac{1}{2}}^1(x) - H_{\frac{1}{2}}^2(x)}{2}$$

Durch Addition ergibt sich

$$H_{\frac{1}{2}}^1(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) - iJ_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\sin x - i\cos x) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{ix}. \tag{31}$$

Diese Entwicklungen beleuchten die schon erwähnte Tatsache, *daß die Besselschen, Neumannschen und Hankelschen Funktionen in ähnlicher Beziehung zueinander stehen, wie die Cosinus-, Sinus- und Exponentialfunktion.* Auch bei den Sätzen über die Verteilung der Nullstellen, die wir später ableiten, werden wir diese Analogie wieder bemerken (vgl. Nr. 10).

Wir hatten auf S. 409 die Relation

$$\frac{d^k}{d(x^2)^k}\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{J_{\lambda+k}(x)}{x^{\lambda+k}} \tag{27}$$

abgeleitet. Wenden wir sie für $\lambda = \frac{1}{2}$ an:

$$\frac{d^k}{d(x^2)^k}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{x} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{J_{k+\frac{1}{2}}(x)}{x^{k+\frac{1}{2}}},$$

so folgt

$$J_{k+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^k \frac{(2x)^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\frac{d^k}{d(x^2)^k}\frac{\sin x}{x},$$

d. h. jede Besselsche Funktion $J_{k+\frac{1}{2}}(x)$ läßt sich ausdrücken als rationale Funktion von trigonometrischen Funktionen und von x, multipliziert mit $\sqrt{x}$.

Wir leiten jetzt eine zweite Rekursionsformel aus der Integraldarstellung (16) von S. 393 ab.

Es ist

$$\int_L \frac{d}{dv}\left(v^{-\lambda} e^{v-\frac{x^2}{4v}}\right) dv = 0,$$

da $v^{-\lambda} e^{v-\frac{x^2}{4v}}$ an den Enden des Integrationsweges verschwindet.

Durch Ausführung der Differentiation folgt

$$-\lambda\int_L v^{-(\lambda+1)} e^{v-\frac{x^2}{4v}} dv + \int_L v^{-\lambda} e^{v-\frac{x^2}{4v}} dv + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \int_L v^{-(\lambda+2)} e^{v-\frac{x^2}{4v}} dv = 0.$$

Nach Multiplikation mit $\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda-1}$ nimmt diese Gleichung die Gestalt an:

$$-\frac{2\lambda}{x} J_\lambda(x) + J_{\lambda-1}(x) + J_{\lambda+1}(x) = 0$$

oder

$$J_{\lambda-1}(x) + J_{\lambda+1}(x) = \frac{2\lambda}{x} J_\lambda(x), \tag{32}$$

die für jedes komplexe λ gilt. Diese Relation können wir auch folgendermaßen schreiben:

$$\frac{J_{\lambda-1}(x)}{J_\lambda(x)} = \frac{2\lambda}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{J_\lambda(x)}{J_{\lambda+1}(x)}} = \frac{2\lambda}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{2\lambda+2}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{2\lambda+4}{x} - \cdots}}$$

So ist $\frac{J_{\lambda-1}(x)}{J_\lambda(x)}$ durch einen unendlichen Kettenbruch dargestellt; seine Konvergenz können wir hier jedoch nicht untersuchen. Wenn wir

überall mit x heraufmultiplizieren, nimmt der Kettenbruch die Gestalt an:

$$x\frac{J_{\lambda-1}(x)}{J_\lambda(x)} = 2\lambda - \frac{x^2}{2\lambda+2} - \frac{x^2}{2\lambda+4} - \cdots$$

Für $\lambda = \frac{1}{2}$ ergibt sich

$$x\frac{J_{-\frac{1}{2}}(x)}{J_{\frac{1}{2}}(x)} = x\operatorname{ctg} x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{5} - \cdots$$

Dies ist ein *unendlicher Kettenbruch für* ctg x, der schon im 18. Jahrhundert bekannt war und mit dessen Hilfe Lambert[1]) die Irrationalität von π bewiesen hat, indem er $x = \frac{\pi}{4}$ setzte.

10. Die Nullstellen der Besselschen Funktionen. Zum Schluß wollen wir noch einige Sätze über die Nullstellen der Besselschen Funktionen ableiten[2]).

Die Besselsche Funktion $J_\lambda(x)$ genügt der Differentialgleichung

$$J_\lambda''(x) + \frac{1}{x}J_\lambda'(x) + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)J_\lambda(x) = 0.$$

Setzen wir

$$x = \xi_1 t, \qquad \xi_1 = \text{konst.} \neq 0,$$

so folgt:

$$J_\lambda''(\xi_1 t) + \frac{1}{\xi_1 t}J_\lambda'(\xi_1 t) + \left(1 - \frac{\lambda^2}{\xi_1^2 t^2}\right)J_\lambda(\xi_1 t) = 0.$$

Ebenso gilt für

$$x = \xi_2 t, \qquad \xi_2 = \text{konst.} \neq 0:$$

$$J_\lambda''(\xi_2 t) + \frac{1}{\xi_2 t}J_\lambda'(\xi_2 t) + \left(1 - \frac{\lambda^2}{\xi_2^2 t^2}\right)J_\lambda(\xi_2 t) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen leiten wir eine neue ab, indem wir die erste mit $\xi_1^2 t J_\lambda(\xi_2 t)$, die zweite mit $-\xi_2^2 t J_\lambda(\xi_1 t)$ multiplizieren und beide addieren. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} t(\xi_1^2 J_\lambda''(\xi_1 t)J_\lambda(\xi_2 t) - \xi_2^2 J_\lambda''(\xi_2 t)J_\lambda(\xi_1 t)) \\ + \xi_1 J_\lambda'(\xi_1 t)J_\lambda(\xi_2 t) - \xi_2 J_\lambda'(\xi_2 t)J_\lambda(\xi_1 t) \\ + (\xi_1^2 - \xi_2^2)\, t J_\lambda(\xi_1 t)J_\lambda(\xi_2 t) = 0. \end{aligned}$$

---

[1]) *Lambert, J. H.:* Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques. Hist. Acad. Berlin Jg. 1761, S. 265—322, insb. S. 269. 1768.

[2]) Vgl. hierzu die verwandten Ausführungen in Kap. VI, § 5.

Die ersten zwei Summanden sind gleich der Ableitung der Funktion

$$t(\xi_1 J_\lambda'(\xi_1 t) J_\lambda(\xi_2 t) - \xi_2 J_\lambda'(\xi_2 t) J_\lambda(\xi_1 t))$$

nach t; durch unbestimmte Integration der letzten Gleichung folgt daher

$$t(\xi_1 J_\lambda'(\xi_1 t) J_\lambda(\xi_2 t) - \xi_2 J_\lambda'(\xi_2 t) J_\lambda(\xi_1 t)) + (\xi_1^2 - \xi_2^2)\int t J_\lambda(\xi_1 t) J_\lambda(\xi_2 t)\, dt = \text{konst.}$$

Es gilt also, wenn wir von 0 bis 1 integrieren

$$\begin{cases} (\xi_1 J_\lambda'(\xi_1) J_\lambda(\xi_2) - \xi_2 J_\lambda'(\xi_2) J_\lambda(\xi_1)) \\ \qquad + (\xi_1^2 - \xi_2^2)\int_0^1 t J_\lambda(\xi_1 t) J_\lambda(\xi_2 t)\, dt = 0\,. \end{cases} \tag{33}$$

Aus dieser Gleichung können wir Schlüsse über die Nullstellen von $J_\lambda(x)$ ziehen. (Vgl. hierzu Kap. VI, § 5.)

Es sei ξ eine von Null verschiedene Nullstelle von $J_\lambda(x)$. Wir setzen $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \bar{\xi}$, wo $\bar{\xi}$ den konjugiert komplexen Wert von ξ bezeichnen möge. ξ_1 und ξ_2 fallen also nur für reelle ξ zusammen.

Es sei λ reell; dann hat $J_\lambda(x)$ für reelle x reelle Werte, die Koeffizienten der Potenzreihe (18) sind reell; verschwindet daher $J_\lambda(\xi)$, so ist auch $J_\lambda(\bar{\xi}) = 0$. Wir haben also in Gleichung (33) $J_\lambda(\xi_1) = J_\lambda(\xi_2) = 0$ zu setzen; die große Klammer verschwindet dabei, und der zweite Summand geht über in

$$(\xi^2 - \bar{\xi}^2)\int_0^1 t\,|J_\lambda(\xi t)|^2\, dt = 0\,.$$

Wir haben $\xi \neq 0$ vorausgesetzt. Da die Besselsche Funktion nicht identisch verschwindet, ist $\int_0^1 t\,|J_\lambda(\xi t)|^2\, dt \neq 0$, also $\xi^2 - \bar{\xi}^2 = (\xi - \bar{\xi})(\xi + \bar{\xi}) = 0$,

d. h. $$\xi = \bar{\xi} \quad \text{oder} \quad \xi = -\bar{\xi}\,.$$

Somit ist ξ reell oder rein imaginär. Für reelle λ hat die Besselsche Funktion $J_\lambda(x)$ nur reelle oder rein imaginäre Nullstellen.

Um zu untersuchen, wie es sich mit den rein imaginären Nullstellen der Besselschen Funktionen verhält, gehen wir von der Potenzreihenentwicklung

$$\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)}$$

aus. Indem wir $x = ai$, a reell $\neq 0$ einsetzen, wird

$$\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n}\frac{1}{n!\,\Gamma(n+\lambda+1)}\,.$$

Da λ reell ist, ist $n+\lambda+1$ für alle n mit endlich vielen Ausnahmen positiv, und da die Γ-Funktion für positive Argumente positive Werte hat, sind alle Koeffizienten der Potenzreihe bis auf endlich viele am Anfang der Reihe positiv. Für große $|a|$ überwiegen die höheren Potenzen, und da für $a \neq 0$ stets $\left(\frac{a}{2}\right)^{2n} > 0$ ist, wird $\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} > 0$ für alle hinreichend großen $|a|$. Nur auf einem endlichen Stück der imaginären Achse kann ein Zeichenwechsel der Funktion $\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda}$ auftreten; als ganze transzendente Funktion kann daher $\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda}$ nur endlich viele rein imaginäre Nullstellen haben. Für $\lambda > -1$ hat $\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda}$ keine rein imaginären Nullstellen; denn dann ist für alle n:

$$n+\lambda+1 > 0\,,$$

$$\Gamma(n+\lambda+1) > 0\,;$$

alle Koeffizienten der Reihe sind also positiv, und daher der Wert der Reihe selbst positiv für $a \neq 0$. Speziell für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ gibt es keine imaginären Nullstellen.

Wir haben also das Resultat: *Für reelle λ hat $J_\lambda(x)$ bis auf endlich viele rein imaginäre nur reelle Nullstellen; für reelle $\lambda > -1$ hat $J_\lambda(x)$ nur reelle Nullstellen.*

Daß für jedes positive reelle ganzzahlige λ die Funktion $J_\lambda(x)$ unendlich viele reelle Nullstellen hat, ist schon durch die Betrachtungen der vorigen Kapitels erwiesen, da die Nullstellen von $J_n(x)$ das System der Eigenwerte einer Differentialgleichung liefern.

Wir wollen schließlich noch einiges über die Lage der reellen Nullstellen der Besselschen Funktionen aussagen.

Setzen wir bei reellem λ

$$\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} = v\,, \qquad J_\lambda(x) = v x^\lambda\,,$$

so gilt nach S. 399

$$x v'' + (2\lambda+1) v' + x v = 0\,. \tag{21}$$

Nehmen wir an, die Funktion v' sei so beschaffen, daß sie mindestens zwei positive Nullstellen ξ_1, ξ_2 besitze: $0 < \xi_1 < \xi_2$, so geht die Differentialgleichung für $x = \xi_1$ über in

$$\xi_1 v''(\xi_1) + \xi_1 v(\xi_1) = 0\,,$$

also

$$v''(\xi_1) + v(\xi_1) = 0\,.$$

Wäre $v''(\xi_1) = 0$, so gälte auch $v(\xi_1) = 0$ und damit

$$v^{(n)}(\xi_1) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

denn wir können die Differentialgleichung, die eine homogene Beziehung zwischen v, v' und v'' darstellt, nach x differenzieren, wodurch wir eine homogene Beziehung zwischen v, v', v'' und v''' erhalten, so daß also aus $v(\xi_1) = v'(\xi_1) = v''(\xi_1) = 0$ auch $v'''(\xi_1) = 0$ folgen würde, usw. Alle Ableitungen $v^{(n)}(\xi_1)$ müßten also verschwinden, und, da v eine analytische Funktion ist, wäre somit identisch $v = 0$.

Wir schließen daher, daß $v(\xi_1)$ und $v''(\xi_1)$ entgegengesetztes Vorzeichen haben, und daß dasselbe für $v(\xi_2)$ und $v''(\xi_2)$ gilt. Es ist also $v'(\xi_1) = v'(\xi_2) = 0$, und es sei $v'(x) \neq 0$ für $\xi_1 < x < \xi_2$. Nach dem Rolleschen Satz liegt dann zwischen ξ_1 und ξ_2 eine ungerade Anzahl von Nullstellen von v''; folglich haben $v''(\xi_1)$ und $v''(\xi_2)$, und daher auch $v(\xi_1)$ und $v(\xi_2)$ entgegengesetzte Vorzeichen. Zwischen ξ_1 und ξ_2 müssen also eine ungerade Anzahl Nullstellen von v liegen, somit mindestens eine. Andererseits kann nach dem Rolleschen Satz nur eine Nullstelle von v dort liegen, da zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von v eine ungerade Anzahl von Nullstellen von v' liegt und v' zwischen ξ_1 und ξ_2 nach Voraussetzung keine Nullstelle hat.

Demnach hat v genau eine Nullstelle zwischen ξ_1 und ξ_2, d. h. zwischen zwei aufeinanderfolgenden positiven Nullstellen von v' liegt eine und nur eine Nullstelle von v. Die positiven Nullstellen von v und v' trennen sich gegenseitig; dasselbe gilt für die negativen Nullstellen.

Wir hatten in Nr. 9, S. 409 die Relation abgeleitet

$$\frac{d}{dx}\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} = -\frac{J_{\lambda+1}(x)}{x^\lambda}, \tag{28}$$

d. h.

$$v' = -\frac{J_{\lambda+1}(x)}{x^\lambda}.$$

Da die Nullstellen von v und v' sich gegenseitig trennen, da ferner

$$v = \frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda}, \qquad v' = -\frac{J_{\lambda+1}(x)}{x^\lambda}$$

ist, und daher alle positiven und negativen Nullstellen von v und v' Nullstellen von $J_\lambda(x)$ und $J_{\lambda+1}(x)$ sind, so müssen sich die Nullstellen von $J_\lambda(x)$ und $J_{\lambda+1}(x)$ gegenseitig trennen.

Für $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ hatten wir z. B. gefunden:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x, \qquad J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Die Nullstellen dieser Funktionen sind

$$\pm\frac{\pi}{2}, \quad \pm\frac{3\pi}{2}, \quad \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots, \quad \pm\frac{(2n+1)\pi}{2}, \ldots,$$

bzw.

$$0, \quad \pm\pi, \quad \pm 2\pi, \ldots, \quad \pm n\pi, \ldots;$$

sie trennen sich also gegenseitig.

Auch in dieser Beziehung zeigen die Besselschen Funktionen eine Verwandtschaft mit den trigonometrischen.

§ 3. Die Kugelfunktionen von Legendre.

Wir haben an früheren Stellen dieses Buches[1]) die Legendreschen Kugelfunktionen und die aus ihnen durch Differentiation entstehenden höheren Kugelfunktionen als Funktionen einer reellen Veränderlichen untersucht und viele ihrer Eigenschaften abgeleitet. Hier wollen wir nun, indem wir zu komplexen Variablen übergehen, Integraldarstellungen für diese Funktionen entwickeln und zugleich die übrigen Lösungen der Legendreschen Differentialgleichung aufsuchen; dabei wird sich von selbst die Möglichkeit ergeben, den Parameter n in der Legendreschen Funktion $P_n(x)$ von seiner Beschränkung auf ganzzahlige positive Werte zu befreien[2]).

1. Das Schläflische Integral. Aus der Darstellung (Kap. II, § 8, S. 66)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

des n^{ten} Legendreschen Polynoms ergibt sich sofort nach der Integralformel von Cauchy für beliebige komplexe Werte von x

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^n}{2^n(t-x)^{n+1}}\,dt, \tag{34}$$

wobei der Integrationsweg C in der Ebene der komplexen Variablen t im positiven Sinne um den Punkt $t = x$ herumläuft. Dieser Ausdruck, der von *Schläfli* herrührt, gestattet wichtige Folgerungen und Verallgemeinerungen. Zunächst bemerken wir, daß wir direkt an der Integraldarstellung (34) das Bestehen der Legendreschen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right) + n(n+1)P_n = 0 \tag{35}$$

---

[1]) In Kap. II, § 8 und in Kap. V, § 9, 1.

[2]) Vgl. zu diesem Paragraphen insbesondere *Whittaker, E. T.* und *G. N. Watson:* A course of modern Analysis, 3. Aufl., S. 302—336. Cambridge 1920.

verifizieren können. Die Differentiation unter dem Integralzeichen liefert nämlich für die linke Seite der Differentialgleichung den Ausdruck

$$\frac{n+1}{2\pi i\, 2^n}\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+3}}\left((n+2)(1-x^2)-2x(t-x)+n(t-x)^2\right)dt$$

$$=\frac{n+1}{2\pi i\, 2^n}\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+3}}\left(2(n+1)t(t-x)-(n+2)(t^2-1)\right)dt$$

$$=\frac{n+1}{2\pi i\, 2^n}\int_C \frac{d}{dt}\left(\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-x)^{n+2}}\right)dt,$$

welcher wegen der Geschlossenheit des Integrationsweges und der Eindeutigkeit des Integranden als Funktion von t verschwinden muß. Wir können nun diese direkte Verifikation benutzen, um die Definition von $P_n(x)$ für beliebige, nicht mehr ganzzahlig positive Werte von n zu verallgemeinern. Denn offenbar muß das Schläflische Integral (34) für einen beliebigen Wert von n stets dann eine Lösung der Legendreschen Differentialgleichung darstellen, wenn beim Durchlaufen des Integrationsweges der Integrand zu seinem Ausgangswert zurückkehrt, d. h. wenn der Integrationsweg auf der Riemannschen Fläche des Integranden geschlossen ist. Nur wird dann die Funktion $P_n(x)$ nicht mehr eine ganze rationale Funktion, sogar nicht einmal mehr eine eindeutige analytische Funktion von x sein. Einen solchen Weg erhalten wir folgendermaßen: Wir schneiden die t-Ebene längs der reellen Achse von -1 bis $-\infty$ auf, ebenso die x-Ebene und wählen für C eine geschlossene Kurve, welche die Punkte $t=x$ und $t=+1$ in positivem Sinne umkreist, dagegen den Punkt $t=-1$ ausschließt. (Der zweite Verzweigungsschnitt des Integranden ist irgend ein von $+1$ nach x führender Weg). Die so definierte, in der aufgeschnittenen x-Ebene eindeutige Funktion

$$P_\nu(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu(t-x)^{\nu+1}}\,dt \tag{36}$$

nennen wir ebenfalls *Legendresche Kugelfunktion des Index* ν. Sie genügt der Legendreschen Differentialgleichung

$$((1-x^2)y')'+\nu(\nu+1)y=0$$

und läßt sich charakterisieren als dasjenige eindeutig bestimmte ihrer Integrale, welches für $x=1$ endlich bleibt und den Wert

$$P_\nu(1)=1$$

besitzt[1]). Dieses Verhalten entnimmt man unmittelbar der Integral-

[1]) In der Tat wird das zweite Integral Q_ν, das wir in Nr. 3 aufstellen werden, und daher jedes von P_ν unabhängige Integral bei $x=1$ logarithmisch unendlich.

darstellung, wenn man in ihr x gegen 1 konvergieren läßt. Da die obige Differentialgleichung bei Ersetzung von ν durch $-\nu-1$ in sich übergeht, so folgt sofort die Identität

$$P_\nu(x) = P_{-\nu-1}(x),$$

deren rechnerische Bestätigung nicht auf der Hand liegt.

Die Funktion $P_\nu(x)$ genügt, wie der Leser leicht an der Darstellung bestätigen wird, den Rekursionsformeln

$$(37) \qquad P'_{\nu+1}(x) - x P'_\nu(x) = (\nu+1) P_\nu(x)$$

$$(37') \qquad (\nu+1) P_{\nu+1}(x) - x(2\nu+1) P_\nu(x) + \nu P_{\nu-1}(x) = 0,$$

von denen die zweite für ganzzahliges ν schon in Kap. II, § 8,2 abgeleitet wurde.

2. Die Integraldarstellungen von Laplace. Ist der Realteil von x positiv und $x \neq 1$, wie wir nun voraussetzen wollen, so können wir für C den Kreis mit dem Radius $|\sqrt{x^2-1}|$ um den Punkt x wählen, da, wie man leicht sieht, dieser Kreis die oben verlangten Eigenschaften besitzt. Setzen wir, um die reelle Integrationsvariable φ einzuführen, $t = x + \sqrt{x^2-1}\, e^{i\varphi}$, $|\varphi| \leqq \pi$, so erhalten wir aus dem Schläflischen Integral sofort die erste, auch für $x = 1$ gültige Integraldarstellung von Laplace

$$(38) \qquad P_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^\nu \, d\varphi,$$

wobei die mehrdeutige Funktion $(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^\nu$ so festzulegen ist, daß sie für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gleich x^ν wird, unter x^ν den „Hauptwert" von x^ν verstanden, insbesondere bei positivem x und reellem ν ein reeller Wert.

Die Formel $P_\nu = P_{-\nu-1}$ liefert unmittelbar die zweite Laplacesche Darstellung

$$(38') \qquad P_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\nu+1}}.$$

3. Die Legendreschen Funktionen zweiter Art. Die Differentialgleichung (35) muß noch ein zweites von $P_\nu(x)$ linear unabhängiges Integral besitzen. Wir können es aus dem Schläflischen Integral leicht entnehmen, wenn wir statt des oben benutzten Integrationsweges einen anderen brauchbaren Weg aufsuchen. Ein solcher Weg wird durch den achtförmigen Weg $\mathfrak{A}$ von Abb. 23, S. 401 angegeben, wobei dieser Integrationsweg den Punkt x außerhalb läßt. Die durch das Integral

$$(39) \qquad Q_\nu(x) = \frac{1}{4i \sin\nu\pi} \int_{\mathfrak{A}} \frac{1}{2^\nu} \frac{(t^2-1)^\nu}{(x-t)^{\nu+1}} \, dt$$

definierte analytische Funktion $Q_\nu(x)$ genügt wieder der Legendreschen Differentialgleichung. Sie heißt *Legendresche Funktion zweiter Art* und ist in der längs der reellen Achse von 1 nach $-\infty$ aufgeschnittenen x-Ebene regulär und eindeutig. Wir setzen in dieser Darstellung zunächst ausdrücklich voraus, daß ν keine ganze Zahl sei, da sonst der zur Normierung gewählte Faktor $\frac{1}{\sin \nu\pi}$ unendlich werden würde. Falls der Realteil von $\nu + 1$ positiv ist, können wir nach Zusammenziehung des Integrationsweges schreiben (vgl. die Rechnung auf S. 402—403)

$$Q_\nu(x) = \frac{1}{2^{\nu+1}} \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^\nu}{(x-t)^{\nu+1}}\, dt. \tag{40}$$

Diese Formel ist jetzt auch für ganzzahliges ν brauchbar.

Man entnimmt dieser Darstellung leicht, daß Q_ν bei $x = 1$ logarithmisch unendlich wird. Für negative Werte von ν oder solche mit negativem Realteil kann man Q_ν durch die Gleichung

$$Q_\nu(x) = Q_{-\nu-1}(x)$$

definieren.

Auch für die Funktionen $Q_\nu(x)$ gilt eine den Laplaceschen Integralen für $P_\nu(x)$ analoge Integraldarstellung.

Man setze in dem obigen Integral (40), zunächst für $x > 1$

$$t = \frac{e^{i\varphi}\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{e^{i\varphi}\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}};$$

dann erhält man nach einiger Zwischenrechnung

$$Q_\nu(x) = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{\left(x + \sqrt{x^2-1}\,\mathfrak{Cof}\,\varphi\right)^{\nu+1}}, \tag{41}$$

wobei die Bestimmung des an sich mehrdeutigen Integranden ebenso wie oben getroffen wird. Die Gültigkeit dieser Formel erstreckt sich nun ohne weiteres auch auf beliebige Werte von x in der zwischen -1 und $+1$ aufgeschnittenen x-Ebene, wie der funktionentheoretisch vorgebildete Leser sofort der Tatsache entnehmen wird, daß der Integrand in diesem Gebiete eine eindeutige reguläre Funktion von x ist.

Aus der Gleichung $Q_\nu = Q_{-\nu-1}$ erhalten wir übrigens unmittelbar die zweite Integralformel

$$Q_\nu(x) = \int_0^\infty \left(x + \sqrt{x^2-1}\,\mathfrak{Cof}\,\varphi\right)^\nu d\varphi. \tag{41'}$$

4. Zugeordnete Kugelfunktionen. (Legendresche Funktionen höherer Ordnung). Für die Kugelfunktionen höherer Ordnung, die wir durch die Gleichungen

$$P_{\nu,h}(x) = \sqrt{1-x^2}^h \frac{d^h}{dx^h} P_\nu(x)$$

$$Q_{\nu,h}(x) = \sqrt{1-x^2}^h \frac{d^h}{dx^h} Q_\nu(x)$$

definieren (vgl. Kap. V, § 9, 1, S. 260), erhalten wir durch Differentiation der Schläflischen Integraldarstellung (36) und darauffolgende Anwendung der Substitution $t = x + |x^2-1|^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}$ aus Nr. 2 ebenfalls Integralformeln, von denen die folgende explizit hingeschrieben sei:

$$P_{\nu,h}(x) = (-1)^h \frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+h)}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^\nu \cos h\varphi \, d\varphi .$$

§ 4. Die Kugelfunktionen von Laplace.

Wir haben die Laplaceschen Kugelfunktionen $Y_n(\vartheta, \varphi)$ in Kap. V, § 9, 4, S. 265 eingeführt als die zu den Eigenwerten $\lambda = n(n+1)$ gehörigen, überall regulären Eigenfunktionen der Differentialgleichung

$$\Delta^* Y + \lambda Y = \frac{1}{\sin^2\vartheta} Y_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\sin\vartheta} (\sin\vartheta \, Y_\vartheta)_\vartheta + \lambda Y = 0 \tag{42}$$

auf der Kugel. Die Funktionen $r^n Y_n = U_n$ sind dann ganze rationale Funktionen der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z, die der Differentialgleichung $\Delta U = 0$ genügen und homogen vom Grade n sind. Wir sahen, daß es mindestens $2n+1$ voneinander linear unabhängige Funktionen U_n und also auch Y_n mit demselben n geben muß. Nunmehr wollen wir zeigen, daß wir in diesen Funktionen Y_n wirklich alle Eigenfunktionen, in den Werten $\lambda = n(n+1)$ also alle Eigenwerte unseres Eigenwertproblems vor uns haben, ferner, daß es wirklich auch nicht mehr als $2n+1$ linear unabhängige Kugelfunktionen n^{ter} Dimension gibt; endlich wollen wir diese Funktionen explizit durch die uns aus § 3 und Kap. V, § 9, 1, S. 260 bekannten Legendreschen Funktionen höherer Ordnung ausdrücken. Wir beginnen mit dem letzten Punkte.

1. Aufstellung von $2n+1$ Kugelfunktionen n^{ter} Dimension. Zu speziellen Kugelfunktionen gelangen wir wieder durch den oft angewandten Ansatz $Y(\vartheta, \varphi) = p(\varphi) q(\vartheta)$. Gehen wir mit ihm in die Differentialgleichung (42) für $\lambda = n(n+1)$ ein und bezeichnen die Differentiation nach φ mit einem Strich, die nach ϑ mit einem Punkt, so geht (42) über in

$$\frac{p''(\varphi)}{p(\varphi)} = -\frac{(\sin\vartheta \, \dot{q})^\cdot \sin\vartheta}{q} - n(n+1)\sin^2\vartheta = -\varrho ,$$

wobei ϱ eine Konstante sein muß. Wir erhalten also für q die Gleichung

$$(\sin\vartheta\,\dot{q})^{\cdot} + \left(n(n+1)\sin\vartheta - \frac{\varrho}{\sin\vartheta}\right) q = 0$$

und müssen den Parameter ϱ in ihr so bestimmen, daß eine für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ reguläre Lösung existiert. Durch die Substitution $x = \cos\vartheta$ geht diese Gleichung, wenn wir von nun an die Differentiation nach x mit einem Strich bezeichnen, sofort über in

$$((1-x^2)\,q')' + \left(n(n+1) - \frac{\varrho}{1-x^2}\right) q = 0$$

mit der Randbedingung der Regularität für $x = +1$ und $x = -1$; dieses Problem ist uns aus Kap. V, § 9, 1, S. 259 in etwas anderer Gestalt bekannt. Wir kennen nämlich die Lösungen $\varrho = h^2$ und $q = P_{n,h}(x)$, wobei $P_{n,h}(x)$ die Legendreschen Funktionen h^{ter} Ordnung $P_{n,h} = \sqrt{1-x^2}^{\,h} \frac{d^h}{dx^h} P_n(x)$ sind; h kann hier die Werte $0, 1, 2, \ldots, n$ annehmen. Da p sich aus $p''(\varphi) + h^2 p(\varphi) = 0$ als $a_h \cos h\varphi + b_h \sin h\varphi$ bestimmt, so ergibt sich aus $Y = p\,q$ nunmehr sofort als Lösung von (42)

$$Y(\vartheta, \varphi) = (a_h \cos h\varphi + b_h \sin h\varphi)\, P_{n,h}(\cos\vartheta),$$

so daß wir in der Funktion

$$(43) \qquad Y_n = \frac{a_{n,0}}{2} P_n(\cos\vartheta) + \sum_{h=1}^{n} (a_{n,h} \cos h\varphi + b_{n,h} \sin h\varphi)\, P_{n,h}(\cos\vartheta)$$

eine von $2n+1$ willkürlichen linearen Parametern abhängige Kugelfunktion n^{ter} Dimension vor uns haben, die wir bald als die allgemeinste mögliche erkennen werden. Die Funktionen $\cos h\varphi\, P_{n,h}(\cos\vartheta)$, $\sin h\varphi\, P_{n,h}(\cos\vartheta)$ sind alle voneinander linear unabhängig, weil sie paarweise orthogonal zueinander sind. Wir wollen sie die *symmetrischen Kugelfunktionen n^{ter} Ordnung* nennen.

2. Vollständigkeit des gewonnenen Funktionensystems. Daß wir in den $2n+1$ Funktionen $\cos h\varphi\, P_{n,h}(\cos\vartheta)$, $\sin h\varphi\, P_{n,h}(\cos\vartheta)$ ein vollständiges orthogonales Funktionensystem auf der Kugeloberfläche gewonnen haben, folgt unmittelbar aus einigen unserer früher bewiesenen Sätze. Denn einmal bilden die Funktionen $\sin h\varphi$, $\cos h\varphi$ ein vollständiges Funktionensystem in φ, andererseits sind die Funktionen $P_{n,h}(x)$ für jedes h ein vollständiges Funktionensystem in x, weil das System aller Eigenfunktionen eines Eigenwertproblems immer vollständig ist (vgl. Kap. VI, § 2, 3). Nun brauchen wir uns nur des Satzes aus Kap. II, § 12, 8 zu erinnern, welcher eine allgemeine Vorschrift zur Bildung vollständiger Funktionensysteme in zwei Variablen aus solchen in nur je einer Variablen enthält, um die Vollständigkeit unserer Funktionen zu erkennen.

Eine unmittelbare Folge dieses Ergebnisses ist, daß die Differentialgleichung (42) keine anderen Eigenfunktionen als die angegebenen und also auch keine anderen Eigenwerte als die Werte $n(n+1)$ besitzen kann, womit alle oben aufgeworfenen Fragen ihre Antwort gefunden haben. Es ist bemerkenswert, daß auf diese Art für die algebraische Tatsache, daß es genau $2n+1$ linear unabhängige Funktionen Y_n gibt, ein transzendenter Beweis geliefert ist.

Natürlich läßt sich die genannte algebraische Tatsache auch leicht direkt algebraisch beweisen. Betrachten wir irgend eine homogene ganze rationale Funktion n^{ten} Grades $u = \sum a_{rst} x^r y^s z^t$ $(r+s+t=n)$ von x, y, z, so ist jeder Koeffizient a_{rst} bis auf einen Zahlenfaktor als ein n^{ter} Differentialquotient in der Form $\frac{\partial^n u}{\partial x^r \partial y^s \partial z^t}$ darstellbar. Das Bestehen der Differentialgleichung $u_{xx} = -u_{yy} - u_{zz}$ erlaubt uns nun, aus jedem Differentialquotienten $\frac{\partial^m u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$, in welchem nach der Variablen x mehr als einmal differenziert ist, die höheren als ersten Differentiationen nach x zu vertreiben, z. B. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial y}$. Also sind alle Koeffizienten von u bei der Bedingung $\Delta u = 0$ lineare Kombinationen der $2n+1$ Koeffizienten $a_{0,0,n}$, $a_{0,1,n-1}, \dots a_{0,n,0}$, $a_{1,0,n-1} \dots a_{1,n-1,0}$, die ihrerseits willkürlich gewählt werden dürfen.

3. Der Entwicklungssatz. Unsere früherenSätze (vgl. z. B. Kap. V, § 10, 5) lehren uns nunmehr, da wir in den Funktionen (43) alle Eigenfunktionen unseres Problems besitzen, daß jede auf der Kugel mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetige Funktion $g(\vartheta, \varphi)$ sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den Kugelfunktionen entwickeln läßt:

$$g(\vartheta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big[a_{n,0} P_n(\cos\vartheta) + \sum_{h=1}^{n}(a_{n,h}\cos h\varphi + b_{n,h}\sin h\varphi) P_{n,h}(\cos\vartheta)\Big],$$

wobei die Koeffizienten $a_{n,0}$, $a_{n,h}$, $b_{n,h}$ sich mit Rücksicht auf die Formeln Kap. V, § 9, 1, S. 260 aus den Relationen

$$(44)\quad \begin{cases} a_{n,0} = \dfrac{2n+1}{4\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} g(\vartheta,\varphi) P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \\ a_{n,h} = \dfrac{2n+1}{2\pi}\dfrac{(n-h)!}{(n+h)!}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} g(\vartheta,\varphi) P_{n,h}(\cos\vartheta)\cos h\varphi\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \\ b_{n,h} = \dfrac{2n+1}{2\pi}\dfrac{(n-h)!}{(n+h)!}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} g(\vartheta,\varphi) P_{n,h}(\cos\vartheta)\sin h\varphi\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \end{cases}$$

bestimmen. Die Ausdehnung dieses Resultates auf allgemeinere Funktionen $g(\vartheta, \varphi)$ braucht uns hier nicht zu beschäftigen.

4. Das Poissonsche Integral. Gemäß unseren früheren Ansätzen können wir jetzt die Lösung der Randwertaufgabe der Potentialtheorie für eine Kugel vom Radius 1 mit den Randwerten $g(\vartheta, \varphi)$ in der folgenden Form explizit hinschreiben:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[a_{n,0} P_n(\cos\vartheta) + \sum_{h=1}^{n} (a_{n,h} \cos h\varphi + b_{n,h} \sin h\varphi) P_{n,h}(\cos\vartheta) \right].$$

Wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz für $r \leqq r_0 < 1$ können wir unter Einführung der Integraldarstellungen (44) Summation und Integration vertauschen. Sodann läßt sich die Summation in geschlossener Form ausführen; man nimmt hierzu am bequemsten vorerst $\vartheta = 0$, $\varphi = 0$ an und beachtet zum Schluß, daß wegen der Willkürlichkeit der Wahl des Nordpols auf der Kugel das Resultat für einen beliebigen Kugelpunkt ϑ, φ gelten muß.

Wegen $P_n(1) = 1$, $P_{n,h}(1) = 0$ erhalten wir

$$4\pi u(r,0,0) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) r^n P_n(\cos\vartheta) \right\} g(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi ,$$

und hier läßt sich die Summe in geschlossener Form ausführen, wenn man die aus der Definitionsgleichung $\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(x) = (1 - 2hx + h^2)^{-\frac{1}{2}}$ vermöge der Rekursionsformel (37′) sofort ableitbare Relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) h^n P_n(x) = \frac{1 - h^2}{(1 - 2hx + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

benutzt. Indem wir nach Ausführung der Summation wieder den Pol der Kugel verlegt denken, schreiben wir gleich allgemein das Resultat in der Form

$$4\pi u(r, \vartheta, \varphi) = (1 - r^2) \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{g(\vartheta', \varphi')}{\{r^2 - 2r(\cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi - \varphi')) + 1\}^{\frac{3}{2}}} \sin\vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi'.$$

Dieses sogenannte Poissonsche Integral drückt die Potentialfunktion im Inneren durch ihre Randwerte aus; es enthält keinerlei explizite Bezugnahme auf die Kugelfunktionen mehr. Im zweiten Band werden wir auf dieses Integral und seine Bedeutung im Rahmen der Potentialtheorie ausführlich zurückkommen.

5. Die Maxwell-Sylvestersche Darstellung der Kugelfunktionen. Eine ganz andere, an die physikalische Bedeutung des Potentials anknüpfende Darstellung der Kugelfunktionen hat *Maxwell* gegeben[1]). In diesem Abschnitt wollen wir die Kugelfunktionen im Anschluß an

[1]) A Treatise on Electricity and Magnetism. Bd. 1, 2. Aufl., S. 179—214. Oxford 1881.

den Maxwellschen Grundgedanken und an eine ergänzende Bemerkung von *Sylvester* untersuchen und so zu einer neuen Entwicklung ihrer Theorie gelangen.

Wir gehen von dem Grundpotential $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ aus, das einer im Nullpunkt konzentrierten Masse von der Größe Eins entspricht, und beachten, daß jeder Differentialquotient $v = \frac{\partial^n u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$ $(n = \alpha + \beta + \gamma)$ einer Potentialfunktion u wieder der Potentialgleichung $\Delta v = 0$ genügt. Denn durch Differentiation erhält man aus $\Delta u = 0$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\Delta u = \Delta \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \ldots$$

Daher ist auch, unter a, b, c Konstante verstanden, die Funktion

$$a\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + b\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + c\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}$$

eine Potentialfunktion. Wir schreiben sie unter Verwendung der symbolischen Linearform

$$L = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}$$

auch in der Gestalt $L\frac{1}{r}$ oder auch in der folgenden:

$$\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu},$$

wobei $\alpha = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ist und $\frac{\partial}{\partial \nu}$ die Differentiation nach derjenigen Richtung ν bedeutet, deren Richtungskosinus zu a, b, c proportional sind[1]). Dieses Potential entspricht, physikalisch gesprochen, einem Dipol vom Moment α und der Richtung ν. Allgemeiner erhalten wir in

$$u = C\frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial \nu_1 \partial \nu_2 \cdots \partial \nu_n} = C L_1 L_2 \cdots L_n \frac{1}{r} \tag{45}$$

ein Potential, welches einem „*Multipol*" mit den Achsen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ entspricht. Dabei bedeuten die L_i Linearformen in den Operatoren $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, und ihre Koeffizienten a_i, b_i, c_i definieren die Achsen-

[1]) Will man für die a, b, c auch komplexe Werte zulassen, so muß man natürlich bei den Wertetripeln, für die $a^2+b^2+c^2 = 0$ ist, die nötige Vorsicht anwenden.

richtungen ν_i. Man erkennt sofort, daß das Potential u die Gestalt hat

$$u = U_n(x, y, z)\, r^{-2n-1}, \tag{46}$$

wobei U_n eine ganze rationale homogene Funktion n^{ten} Grades in x, y, z ist. Die Funktion U_n genügt selbst der Potentialgleichung $\Delta U_n = 0$, wie man aus folgendem allgemeinen Satz erkennt: *Zugleich mit* $u(x, y, z)$ *ist stets auch* $\frac{1}{r} u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)$ *eine Lösung der Potentialgleichung*[1]). Die so gewonnenen Funktionen $U_n(x, y, z)$ sind daher für $r = 1$ nach unseren früheren Definitionen (Kap. V, § 9, 4, S. 265) Kugelfunktionen n^{ter} Ordnung.

Da jede der n in (45) vorkommenden Achsenrichtungen durch zwei Parameter festgelegt wird und außerdem in dem Potential u noch ein beliebiger konstanter Faktor vorkommt, so haben wir im ganzen $2n + 1$ willkürliche Konstanten. Wir können daher vermuten, daß in der obigen Form (45) tatsächlich sämtliche Kugelfunktionen n^{ter} Ordnung darstellbar sein werden. Den strengen Nachweis dieser Tatsache wollen wir erbringen, indem wir zunächst die $2n + 1$ linear unabhängigen symmetrischen Kugelfunktionen $P_{n,h}(\cos\vartheta)\sin h\varphi$, $P_{n,h}(\cos\vartheta)\cos h\varphi$ durch Potentiale von Multipolen darstellen. Daraus folgt dann unmittelbar, daß jede Kugelfunktion n^{ter} Ordnung durch eine Summe von Multipolpotentialen geliefert wird. Endlich werden wir nachweisen, daß jede Summe von mehreren solchen gleich dem Potential eines einzigen Multipols ist, den wir durch eine einfache geometrische Konstruktion gewinnen können.

Die $2n + 1$ symmetrischen Kugelfunktionen aus Nr. 1 erhalten wir leicht, indem wir symmetrische Multipole betrachten. Es seien n Achsen mit den Richtungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ in der x, y-Ebene derart symmetrisch angeordnet, daß je zwei aufeinander folgende den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ miteinander bilden. Setzen wir

$$\frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial\nu_1 \partial\nu_2 \cdots \partial\nu_n} = u_n = U_n r^{-2n-1} \tag{47}$$

und beachten, daß die linke Seite gegenüber Drehungen der Kugel um die z-Achse durch den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ invariant ist, so erkennen wir unmittelbar, daß die sicher nicht identisch verschwindende[2]) Kugelfunktion n^{ter} Ordnung

$$u_n r^{n+1} = U_n r^{-n} = V_n(\vartheta, \varphi) \tag{48}$$

[1]) Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus der auf Polarkoordinaten transformierten Gestalt der Potentialgleichung. (Vgl. Kap. IV, § 7, 2, S. 195.)

[2]) Daß kein Multipolpotential identisch verschwinden kann, wird auf S. 428 bewiesen werden.

als Funktion von φ die Periode $\frac{2\pi}{n}$ besitzt. Da jede Kugelfunktion n^{ter} Ordnung nach Nr. 3 die Darstellung

$$\sum_{h=0}^{n} (a_{n,h} \cos h\,\varphi + b_{n,h} \sin h\,\varphi) P_{n,h}(\cos\vartheta)$$

gestattet, so ergibt sich hieraus, daß $V_n(\vartheta, \varphi)$ die Form

$$\left\{ \begin{aligned} V_n(\vartheta, \varphi) &= [a_{n,n} \cos n\,\varphi + b_{n,n} \sin n\,\varphi] P_{n,n}(\cos\vartheta) \\ &= \alpha \cos n\,(\varphi - \varphi_0) P_{n,n}(\cos\vartheta) \end{aligned} \right. \tag{49}$$

haben muß. Indem wir ferner die Willkür bei der Wahl einer der Achsen ν_i bedenken, erkennen wir, daß tatsächlich jede der Kugelfunktionen von der Form (49) in der Gestalt (47) (mit $r = 1$) darstellbar ist. Auf die Bestimmung der Proportionalitätsfaktoren α können wir hier verzichten.

Um nun auch für die übrigen Kugelfunktionen n^{ter} Ordnung eine Darstellung durch Multipole zu gewinnen, merken wir an, daß sich das Potential u_n aus (47) wegen (48) und (49) in der Form

$$u_n = f(x, y)\, g\left(\frac{z}{r}\right) r^{-n-1}$$

mit $f(x, y) = \alpha \cos n\,(\varphi - \varphi_0)$ zerlegen läßt. Hierin ersetzen wir n durch h und differenzieren dann $(n - h)$ mal nach z. Die entstehende Potentialfunktion $u_{n,h}$ hat wieder die Gestalt

$$u_{n,h} = f(x, y)\, \bar{g}\left(\frac{z}{r}\right) r^{h-1},$$

und hieraus schließen wir, daß die Kugelfunktion n^{ter} Ordnung

$$V_n(\vartheta, \varphi) = u_{n,h}\, r^{n+1}$$

die Form $\alpha \cos h\,(\varphi - \varphi_0)\, \omega(\vartheta)$ haben muß. Daher muß sie nach Nr. 1 notwendig die Gestalt

$$\text{konst.} \cos h\,(\varphi - \varphi_0) P_{n,h}(\cos\vartheta) \tag{50}$$

besitzen. Daß man umgekehrt jede Funktion dieser Schar durch unseren Prozeß erhält, folgt wieder unmittelbar aus der Willkür bei der Wahl der einen Achse.

Da sich nach Nr. 2 jede Kugelfunktion n^{ter} Ordnung als eine Summe aus $2n + 1$ Kugelfunktionen der Gestalt (50) darstellen läßt, folgt unmittelbar, daß wir jede Kugelfunktion n^{ter} Ordnung erhalten, indem wir Summen von Multipolpotentialen

$$\sum_{i+k+l=n} a_{ikl} \frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial x^i \partial y^k \partial z^l} \tag{51}$$

bilden. Daß umgekehrt jede solche Summe eine Kugelfunktion n^{ter} Ordnung liefert, ist nach S. 424 selbstverständlich. Es wird sogar, wenn wir die Koeffizienten a_{ikl} alle möglichen Werte durchlaufen lassen, jede einzelne Kugelfunktion unendlich oft dargestellt, wie wir sogleich näher ausführen wollen.

Zunächst beweisen wir noch, daß jede Summe der obigen Gestalt das Potential eines einzigen Multipols mit geeigneten Achsen ist. Wir bedienen uns dabei einer symbolischen Schreibweise, indem wir das homogene Polynom n^{ten} Grades

$$H(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i+k+l=n} a_{ikl}\, \xi^i \eta^k \zeta^l$$

betrachten und dann unser Potential in der Form $H\frac{1}{r}$ schreiben, wobei die Unbestimmten ξ, η, ζ in H durch die Differentiationssymbole $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ zu ersetzen sind. Da bei dieser Bedeutung von ξ, η, ζ die Funktion $(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\frac{1}{r}$ identisch Null ist, so ist gewiß $H\frac{1}{r} = H_1\frac{1}{r}$, sobald die Differenz $H - H_1$ als Polynom der Unbestimmten ξ, η, ζ, in der Form $Q \cdot (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$ darstellbar ist, wobei Q ein homogenes Polynom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades in ξ, η, ζ bedeutet.

Jetzt stützen wir uns auf einen einfachen von *Sylvester*[1]) benutzten algebraischen Satz: *Zu jedem homogenen Polynom n^{ten} Grades $H(\xi, \eta, \zeta)$ kann man n Linearformen $L_1, L_2, \ldots, L_n$ und ein Polynom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades $Q(\xi, \eta, \zeta)$ derart bestimmen, daß eine Beziehung der Gestalt*

$$H = C \cdot L_1 L_2 \cdots L_n + Q \cdot (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

besteht. Falls H reell ist, so sind die Linearformen $L_1, L_2, \cdots, L_n$ durch die Forderung der Realität ihrer Koeffizienten bis auf konstante Faktoren eindeutig bestimmt. Den Beweis dieses Satzes und die gleichzeitige geometrische Kennzeichnung der Formen L_i verschieben wir, um den Gedankengang nicht zu unterbrechen, an den Schluß des Abschnittes. Aus dem Sylvesterschen Satze folgt unsere Behauptung bezüglich der Darstellung des Potentials (51) durch einen einzigen Multipol ohne weiteres. Denn verstehen wir unter ν_i die auf der Ebene $L_i = 0$ senkrechte Achsenrichtung, so erhalten wir

$$u = H\frac{1}{r} = C\frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial \nu_1 \partial \nu_2 \cdots \partial \nu_n},$$

womit die gewünschte Darstellung geleistet ist.

---

[1]) Vgl. *Sylvester, J. J.:* Note on spherical harmonics. Phil. Mag. Bd. 2, S. 291—307 u. 400. 1876. Papers Bd. 3, S. 37—51. Cambridge 1909.

Damit haben wir die wesentlichen Tatsachen unserer Theorie gewonnen. Wir können unseren Überlegungen eine etwas andere Wendung geben, die eine Berufung auf die Ergebnisse der Nr. 1, 2 vermeidet und den rein algebraischen Charakter unserer Sätze schärfer betont, dafür allerdings den Zusammenhang mit den expliziten Darstellungen lockert. Zu diesem Zwecke gehen wir von der Bemerkung aus, daß zwei Funktionen $H\frac{1}{r}$ und $H_1\frac{1}{r}$ dann und nur dann mit einander identisch sind, wenn die Differenz $H^*(\xi,\eta,\zeta) = H(\xi,\eta,\zeta) - H_1(\xi,\eta,\zeta)$ durch $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ teilbar ist. Der erste Teil der Behauptung ist, wie schon hervorgehoben wurde, selbstverständlich. Um den zweiten Teil zu beweisen, müssen wir zeigen, daß aus einer Relation $H^*\frac{1}{r} = 0$ die Teilbarkeit des homogenen Polynoms $H^*(\xi,\eta,\zeta)$ durch $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ folgt[1]). Nun ist nach dem Sylvesterschen Satze

$$H^* = C L_1^* L_2^* \cdots L_n^* + Q^* \cdot (\xi^2+\eta^2+\zeta^2), \tag{52}$$

wo $L_1^*, L_2^*, \ldots, L_n^*$ Linearformen bedeuten, die im Falle eines reellen H^* reell angenommen werden können. Falls eine der Linearformen L_i^* identisch verschwindet, ist unsere Behauptung selbstverständlich. Wenn aber keine der Linearformen identisch verschwindet, so wird

$$H^*\frac{1}{r} = C L_1^* L_2^* \cdots L_n^* \frac{1}{r}$$
$$= C \frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial \nu_1^* \partial \nu_2^* \cdots \partial \nu_n^*},$$

und das Multipolpotential auf der rechten Seite kann wegen der Singularität im Nullpunkte nur dann im ganzen Raume verschwinden, wenn $C = 0$ ist; denn wäre $\frac{\partial^m \frac{1}{r}}{\partial \nu_1 \cdots \partial \nu_m} = v_m \neq 0$, $\frac{\partial v_m}{\partial \nu_{m+1}} = 0$, so müßte v_m auf jeder Parallele zur Achse ν_{m+1} konstante Werte haben, was der Singularität im Nullpunkt widerspricht. Somit haben wir

$$H^*(\xi,\eta,\zeta) = Q^*(\xi,\eta,\zeta)\cdot(\xi^2+\eta^2+\zeta^2),$$

wie wir behaupteten.

Nun können wir, wie leicht ersichtlich, jede homogene Funktion n^{ten} Grades $H(\xi,\eta,\zeta)$ auf eine und nur eine Weise in die Gestalt setzen:

$$H(\xi,\eta,\zeta) = G_n(\eta,\zeta) + \xi G_{n-1}(\eta,\zeta) + (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\cdot Q(\xi,\eta,\zeta). \tag{53}$$

Hierbei bedeutet G_n eine homogene Funktion n^{ten} Grades in η, ζ allein, und entsprechend G_{n-1} eine ebensolche Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades. Die Differenz zweier Funktionen n^{ten} Grades $H(\xi,\eta,\zeta)$ und $\bar{H}(\xi,\eta,\zeta)$ ist

[1]) Vgl. die auf S. 430, Fußnote [2]) zitierte Arbeit von *A. Ostrowski*.

dann und nur dann durch $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ teilbar, wenn für die zugehörigen Funktionen $G_n, G_{n-1}, \bar{G}_n, \bar{G}_{n-1}$ identisch

$$G_n = \bar{G}_n, \qquad G_{n-1} = \bar{G}_{n-1}$$

gilt. Nach dem eben bewiesenen Hilfssatz haben wir daher mit Rücksicht auf die $2n+1$ in den Funktionen G_n und G_{n-1} verfügbaren Koeffizienten in der Gestalt $H\frac{1}{r}$ wirklich genau $2n+1$ linear unabhängige Potentiale. Somit erhalten wir tatsächlich jede Kugelfunktion n^{ten} Grades durch eine Summe von Potentialen von Multipolen. Um allerdings über diese reine Existenzbetrachtung hinaus die Darstellung der Kugelfunktionen in dieser Gestalt wirklich zu gewinnen, wird man in irgendeiner Form auf Überlegungen analog zu den oben durchgeführten zurückgreifen müssen.

Zum Schlusse bleibt der Beweis des Sylvesterschen Satzes nachzutragen. Wir führen ihn durch eine einfache Betrachtung aus dem Gedankenkreise der algebraischen Geometrie. Der Kegel n^{ten} Grades $H(\xi,\eta,\zeta)=0$ im ξ,η,ζ-Raum schneidet nach dem Bézoutschen Theorem den absoluten Kegel $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=0$ in genau $2n$ Kanten, wobei die mehrfachen Schnitte gegebenenfalls richtig zu bewerten sind. Wir verbinden diese $2n$ Kanten durch n Ebenen mit den Gleichungen

$$L_i(\xi,\eta,\zeta) = a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

derart, daß jede Ebene zwei der Kanten enthält und daß jede Kante dabei einmal berücksichtigt wird. Mehrfache Kanten kommen dabei entsprechend ihrer Vielfachheit vor[1]). Wir betrachten nun das zwei Parameter λ und μ enthaltende Büschel von Kegeln n^{ter} Ordnung

$$\lambda H + \mu L_1 L_2 \cdots L_n = 0.$$

Jeder Kegel dieses Büschels schneidet den absoluten Kegel in den $2n$ angegebenen festen Kanten. Nunmehr greifen wir eine beliebige

---

[1]) Um den Sinn dieser Vorschrift zu präzisieren, ohne auf die schwierigen allgemeinen algebraischen Eliminationstheorien Bezug zu nehmen, verfahren wir wie folgt. Wir uniformisieren das Gebilde $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=0$, indem wir etwa

$$(*) \qquad \xi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \eta = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \zeta = i = \sqrt{-1}$$

setzen. Eine homogene Funktion n^{ten} Grades $H(\xi,\eta,\zeta)$ geht dann vermöge (*) in eine rationale Funktion $2n^{\text{ten}}$ Grades $H^*(t)$ über, deren Nullstellen die gemeinsamen Kanten der Kegel $H(\xi,\eta,\zeta)=0$ und $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=0$ festlegen. Wir wollen sagen, eine gemeinsame Kante dieser Kegel zähle k-fach, wenn für sie $H^*(t)$ als Funktion von t eine genau k-fache Nullstelle hat. Die Linearformen $L_1, L_2, \ldots, L_n$ sind nun so zu wählen, daß jede k-fache Schnittkante des Kegels $H=0$ mit dem absoluten Kegel auch k-fache Schnittkante des Ebenenaggregates $L_1 L_2 \ldots L_n = 0$ ist. Daß sich diese Vorschrift in jedem Falle realisieren läßt, ist leicht einzusehen.

unter den von den angegebenen verschiedenen Kanten des absoluten Kegels heraus und bestimmen das Parameterverhältnis $\lambda : \mu$ so, daß der Kegel n^{ten} Grades $\lambda H + \mu L_1 L_2 \cdots L_n = 0$ auch noch durch diese Kante hindurchgeht, was sicherlich möglich ist und für $\lambda : \mu$ einen von Null und Unendlich verschiedenen Wert liefert. Dieser neue Kegel n^{ten} Grades hat dann mit einem Kegel zweiten Grades mehr als $2n$ Schnittkanten gemeinsam, was nur möglich ist, wenn er den Kegel zweiten Grades vollständig enthält. Dies aber ist dann und nur dann der Fall, wenn die linke Seite der Gleichung den Ausdruck $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ als Faktor enthält[1]), wenn also

$$\lambda H + \mu L_1 L_2 \cdots L_n = Q \cdot (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

ist. Damit ist der Sylvestersche Satz bewiesen[2]). Zugleich ist eine einfache geometrische Deutung für die Achsen des zu einer Kugelfunktion zugehörigen Multipols gegeben.

Wegen der Realitätsverhältnisse muß man beachten, daß bei reellem H zwar alle Schnittkanten imaginär sein müssen, daß sie aber paarweise konjugiert-komplex sind, so daß es genau eine Möglichkeit gibt, sie auf n reellen Ebenen unterzubringen.

§ 5. Asymptotische Entwicklungen.

Für viele Zwecke ist es wichtig, asymptotische Ausdrücke unserer Funktionen bei großen Werten der in ihnen auftretenden Argumente oder Parameter zu kennen. Schon im vorigen Kapitel haben wir das asymptotische Verhalten der Sturm-Liouvilleschen und der Besselschen

---

[1]) Der erste Teil der Behauptung ist selbstverständlich, der zweite läßt sich am einfachsten beweisen, indem man die vorgelegte Form gemäß (53) in die Gestalt

$$G_n(\eta, \zeta) + \xi G_{n-1}(\eta, \zeta) + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) Q(\xi, \eta, \zeta)$$

setzt. Ist jetzt η, ζ irgendein Wertepaar, für das $\eta^2 + \zeta^2 \neq 0$ ausfällt, so gelten gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$0 = G_n(\eta, \zeta) + \sqrt{-(\eta^2 + \zeta^2)}\, G_{n-1}(\eta, \zeta)$$

und

$$0 = G_n(\eta, \zeta) - \sqrt{-(\eta^2 + \zeta^2)}\, G_{n-1}(\eta, \zeta),$$

aus denen man sofort schließt

$$G_n(\eta, \zeta) = G_{n-1}(\eta, \zeta) = 0.$$

G_n und G_{n-1} verschwinden also für alle Wertepaare η, ζ mit $\eta^2 + \zeta^2 \neq 0$, somit offenbar identisch in η und ζ.

[2]) Dieser algebraische Satz ist von *Sylvester* a. a. O. ohne Beweis benutzt worden. Von *A. Ostrowski* wurde auf die Notwendigkeit hingewiesen, für ihn einen Beweis nachzuholen. Vgl. *Ostrowski, A.*: Mathematische Miszellen I. Die Maxwellsche Erzeugung der Kugelfunktionen. Jahresber. deutsch. Math. Ver. Bd. 33. 1924.

Funktionen unter Beschränkung auf das reelle Gebiet der auftretenden Variablen betrachtet. Wir wollen in diesem Paragraphen Methoden zur Auffindung asymptotischer Darstellungen kennen lernen, die wesentlich auf der Benutzung komplexer Variablen und komplexer Integrale beruhen.

1. Die Methode von Laplace. Eine sehr leistungsfähige Methode zur asymptotischen Abschätzung bestimmter Integrale in ihrer Abhängigkeit von einem Parameter x, die letzten Endes auf Laplace zurückgeht, besteht darin, daß man, wenn möglich, das Integral in die Gestalt bringt

$$F(x) = \int f(x, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau,$$

worin f in einem bestimmten Punkt τ_0 des Integrationsweges für alle x den Wert 1 hat, in allen anderen aber mit wachsendem x gegen Null konvergiert (vgl. den Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes, Kap. II, § 9). Für große Werte von x wird dann die Umgebung von τ_0 den wesentlichsten Beitrag liefern. In dieser Umgebung ersetzen wir φ durch die Anfangsglieder $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (\tau - \tau_0)^\nu$ seiner Entwicklung nach Potenzen von $\tau - \tau_0$ und erstrecken dann das Integral wieder über den ganzen Weg. Wenn die hierdurch begangenen Fehler mit wachsendem x genügend klein werden, so haben wir in

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \int f(x, \tau)\, (\tau - \tau_0)^\nu\, d\tau$$

eine asymptotische Annäherung für $F(x)$.

2. Anwendung zum Beweis der Stirlingschen Formel. Nach diesem Prinzip erhält man z. B. die Stirlingsche Formel auf folgende Weise. Es ist für $s > 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma(s+1) &= \int_0^\infty t^s e^{-t}\, dt \\
&= s^{s+1} \int_0^\infty \tau^s e^{-s\tau}\, d\tau \qquad (t = s\tau) \\
&= s^{s+1} e^{-s} \int_0^\infty e^{-s(\tau - 1 - \log \tau)}\, d\tau \\
&= s^{s+1} e^{-s} \int_0^\infty e^{-sf(\tau)} d\tau .
\end{aligned}$$

Hier hat der Integrand den Wert 1 für $\tau = 1$; überall sonst strebt er mit wachsendem s gegen Null. Wir ersetzen daher das Integral durch das von $1 - \varepsilon$ bis $1 + \varepsilon$ $\left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\right)$ erstreckte und schätzen zunächst die

durch Vernachlässigung der Integrale von 0 bis $1-\varepsilon$ und von $1+\varepsilon$ bis ∞ begangenen Fehler ab. Es ist für $\frac{1}{2} \leqq \tau \leqq 1$

$$\tau - 1 - \log\tau = \int_{\tau}^{1} \left(\frac{1}{u} - 1\right) du \geqq \int_{\tau}^{1} (1-u)\, du = \frac{1}{2}(\tau-1)^2 \geqq \frac{1}{8}(\tau-1)^2$$

und für $1 \leqq \tau \leqq 4$

$$\tau - 1 - \log\tau = \int_{1}^{\tau} \left(1 - \frac{1}{u}\right) du \geqq \frac{1}{4} \int_{1}^{\tau} (u-1)\, du = \frac{1}{8}(\tau-1)^2.$$

In den Integralen

$$\int_{0}^{1-\varepsilon} e^{-sf(\tau)} d\tau, \qquad \int_{1+\varepsilon}^{4} e^{-sf(\tau)} d\tau$$

ersetzen wir den Integranden durch seinen größten Wert, der an den Stellen $1 \mp \varepsilon$ angenommen wird, und diesen wieder durch die obere Schranke $e^{-\frac{s}{8}\varepsilon^2}$. So erhalten wir

$$\int_{0}^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{4} \leqq 4 e^{-\frac{s\varepsilon^2}{8}}.$$

Für $\tau \geqq 4$ gilt aber $\tau - 1 - \log\tau \geqq \frac{3\tau}{4} - \log\tau > \frac{\tau}{4}$; daher ist für $s > 4$

$$\int_{4}^{\infty} e^{-s(\tau - 1 - \log\tau)} d\tau < \int_{4}^{\infty} e^{-\frac{s\tau}{4}} d\tau < e^{-s} < e^{-\frac{s\varepsilon^2}{8}}.$$

Wählen wir jetzt $\varepsilon = s^{-\frac{1}{3}}$, so ist demnach für genügend großes s

$$e^s s^{-s-1} \Gamma(s+1) = \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-sf(\tau)} d\tau + O\left(e^{-\frac{1}{8}s^{\frac{1}{3}}}\right).$$

Um nun noch das auf der rechten Seite stehende Integral angenähert zu berechnen, stützen wir uns auf die Beziehung

$$f(\tau) = \frac{(\tau-1)^2}{2} + (\tau-1)^3 \psi(\tau),$$

wo $\psi(\tau)$ eine im Intervalle $\frac{1}{2} \leqq \tau \leqq \frac{3}{2}$ reguläre Funktion ist, deren Betrag dort eine endliche Schranke M nicht überschreitet. Aus dieser Beziehung folgern wir für $1-\varepsilon \leqq \tau \leqq 1+\varepsilon$

$$e^{-\frac{s(\tau-1)^2}{2}} e^{-Ms^{-\frac{1}{3}}} \leqq e^{-sf(\tau)} \leqq e^{-\frac{s(\tau-1)^2}{2}} e^{Ms^{-\frac{1}{3}}}$$

und weiter

$$e^{-sf(\tau)} = e^{-s\frac{(\tau-1)^2}{2}} \left(1 + O\left(s^{-\frac{1}{3}}\right)\right).$$

Hieraus ergibt sich

$$\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-sf(\tau)}\,d\tau = (1+O(s^{-\frac{1}{3}}))\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-\frac{su^2}{2}}\,du$$

$$= (1+O(s^{-\frac{1}{3}}))\sqrt{\frac{2}{s}}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{s}{2}}}^{+\varepsilon\sqrt{\frac{s}{2}}} e^{-v^2}\,dv$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{s}}\,(1+O(s^{-\frac{1}{3}}))\left(1+O\left(e^{-\frac{s\varepsilon^2}{2}}\right)\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{s}}\,(1+O(s^{-\frac{1}{3}})),$$

d. h.

$$\Gamma(s+1) = s^{s+\frac{1}{2}}e^{-s}\sqrt{2\pi}\,(1+O(s^{-\frac{1}{3}})), \tag{54}$$

also

$$\Gamma(s+1) \sim \sqrt{2\pi s}\,s^s e^{-s}. \tag{54'}$$

3. Anwendung zur asymptotischen Berechnung der Hankelschen und Besselschen Funktionen für große Argumente. Die Laplacesche Methode wenden wir jetzt an, um die Hankelsche Funktion $H_\lambda^1(x)$ für große x innerhalb eines Winkels $-\frac{\pi}{2}+\delta<\arg x<\frac{\pi}{2}-\delta$ asymptotisch auszuwerten, und gehen von dem Integral

$$H_\lambda^1(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda)\,(\frac{1}{2}x)^\lambda}{\pi i\,\Gamma(\frac{1}{2})}\int e^{ix\tau}\,(\tau^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,d\tau$$

aus (vgl. § 2, 6, S. 401 und § 2, 7, S. 406), bei dem der Integrationsweg der von Abb. 22 rechts ist, wobei $-\frac{\pi}{2}<\arg x<\frac{\pi}{2}$ sein muß und $\log(\tau^2-1)$ für $\tau>1$ reell angenommen wird. Ohne den Wert des Integrals zu ändern, können wir die Schnitte in der τ-Ebene und den um den einen von ihnen herumgelegten Integrationsweg in die Richtung $\frac{\pi}{2}-\arg x$ drehen. Führen wir dann die Substitution

$$\tau - 1 = i\frac{u}{x} \tag{55}$$

aus, so ist die u-Ebene durch zwei von 0 bzw. von $2ix$ an wagerecht nach rechts laufende Schnitte aufgeschlitzt und der neue Integrationsweg umgibt den längs der positiven reellen Achse laufenden Schnitt, indem er in der oberen Halbebene von rechts nach links, in der unteren von links nach rechts läuft. Verstehen wir unter $u^{\lambda-\frac{1}{2}}$ denjenigen in

der aufgeschnittenen Ebene eindeutigen Zweig, der auf dem unteren Ufer der positiven reellen Achse positiv ist, und unter $\left(1+\frac{iu}{2x}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ den Zweig, der für $u=0$ den Wert 1 annimmt, so wird vermöge (55)

$$H_\lambda^1(x)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda)}{\pi\sqrt{2\pi x}}\,e^{i\left(x+\frac{\pi}{2}\lambda-\frac{\pi}{4}\right)}\int e^{-u}u^{\lambda-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{iu}{2x}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}du\,.$$

Ist nun $\Re(\lambda-\frac{1}{2})>-1$, so können wir die Schleife um $u=0$ zusammenziehen und also das Schleifenintegral ersetzen durch das längs dem unteren Ufer der positiv reellen Achse von 0 nach ∞ erstreckte Integral, vermindert um das längs dem oberen Ufer von ∞ nach 0 erstreckte. Das letztere ist aber das $e^{-2\pi i(\lambda-\frac{1}{2})}$-fache des ersteren. Daher können wir nach leichten Umformungen mit Benutzung der Ergänzungsformel der Gammafunktion schreiben

$$(56)\qquad H_\lambda^1(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{i\left(x-\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\int_0^\infty e^{-u}u^{\lambda-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{ui}{2x}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}du\,.$$

Den letzten Faktor drücken wir durch die Taylorsche Formel mit dem Cauchyschen Restglied aus:

$$(57)\quad\left\{\begin{aligned}\left(1+\frac{ui}{2x}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}&=\sum_{\nu=0}^{p-1}\binom{\lambda-\frac{1}{2}}{\nu}\left(\frac{ui}{2x}\right)^\nu\\&\quad+p\binom{\lambda-\frac{1}{2}}{p}\left(\frac{ui}{2x}\right)^p\int_0^1(1-t)^{p-1}\left(1+\frac{tui}{2x}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}-p}dt\end{aligned}\right.$$

und bemerken, daß wir für den Rest dabei eine brauchbare Abschätzung erhalten.

Für positive u ist nämlich

$$\left|1+\frac{tui}{2x}\right|>\sin\delta\,,\qquad\left|\arg\left(1+\frac{tui}{2x}\right)\right|<\pi$$

$$\left|\left(1+\frac{tui}{2x}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}-p}\right|<e^{\pi|\Im(\lambda)|}(\sin\delta)^{\Re(\lambda-\frac{1}{2}-p)}=A_p\,,$$

wo A_p von x und t unabhängig ist. Indem wir (57) in (56) einsetzen und gliedweise integrieren, erhalten wir

$$(58)\quad H_\lambda^1(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{i\left(x-\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\left[\sum_{\nu=0}^{p-1}\binom{\lambda-\frac{1}{2}}{\nu}\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{i}{2x}\right)^\nu+R_p\right],$$

und es ist

$$|R_p|\leqq A_p\left|p\binom{\lambda-\frac{1}{2}}{p}\left(\frac{i}{2x}\right)^p\left\{\int_0^1(1-t)^{p-1}dt\int_0^\infty e^{-u}|u^{\lambda-\frac{1}{2}+p}|\,du\right\}\right|,$$

$$R_p=O(|x|^{-p})\,.$$

Auf dieselbe Weise, nämlich durch die Substitution $\tau + 1 = \frac{iu}{x}$ erhalten wir

$$(59)\quad H_\lambda^2(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-i\left(x-\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\left[\sum_{\nu=0}^{p-1}\binom{\lambda-\frac{1}{2}}{\nu}\left(\Gamma(\lambda+\nu+\frac{1}{2})\left(-\frac{i}{2x}\right)^\nu + S_p\right]\right.,$$

$$S_p = O\left(|x|^{-p}\right).$$

Daraus ergibt sich

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} J_\lambda(x) &= \tfrac{1}{2}(H_\lambda^1(x) + H_\lambda^2(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{p-1}\binom{\lambda-\frac{1}{2}}{\nu}\frac{\Gamma(\lambda+\nu+\frac{1}{2})}{(2x)^\nu}\left\{\begin{matrix}(-1)^{\frac{\nu}{2}}\cos\left(x-\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\\ (-1)^{\frac{\nu+1}{2}}\sin\left(x-\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\end{matrix}\right\} + O\left(|x|^{-p-\frac{1}{2}}\right), \end{aligned}\right.$$

wobei von den beiden Ausdrücken zwischen den geschweiften Klammern der obere sich auf gerades, der untere auf ungerades ν bezieht.

Das erste Glied der Entwicklung liefert

$$(61)\qquad J_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(|x|^{-\frac{3}{2}}\right),$$

womit die Grenzwerte aus Kap. VI, § 6, 3, festgelegt sind, als

$$\alpha_\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \qquad \delta_\infty = -\frac{\lambda\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

4. Sattelpunktmethode. Um unsere Funktionen bei gleichzeitigem proportionalen Anwachsen von x und λ auszuwerten, gehen wir zweckmäßigerweise von der Integraldarstellung (5), S. 387 aus und wenden unsere Methode in einer allgemeineren Fassung an. Wir haben ein Integral $\int e^{f(\tau)}d\tau$ über einen unendlichen Integrationsweg auszuwerten, wobei im Unendlichen $\Re(f(\tau)) \to -\infty$ gilt. Den Integrationsweg suchen wir so zu verschieben, daß der Betrag des Integranden $e^{\Re(f(\tau))}$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, $\Re(f(\tau))$ einen möglichst kleinen Höchstwert annimmt und beiderseits möglichst rasch abfällt. Ist $\tau = u + iv$, so ist die Richtung schnellsten Falles gegeben durch $du : dv = \frac{\partial\Re(f(\tau))}{\partial u} : \frac{\partial\Re(f(\tau))}{\partial v}$ oder, nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$du : dv = \frac{\partial\Im(f(\tau))}{\partial v} : -\frac{\partial\Im(f(\tau))}{\partial u},$$

d. h. $d\Im(f(\tau)) = 0$; auf der Kurve schnellsten Falles ist also der Imaginärteil von f konstant. Wo $\Re(f(\tau))$ den Höchstwert annimmt, ist die längs der Kurve genommene Ableitung des Real- sowie des Imaginärteiles Null; in diesem Punkt muß also $f'(\tau) = 0$ sein. Trägt man $\Re(f(\tau))$ als dritte räumliche Koordinate z auf, so hat die Fläche $z = \Re(f(\tau))$ dort

einen „Sattelpunkt". Wir suchen also den Integrationsweg so zu legen, daß er von einem Sattelpunkt τ_0 längs zweier durch ihn gehender Zweige der Kurve $\Im(f(\tau)) = \Im(f(\tau_0))$ ins Unendliche führt, derart, daß $\Re(f(\tau))$ längs dieser Zweige abnimmt; der Weg soll also von einem „Paß" beiderseits ins Tal führen.

Die Ableitung der Stirlingschen Formel ordnet sich diesem Verfahren unter, indem dort die reelle Achse schon der richtige Weg war.

5. Anwendung der Sattelpunktmethode zur Berechnung der Besselschen Funktionen bei großem Parameter und großem Argument. Wir wollen nach diesem Verfahren in aller Kürze die Funktion (vgl. Formel (5) S. 387)

$$H_\lambda^1(a\lambda) = -\frac{1}{\pi}\int_{L_1} e^{\lambda(-ia\sin\tau+i\tau)}\,d\tau$$

bei reellem a und großem positiven λ asymptotisch auswerten und zerlegen den Faktor von λ im Exponenten in Real- und Imaginärteil:

$$-ia\sin\tau + i\tau = f(\tau) = a\cos u\,\mathfrak{Sin}\,v - v + i(u - a\sin u\,\mathfrak{Cof}\,v).$$

Die Sattelpunkte sind die Wurzeln der Gleichung $a\cos\tau = 1$; durch sie haben wir die Kurven $u - a\sin u\,\mathfrak{Cof}\,v = \text{konst.}$ zu legen und zu sehen, ob sie sich zu geeigneten Integrationswegen zusammensetzen lassen.

1. Ist $a < 1$, etwa $a = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\alpha}$ $(\alpha > 0)$, so haben wir Sattelpunkte in $\tau = \pm\alpha i$ und die Kurven $u - a\sin u\,\mathfrak{Cof}\,v = 0 - a\sin 0\,\mathfrak{Cof}\,\mathfrak{v} = 0$. Diese bestehen aus der imaginären Achse $u = 0$ und je einem Zweig durch $\tau = \pm\alpha i$, der sich nach oben bzw. unten den Geraden $u = \pm\pi$ annähert. Dies zeigt Abb. 24, in der die Richtung wachsenden Realteils von $f(\tau)$ durch Pfeile angegeben ist. Die aus den Kurven $\Im(f) = 0$ zusammengesetzte ausgezogene Kurve liefert, von unten nach oben durchlaufen, offenbar H_λ^1; denn sie läßt sich in L_1 deformieren bis auf einen Teil, der beliebig weit oben beginnt und innerhalb eines Streifens $-\pi \leqq u \leqq -\pi + \varepsilon$ liegt und daher einen beliebig kleinen Beitrag zum Integral liefert. Der Realteil von $-ia\sin\tau + i\tau$ hat seinen Höchstwert $\alpha - \mathfrak{Tg}\,\alpha$ bei $\tau = -\alpha i$. Wir ersetzen wieder (vgl. S. 431) den Weg L_1 durch das geradlinige Stück L' von $(-\alpha - \varepsilon)i$ bis $(-\alpha + \varepsilon)i$ mit $\varepsilon = \lambda^{-\frac{1}{3}}$. Zerlegen wir den übrigen Integrationsweg in zwei beiderseits anschließende endliche und zwei ins Unendliche

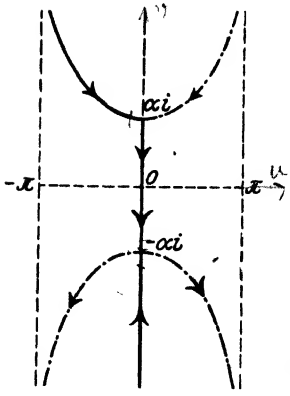


Abb. 24.

führende Teile, so zeigt eine Abschätzung, die der in Nr. 2 vorgenommenen durchaus entspricht, daß

$$\int_{-i\infty}^{(-\alpha-\varepsilon)i} e^{\lambda f(\tau)}\,d\tau + \int_{(-\alpha+\varepsilon)i}^{-\pi+i\infty} e^{\lambda f(\tau)}\,d\tau = e^{\lambda(\alpha-\operatorname{Tg}\alpha)}\,O\left(e^{-c_1\lambda\varepsilon^3}\right)$$

ist, worin c_1 ebenso wie im folgenden c_2, c_3 usw. eine positive, von λ (also auch von ε) unabhängige Konstante bezeichnet. Auf den beiden endlichen Strecken ist nämlich der Betrag des Integranden höchstens gleich den Werten, die er in den Punkten $(-\alpha \pm \varepsilon)i$ hat, und für diese Werte gilt die gegebene Abschätzung. Auf den unendlichen Stücken findet man leicht eine Schranke für den Betrag des Integranden von der Gestalt $e^{-c\lambda(s+c')}$, worin s die Bogenlänge des Integrationsweges und c und c' positive von ε und λ unabhängige Konstanten sind. Daraus folgt für die Beiträge dieser Teile zum gesamten Integral eine Abschätzung $O(e^{-c_1\lambda})$. Auf dem Wegstück L' selbst ist aber

$$\left|f(\tau) - \left(\alpha - \operatorname{Tg}\alpha + \frac{1}{2}f''(-\alpha i)\,(\tau+\alpha i)^2\right)\right| < c_2\varepsilon^3$$

$$f''(-\alpha i) = \operatorname{Tg}\alpha, \qquad f'(-\alpha i) = 0$$

also

$$e^{\lambda f(\tau)} = e^{\lambda\left(\alpha-\operatorname{Tg}\alpha+\operatorname{Tg}\alpha\frac{(\tau+\alpha i)^2}{2}\right)}\left(1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{3}}\right)\right),$$

$$\int_{(-\alpha-\varepsilon)i}^{(-\alpha+\varepsilon)i} e^{\lambda f(\tau)}\,d\tau = e^{\lambda(\alpha-\operatorname{Tg}\alpha)}\int_{(-\alpha-\varepsilon)i}^{(-\alpha+\varepsilon)i} e^{\lambda\operatorname{Tg}\alpha\frac{(\tau+\alpha i)^2}{2}}\,d\tau\left(1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{3}}\right)\right),$$

$$= -i\sqrt{\frac{2}{\lambda\operatorname{Tg}\alpha}}\,e^{\lambda(\alpha-\operatorname{Tg}\alpha)}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda\operatorname{Tg}\alpha}{2}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda\operatorname{Tg}\alpha}{2}}} e^{-u^2}\,du\left(1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{3}}\right)\right),$$

$$= i\sqrt{\frac{2}{\lambda\operatorname{Tg}\alpha}}\,e^{\lambda(\alpha-\operatorname{Tg}\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du\left(1+O\left(e^{-c_3\lambda\varepsilon^2}\right)\right)\left(1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{3}}\right)\right),$$

$$= i\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\operatorname{Tg}\alpha}}\,e^{\lambda(\alpha-\operatorname{Tg}\alpha)}\left(1+O\left(e^{-c_3\lambda\varepsilon^2}\right)\right)\left(1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{3}}\right)\right).$$

Damit haben wir

$$H_\lambda^1(a\lambda) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda\operatorname{Tg}\alpha}}\,e^{\lambda(\alpha-\operatorname{Tg}\alpha)}\left(1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{3}}\right)\right). \tag{62}$$

2. Ist $a > 1$, etwa $a = \frac{1}{\cos\alpha}\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, so haben wir die Sattelpunkte $\tau = \pm\alpha$ und die Kurven

$$u - a\sin u\,\mathfrak{Cof}\,v = \pm(\alpha - a\sin\alpha),$$

$$\mathfrak{Cof}\,v = \frac{u \mp (\alpha - \operatorname{tg}\alpha)}{a\sin u},$$

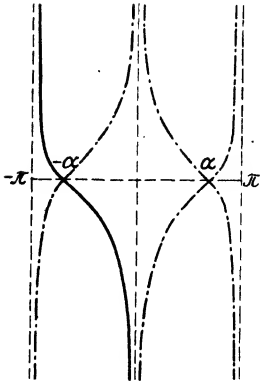


Abb. 25.

die in Abb. 25 wiedergegeben sind. Der ausgezogene Weg liefert $H_\lambda^1(x)$. Ersetzen wir ihn in der Nähe des Sattelpunktes durch ein unter dem Winkel $-\frac{\pi}{4}$ gegen die reelle Achse geneigtes geradliniges Stück und Verbindungsstücke von beschränkter Länge, auf denen $\Im f(\tau)$ keine größeren Werte annimmt als in den Punkten $\tau = -\alpha \pm \varepsilon e^{\frac{3\pi i}{4}}$ (vgl. Abb. 26) und setzen wir wieder $\varepsilon = \lambda^{-\frac{2}{5}}$, so erhalten wir genau wie vorher

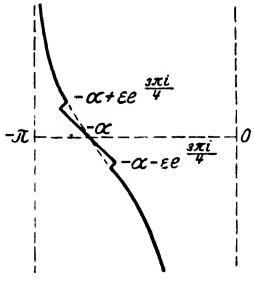


Abb. 26.

$$\int_{L_1} e^{\lambda f(\tau)}\,d\tau = e^{\lambda f(-\alpha)} \int_{-\alpha-\varepsilon e^{\frac{3\pi i}{4}}}^{-\alpha+\varepsilon e^{\frac{3\pi i}{4}}} e^{\frac{\lambda}{2} f''(-\alpha)(\tau+\alpha)^2}\,d\tau\,(1 + O(\lambda^{-\frac{1}{5}}))$$

$$= e^{i\lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)} \int_{-\alpha-\varepsilon e^{\frac{3\pi i}{4}}}^{-\alpha+\varepsilon e^{\frac{3\pi i}{4}}} e^{\frac{-\lambda i}{2}\operatorname{tg}\alpha\,(\tau+\alpha)^2}\,d\tau\,(1 + O(\lambda^{-\frac{1}{5}}))$$

$$= e^{\frac{3\pi i}{4}} \sqrt{\frac{2}{\lambda\operatorname{tg}\alpha}}\, e^{i\lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)} \int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda\operatorname{tg}\alpha}{2}}}^{+\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda\operatorname{tg}\alpha}{2}}} e^{-u^2}\,du\,(1 + O(\lambda^{-\frac{1}{5}}))$$

$$= e^{\frac{3\pi i}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\operatorname{tg}\alpha}}\, e^{i\lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)}\,(1 + O(e^{-c_3\lambda\varepsilon^2}))\,(1 + O(\lambda^{-\frac{1}{5}})),$$

$$H_\lambda^1(a\lambda) = -e^{\frac{3\pi i}{4}}\, e^{i\lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)} \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda\operatorname{tg}\alpha}}\,(1 + O(\lambda^{-\frac{1}{5}})). \tag{63}$$

3. Ist $a = 1$, so verschwindet in dem Sattelpunkt $\tau = 0$ auch noch $f''(\tau)$. Die Kurve $\Im(f(\tau)) = u - \sin u \mathfrak{Cof} v = \Im(f(0)) = 0$ hat daher drei Zweige durch $\tau = 0$ (vgl. Abb. 27), von denen einer die imaginäre Achse ist. Wir ersetzen wieder den gekrümmten Teil des Weges L_1 (in Abb. 28 ausgezogen) dicht bei $\tau = 0$ durch ein um $\frac{5\pi}{6}$ gegen die reelle Achse geneigtes geradliniges Stück der Länge $\varepsilon = \lambda^{-\frac{1}{3}}$ und bekommen für alle τ des Integrationsweges zwischen $-\varepsilon i$ und $\varepsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}$

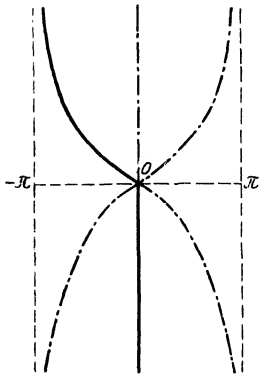


Abb. 27.

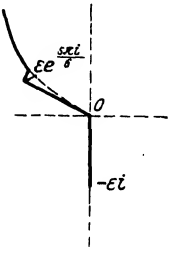


Abb. 28.

$$\left| f(\tau) - \frac{i\tau^3}{6} \right| \leqq c_1 \varepsilon^5 .$$

Ferner ist

$$\int_{L_1} e^{\lambda f(\tau)}\, d\tau = \int_{-\varepsilon i}^{\varepsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}} e^{\lambda f(\tau)}\, d\tau + O\left(e^{-c_1 \lambda \varepsilon^3}\right),$$

$$\int_{-\varepsilon i}^{\varepsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}} e^{\lambda f(\tau)}\, d\tau = \int_{-\varepsilon i}^{\varepsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}} e^{\frac{\lambda i \tau^3}{6}}\, d\tau \left(1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{3}}\right)\right),$$

$$\int_{-\varepsilon i}^{\varepsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}} e^{\frac{\lambda i \tau^3}{6}}\, d\tau = \int_0^{\varepsilon e^{\frac{5\pi i}{6}}} - \int_0^{-\varepsilon i} = \sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}} \left(e^{\frac{5\pi i}{6}} \mp i\right) \int_0^{\varepsilon \sqrt[3]{\frac{\lambda}{6}}} e^{-u^3}\, du ;$$

bei der letzten Umformung ist im ersten Integral $\tau = \sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}}\, e^{\frac{5\pi i}{6}}\, u$, im zweiten $\tau = \sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}}\, i u$ gesetzt. Die rechte Seite der letzten Gleichung wird gleich

$$\sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}} \left(e^{\frac{5\pi i}{6}} + i\right) \int_0^{\infty} e^{-u^3}\, du \left(1 + O\left(e^{-c_2 \varepsilon^3 \lambda}\right)\right),$$

wenn $\varepsilon^3 \lambda$ über einer positiven Schranke bleibt. Nun ist aber

$$\int_0^{\infty} e^{-u^3}\, du = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{2}{3}}\, dt = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) ;$$

also haben wir schließlich

$$H_\lambda^1(\lambda) = -\frac{1}{3\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left(e^{\frac{5\pi i}{6}} + i\right)\sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}}\,(1 + O(\lambda^{-\frac{1}{3}})). \tag{64}$$

Asymptotische Formeln für $J_\lambda(a\lambda)$ erhält man in den Fällen $a \gtrless 1$ aus den hier abgeleiteten für H_λ^1 und den ganz entsprechend zu findenden

$$H_\lambda^2(a\lambda) = i\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda\,\mathfrak{tg}\,\alpha}}\,e^{\lambda(\alpha - \mathfrak{tg}\,\alpha)}\,(1 + O(\lambda^{-\frac{1}{2}})), \qquad (a < 1) \tag{62'}$$

$$H_\lambda^2(a\lambda) = -e^{-\frac{3\pi i}{4}}e^{-i\lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)}\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda\operatorname{tg}\alpha}}\,(1 + O(\lambda^{-\frac{1}{2}})), \qquad (a > 1) \tag{63'}$$

$$H_\lambda^2(\lambda) = -\frac{1}{3\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left(e^{-\frac{5\pi i}{6}} - i\right)\sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}}\,(1 + O(\lambda^{-\frac{1}{3}})) \qquad (a = 1) \tag{64'}$$

durch Kombination nach der Formel

$$J_\lambda(x) = \tfrac{1}{2}(H_\lambda^1(x) + H_\lambda^2(x)).$$

Nur im Falle $a < 1$ ergibt sich als Hauptglied Null. In diesem Falle können wir auch für J_λ den in Abb. 29 ausgezogenen Integrationsweg wählen und erhalten nach derselben Methode

$$J_\lambda(a\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda\,\mathfrak{tg}\,\alpha}}\,e^{\lambda(\mathfrak{tg}\,\alpha - \alpha)}(1 + O(\lambda^{-\frac{1}{2}})). \tag{65}$$

6. Allgemeine Bemerkungen über die Sattelpunktmethode. Wir haben die Sattelpunktmethode nur zur Ableitung von asymptotischen Formeln benutzt, welche die ersten Glieder von asymptotischen Reihen darstellen, die sich nach dem anfangs angedeuteten Prinzip ergeben. Bezüglich dieser Reihen sei auf die ausführliche Darstellung bei *Watson, G. N.:* A treatise on the theory of Bessel Functions, Cambridge 1922, und die Originalabhandlungen verwiesen, insbesondere auf *Debye, P.:* Math. Ann. Bd. 67, S. 535—558, 1909.

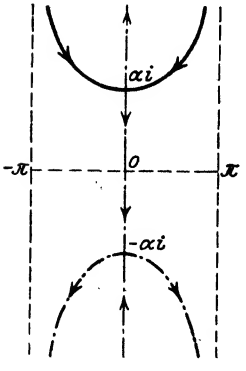


Abb. 29.

Es ist bei der Anwendung der Sattelpunktsmethode übrigens nicht notwendig, den Integrationsweg genau in der beschriebenen Art zu legen, sondern es genügt, wenn er schließlich, d. h. für große Werte des Parameters, nach dem entwickelt wird, dieser Lage hinreichend nahe kommt. Auf diese Weise gewinnt *Faber, G.:* Sitzungsber. Akad. München (math.-phys.) 1922, S. 285—304, eine Anzahl asymptotischer Reihen, z. B. für die Hermiteschen und Laguerreschen Polynome.

7. Methode von Darboux. Eine andere Methode zur Herleitung asymptotischer Formeln rührt von Darboux her[1]). Die zu behandelnden Größen a_ν seien als Koeffizienten einer Potenzreihe, also durch eine erzeugende Funktion $F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ gegeben. Kennt man die Singularitäten dieser Funktion auf dem Konvergenzkreis — er sei $|z| = 1$, $z = e^{i\varphi}$ — und kann man durch Subtraktion bekannter Funktionen $f_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n\nu} z^\nu$ bewirken, daß der Rest $F - f_n$ bei Annäherung an den Konvergenzkreis gleichmäßig gegen eine n-mal stetig differenzierbare Funktion von φ konvergiert, so setzen sich die Koeffizienten der Potenzreihe

$$F(z) - f_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\alpha_\nu - \alpha_{n\nu}) z^\nu$$

zusammen aus den Fourierschen Koeffizienten zweier n-mal stetig differenzierbarer (d. h. für $n = 0$ zweier stetiger) Funktionen und erfüllen daher nach Kap. II, § 4, 4 die Bedingung

$$\lim_{\nu \to \infty} \nu^n |\alpha_\nu - \alpha_{n\nu}| = 0;$$

die Werte $\alpha_{n\nu}$ geben also für große ν eine um so bessere Annäherung an α_ν, je größer n gewählt wird.

8. Anwendung der Darbouxschen Methode zur asymptotischen Entwicklung der Legendreschen Polynome. Dies wenden wir an auf die Legendreschen Polynome $P_\nu(x)$, die durch die erzeugende Funktion

$$F(z, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) z^\nu \tag{66}$$

gegeben sind. Es sei zunächst $-1 < x < 1$, $x = \cos\varphi$, $0 < \varphi < \pi$. Dann ist $1 - 2xz + z^2 = (z - e^{\varphi i})(z - e^{-\varphi i})$; der Konvergenzkreis hat den Radius 1, und auf ihm liegen die singulären Punkte $z = e^{\pm\varphi i}$. Um die Reihenentwicklungen von F nach Potenzen von $z - e^{\pm\varphi i}$ aufzustellen, setzen wir fest, daß

$$\sqrt{z - e^{\pm\varphi i}} = e^{\pm i\frac{\varphi+\pi}{2}} \sqrt{1 - ze^{\mp\varphi i}}$$

---

[1]) *Darboux, G.:* Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série. J. math. pures appl. Serie 3, Bd. 4, S. 5—56 u. S. 377—416. 1878.

sein soll, wo die Quadratwurzel rechts den durch die Binomialreihe dargestellten Zweig bedeutet[1]). Dann wird

$$F(z,x) = \frac{1}{\sqrt{z-e^{\varphi i}}}\left(z - e^{\varphi i} + (e^{\varphi i} - e^{-\varphi i})\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{2\sin\varphi}} \frac{1}{\sqrt{z-e^{\varphi i}}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \left(\frac{z-e^{\varphi i}}{e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}}\right)^{\nu}$$

$$= \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{2\sin\varphi}} \frac{1}{\sqrt{z-e^{-\varphi i}}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \left(\frac{z-e^{-\varphi i}}{e^{-\varphi i}-e^{\varphi i}}\right)^{\nu};$$

Setzen wir dann

$$f_n(z,x) = \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \left\{ e^{-\frac{3\pi i}{4}} \frac{(z-e^{\varphi i})^{\nu-\frac{1}{2}}}{(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})^{\nu}} + e^{\frac{3\pi i}{4}} \frac{(z-e^{-\varphi i})^{\nu-\frac{1}{2}}}{(e^{-\varphi i}-e^{\varphi i})^{\nu}} \right\},$$

so ist $F - f_n$ auf dem Konvergenzkreis n mal stetig differenzierbar. Entwickeln wir also f_n nach Potenzen von z:

$$f_n(z,x) = \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \left\{ e^{-\frac{3\pi i}{4} - \frac{\varphi+\pi}{2} i + \nu(\varphi+\pi)i} \frac{(1-ze^{-\varphi i})^{\nu-\frac{1}{2}}}{(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})^{\nu}} \right.$$

$$\left. + e^{\frac{3\pi i}{4} + \frac{\varphi+\pi}{2} i - \nu(\varphi+\pi)i} \frac{(1-ze^{\varphi i})^{\nu-\frac{1}{2}}}{(e^{-\varphi i}-e^{\varphi i})^{\nu}} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\nu-\frac{1}{2}}{\mu} z^{\mu} \left\{ \frac{e^{-\frac{3\pi i}{4} - \frac{\varphi+\pi}{2} i + \nu(\varphi+\pi)i - \mu(\varphi+\pi)i}}{(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})^{\nu}} \right.$$

$$\left. + \frac{e^{\frac{3\pi i}{4} + \frac{\varphi+\pi}{2} i - \nu(\varphi+\pi)i + \mu(\varphi+\pi)i}}{(e^{-\varphi i}-e^{\varphi i})^{\nu}} \right\}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} p_{n\mu}(x)\, z^{\mu}$$

mit

$$p_{n\mu} = \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \binom{\nu-\frac{1}{2}}{\mu} \frac{1}{(2\sin\varphi)^{\nu}} \left\{ e^{-\frac{3\pi i}{4} + (\nu-\mu-\frac{1}{2})\varphi i + \frac{3\nu\pi i}{2} - \mu\pi i} \right.$$

$$\left. + e^{\frac{3\pi i}{4} - (\nu-\mu-\frac{1}{2})\varphi i - \frac{3\nu\pi i}{2} + \mu\pi i} \right\},$$

---

[1]) Ist also a eine positive Zahl, so soll für $z = e^{\varphi i} - a$ die Wurzel $\sqrt{z - e^{\varphi i}}$ positiv imaginär, dagegen für $z = e^{-\varphi i} - a$ die Wurzel $\sqrt{z - e^{-\varphi i}}$ negativ imaginär genommen werden. Die Festsetzung des Textes steht in Einklang mit der bei Formel (66) zu erhebenden Forderung, daß für $z = 0$ die Wurzel $\sqrt{1 - 2xz + z^2}$ den Wert $+1$ erhält.

67) $$p_{n\mu} = \frac{2i}{\sqrt{2\sin\varphi}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \binom{\nu - \frac{1}{2}}{\mu} \frac{(-1)^{\mu}}{(2\sin\varphi)^{\nu}} \cos\left(\frac{3\pi}{4}(1+2\nu) + \left(\nu - \mu - \frac{1}{2}\right)\varphi\right),$$

so erhalten wir

$$P_{\mu}(x) = p_{n\mu}(x) + O(\mu^{-n})$$

gleichmäßig in jedem Intervall $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Berücksichtigt man, daß $p_{n+1,\mu} - p_{n\mu} = O(\mu^{-n-1})$ ist, so folgt

$$P_{\mu}(x) = p_{n\mu}(x) + O(\mu^{-n-1}).$$

Das erste Glied dieser asymptotischen Entwicklung ist umgeformt

(68) $$P_{\mu}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\sin\varphi}} \frac{1\cdot 3\cdots(2\mu-1)}{2\cdot 4\cdots 2\mu} \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\varphi\right) + O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Ist x nicht reell zwischen -1 und $+1$, so hat von den singulären Stellen z_1 und z_2 wegen $z_1 z_2 = 1$ die eine, etwa z_1, einen Betrag $|z_1| < 1$, die andere $|z_2| > 1$. Auf dem Konvergenzkreis $|z| = |z_1|$ liegt nur die singuläre Stelle z_1, und wir haben daher nur diese Singularität zu berücksichtigen. Formen wir daher die ersten n Glieder der Entwicklung von $F(x, z)$ nach Potenzen von $z - z_1$ in eine Potenzreihe nach z um, so erhalten wir in den Koeffizienten derselben asymptotische Ausdrücke für $P_{\mu}(x)$, mit dem Unterschied jedoch, daß jetzt nur noch

$$|z_1|^n (P_{\mu} - p_{n\mu}) = O(\mu^{-n-1})$$

gilt.

Schlußbemerkung zum ersten Bande.

Hiermit beschließen wir die Entwicklungen des ersten Bandes. Von dem gewonnenen Standpunkte aus übersehen wir ein weites Feld mathematischer Tatsachen und Zusammenhänge. Aber wir dürfen uns nicht der Täuschung hingeben, als ob damit alle berührten Fragen restlos ihre Beantwortung gefunden hätten. Was noch fehlt, ist zunächst eine allgemeine Erledigung der Existenzprobleme, welche mit der Eigenwerttheorie bei partiellen Differentialgleichungen zusammenhängen. Weiterhin werden wir uns mit dem Problem der wirklichen numerischen Auffindung der Lösung zu beschäftigen haben. Schließlich bleibt zu bedenken, daß mit der Feststellung der Existenz der Lösung eines Problems auch in theoretischer Hinsicht nur ein erster Schritt getan ist. Soll die Lösung eines Problems der mathematischen Physik eine physikalische Bedeutung haben, mit anderen Worten, soll die Stellung des Problems als sinnvoll erwiesen werden, so müssen wir nicht nur der Existenz der Lösung versichert sein, sondern darüber hinaus erkennen, daß und wie die Lösung stetig von den Daten des Problems abhängt. — Im zweiten Bande wollen wir, wesentlich geleitet von den Gesichtspunkten der Variationsrechnung, den Komplex dieser Fragen in Angriff nehmen. Eine allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen, insbesondere der klassischen Differentialgleichungen der Physik, soll diesen Untersuchungen vorangehen, während die Schlußkapitel im Anschluß an die sogenannte Hamilton-Jacobische Theorie das Bild der allgemeinen Variationsrechnung abrunden und zu modernen physikalischen Anwendungen hinüberführen sollen.

Sachverzeichnis[1]).

Abbildung, konforme 297.
abgeschlossene Funktionensysteme 97.
adjungierter Differentialausdruck 200, 201.
Amplitude 89, 223.
Amplitudenverzerrung 224.
Anfachung 301.
Approximationssatz von Weierstraß 69—72.
Argumentfunktion 146.
asymptotische Dimensionenzahl 44.
— Verteilung der Eigenwerte 250, 344 bis 363, 379.
— Entwicklung von Funktionen 430 bis 443.
—s Verhalten der Eigenfunktionen 367 bis 371.
ausgeartete quadratische Formen 13.
— Kerne 100, 113.

Belastete Integralgleichung 317.
— Orthogonalität 317.
Belegungsfunktion 72, 80.
Bernoullische Formeln 15.
— Polynome und Zahlen 85—88.
Besselsche Funktionen
— Definition 252, 382, 388.
— asymptotische Formeln 435, 440.
— Differentialgleichungen 252, 257, 258, 382, 399.
— Entwicklung nach B. F. 254, 373 bis 375.
— Integraldarstellungen 390—393, 403 bis 404.
— Nullstellensätze 412—416.
— Orthogonalitätseigenschaften 254.
— Potenzreihendarstellung 393—397.
— Relationen 408—412.
— siehe auch S. 305, 373—375.
Besselsche Ungleichung
— für Vektorensysteme 20.
Besselsche Ungleichung
— für Funktionensysteme 35.
Bewegung, erzwungene 223—228, 236, 240, 241, 248.
bilineare Integralform 108.
Bilinearform 5.
Bilinearformel für iterierte Kerne 120, 140.
Brachistochrone 151, 178.

Charakteristische Zahlen 13—18.

Dämpfung 223, 301.
Darbouxsche Methode zur Gewinnung asymptotischer Formeln 441—443.
definite quadratische Formen 13.
— Kerne 108, 115, 121, 139, 140.
— Integranden 205.
Dekrement, logarithmisches 223.
Determinante, Fredholmsche 124—128.
— Gramsche 21, 43, 94, 95.
—nabschätzung von Hadamard 24.
Dimensionenzahl einer Funktionenfolge 44—46, 128—132.
Dini, Satz von 61.
direkte Methoden der Variationsrechnung 155—165.
Dirichletscher diskontinuierlicher Faktor 65.
—sches Integral 54.
—sches Problem 163.
diskontinuierlicher Faktor 65.
Divergenzausdruck 173, 174, 217.

Eckenbedingung von Weierstraß und Erdmann 215.
Eichkurve 214, 215.
Eigenfrequenz 229, 234.
Eigenschwingungen 223, 229, 234, 358 bis 363.
Eigenvektoren eines Tensors 23.

[1]) Stichworte, wie „Differentialgleichung", „Eigenwerte", „Eigenfunktionen", „Schwingungen", „Variationsproblem" usw., die in gewissen Kapiteln nahezu auf jeder Seite vorkommen, sind ins Sachverzeichnis nicht aufgenommen.

Einflußfunktion 274.
Einzelkraft 236, 273ff.
elektrische Eigenschwingungen 358 bis 363.
Elementarteiler 30, 31.
elliptische Differentialausdrücke 203 bis 207.
— Funktionen 196, 197, 268ff., 310 bis 313.
— Koordinaten 195—199.
Energie, potentielle und kinetische 208.
— potentielle einer elastischen Membran 148, 205.
— potentielle einer elastischen Platte 148, 206.
— potentielle einer Saite 210.
— potentielle eines elastischen Stabes 146, 207.
Enskogsche Methode zur Auflösung symmetrischer Integralgleichungen 136.
Entwicklungssätze
— allgemeine 117, 118, 237, 277—279, 284, 290, 291, 342—344.
— für spezielle Funktionensysteme 46 bis 53, 60—61, 69, 235, 239, 245, 246, 254, 262, 264, 270, 272, 319, 320, 375, 422.
Erdmannsche Eckenbedingung 215.
erzeugende Funktionen 69, 74, 75, 76, 78, 85, 392.
erzwungene Bewegung 223—228, 236, 240, 241, 248.
Eulersche Differentialgleichung 166, 174 bis 179.
—-Lagrangesche Multiplikatoren 143, 190, 208, 212.
Explosion von Registrierapparaten 224.
Extremale 150, 166.

Fermatsches Prinzip 143.
Fischer-Rieszscher Satz 97.
Form, bilineare 5ff., 27.
— quadratische 6ff., 25, 27.
— Integralform 107ff.
Fouriersches Integral 61—66.
—sche Koeffizienten oder Konstanten 35, 46, 53.
—sche Reihe 46—61.
Fredholmsche Formeln 124—128.
— Integralgleichung 82.
— Sätze 102—107.
freie Ränder bzw. Enden 179, 181, 206, 207.
Freiheitsgrad, Systeme mit einem F. 222
— Systeme mit zwei F. 299.
— Systeme mit endlich vielen F. 228 bis 231, 301.
— Systeme mit unendlich vielen F. 232ff.
Frequenz 89, 223.
Fundamentallema der Variationsrechnung 166.
Funktionalgleichung der Thetafunktion 58.
Funktionenfunktion 146.
Funktionenraum 40.

Gaußsche Methode zur mechanischen Quadratur 83—85.
Gestützte Enden 206.
geodätische Linien 151, 169, 185.
Gibbssches Phänomen 93, 94.
glatt, stückweise 33.
Glattheit einer Funktionenmenge 42.
Gleichgewicht 208.
Gräffesche Formeln 15.
Gramsche Determinante 21, 43 94, 95.
Greensche Formeln 199—207.
— Formel im besonderen 205.
— Funktion 273—276, 283—299, 305 bis 314.
— Funktion im erweiterten Sinne 280.
—r Tensor 24, 316, 317.
Grundlösung 275.
Grundton 230.

Hadamard, Determinantenabschätzung 24.
Hamiltonsches Prinzip 207—212.
Hammerstein, Satz von 140.
Hankelsche Funktionen
— Definition 386.
— asymptotische Formeln 433—441.
— Integraldarstellungen 386, 401, 406.
— Verhalten im Unendlichen 405.
Häufungsstellenprinzip 40.
Hauptachsenproblem 9.
—vektoren 12.
Hauptschwingungen 228—230.
Hermitesche Polynome und Orthogonalfunktionen 73, 76, 77, 261, 294.
holonome Nebenbedingungen 191.
homogene Form der Eulerschen Differentialgleichung 174.
— Differentialgleichungen 221.
— Integralgleichungen 81, 99.
— Randbedingungen 222.

homogene Membran 205, 245—255.
— Saite 209, 210, 233—237.
—r Stab 210, 243—245.
— positiv homogen 174.
hyperbolischer Differentialausdruck 203.
hypergeometrische Polynome siehe Jacobische Polynome.

Indefinit siehe definit.
Indikatrix 214, 215.
inneres Produkt 2, 33.
Integral, das Dirichletsche 54, 55.
— das Fouriersche 61—66.
— das Poissonsche 162, 423.
—e von Lebesgue 95—98, 138.
—e der Punktmechanik 217, 218.
Integraldarstellungen
— der Besselschen Funktionen 390, 391, 401, 403.
— der Hankelschen Funktionen 386, 387, 401.
— der Legendreschen Kugelfunktionen 416—420.
Integralform, bilineare und quadratische 107 ff.
Integralformeln von Mellin 90—93.
Integralgleichungen (lineare)
— erster Art 81, 137.
— zweiter Art oder Fredholmsche 82, 99.
— dritter Art oder polare 139—140.
— homogene 81, 99.
— inhomogene 81, 118, 119.
— singuläre 134.
— symmetrische 107—124, 129, 130, 136.
— Volterrasche 137, 368.
— Anwendung auf Eigenwertprobleme 276—279.
Invarianz der Eulerschen Differentialgleichung 193 ff.
invariante Variationsprobleme 216—219.
isoperimetrische Probleme 82, 152—153, 186—188, 213.
—s Problem für Polygone 144.
iterierte Kerne 120.

Jacobische Polynome 73, 74, 75, 260.

Kelloggsche Methode zur Bestimmung von Eigenfunktionen 136.
Kern, Definition 80, 99.
— ausgearteter 100, 113.
— definiter 108, 115—117, 121.
Kern, iterierter 120.
— lösender oder reziproker 123, 140.
— symmetrischer 80, 107—122.
— symmetrisierbarer 140.
— unsymmetrischer 136, 137.
Kettenbrüche 411, 412.
Kettenlinie 152, 188.
kinetische Energie 208, 209.
Knoten 248, 363—367.
—punkte 248.
—linien 248, 251, 253, 319.
konforme Abbildung 297, 298.
Koordinaten, elliptische 195—197.
— Normal- 229.
— Polar- 195.
— rotationselliptische 198.
— rotationsparabolische 198.
Konvergenz, mittlere 96, 97.
— der Summe der reziproken Quadrate der Eigenwerte 114.
Konvergenzsätze von Lebesgue 96.
Kugelfunktionen von Laplace
— Definition 265.
— Entwicklungssatz 422.
— Maxwell-Sylvestersche Darstellung 423—430.
— symmetrische 421.
Kugelfunktionen von Legendre
— Definition 66, 417.
— Anwendung zur mechanischen Quadratur 83—85.
— asymptotische Formeln 441—443.
— Differentialgleichung 68, 258, 416.
— Entwicklungssatz 375.
— erzeugende Funktion 69.
— Integraldarstellung von Schläfli 417, von Laplace 418.
— als spezielle Laplacesche Kugelfunktionen 266.
— Rekursionsformeln 69, 418.
— zweiter Art 418—419.
— zugeordnete 259, 260, 420.
kürzeste Linien 151, 169, 185.

Lagrangesche Bewegungsgleichungen 208.
—r Multiplikator 143, 190, 208, 212.
Laguerresche Polynome bzw. Orthogonalfunktionen 73, 77—79, 261 bis 262, 294—296.
Lamésche Funktionen, — Gleichung, —s Problem 268—272.
Laplacesche Integraldarstellung der Legendreschen Kugelfunktionen 418.

Laplacesche Kugelfunktionen siehe Kugelfunktionen von Laplace.
— Methode zur Gewinnung asymptotischer Formeln 431.
— Transformation 381, 382, 399.
Lebesguesche Theorie 40.
— Integrale 95, 96, 138.
— Konvergenzsätze 96.
Legendresche Polynome bzw. Kugelfunktionen siehe Kugelfunktionen von Legendre.
— Bedingung in der Variationsrechnung 177.
Lichtstrahlen 143, 147, 151, 170, 186, 213.
Lichtzeit 143, 147.
Lineare Gleichungen 3ff.
Liouville siehe Sturm-Liouville.
logarithmisches Dekrement 223.
— Potential 289.
lösender Kern 123.

Maß einer Punktmenge 95.
Matrix 3ff.
Matthieusche Funktionen 315.
Maximalfolge 156.
Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte 16—18, 115—117, 325 bis 327.
Maxwellsche Theorie der Kugelfunktionen 423—430.
Mayersches Problem 153, 192, 213.
Mellinsche Umkehrformeln 90—93.
Membran, potentielle Energie 148, 205.
— Variationsproblem und Differentialgleichung 211, 212.
— homogene 245—255.
— unhomogene 255.
— kreisförmige 251—255.
— rechteckige 249—251.
— Minimumsatz 380.
Mercerscher Satz 121, 317.
meßbare Punktmengen 95.
Minimalflächen 164, 173.
Minimalfolgen 157.
Minimum-Maximum-Eigenschaft siehe Maximum-Minimum-Eigenschaft.
mittlere Konvergenz 97.
Multiplikator, Euler-Lagrangescher 143, 190, 208, 212.

Nachbarschaft 150.
natürliche Randbedingungen 181—183.
Newtonsches Potential 288.
Neumannsche Funktionen 389, 398, 399, 406—408.
— Reihe 8, 123, 370.
Norm 2, 33.
Normalformen für Differentialausdrücke zweiter Ordnung 203—205.
Normalkoordinaten 229.
normierte Vektoren bzw. Funktionen 2, 33.
Nullösungen 100.
Nullstellen der Eigenfunktionen 363 bis 367.
— der Besselschen Funktionen 253, 412—416.

Obertöne 230.
orthogonale Vektoren 2.
— Funktionen 33.
— Transformationen 9—11.
Orthogonalisierungsprozeß für Vektoren 19.
— für Funktionen 34.
Orthogonalität, belastete 317.
Orthogonalsystem, vollständiges von Vektoren 19.
— vollständiges von Funktionen 36.
—e und Integralgleichungen 79—82.
—e, spezielle, siehe Besselsche Funktionen, Hermitesche Polynome, Jacobische Polynome, Laguerresche Polynome, Kugelfunktionen von Laplace, von Legendre, Tschebyscheffsche Polynome.

Parabolische Koordinaten 198.
—r Differentialausdruck 203—205.
Phase 223.
Phasenverschiebung 224.
Platte, potentielle Energie 148, 149.
— Variationsproblem und Differentialgleichung 206, 207, 212.
— Eigenwertproblem 256, 257.
— asymptotische Eigenwertverteilung 379.
— Minimumsatz 380.
Poissonsche Gleichung 288.
—s Integral 162, 423.
—sche Summationsformel 59, 60.
polare Integralgleichung 139.
Polarkoordinaten 195.
positiv homogen 174.
Potential, logarithmisches 289.
— Newtonsches 288.
Potentialgleichung 173, 298.

Potentialtheorie 159—163, 264—270, 284—289, 296—299, 305—314, 420 bis 430.
potentielle Energie siehe Energie.
Produkt, inneres 2, 33.

Quadratische Form 6ff., 25, 27.
— Integralform 107.
quellenmäßige Darstellung von Funktionen 101.

Rand, freier 179, 181.
Randbedingungen, natürliche 181—183.
— homogene und unhomogene 222.
Randwertaufgabe der Potentialtheorie 160—162, 267—272.
— vektorielle 358—363.
Registrierapparate 225—227, 299, 300.
Reibung 223.
Reihe, Fouriersche 46—61.
— Neumannsche 8, 123, 370.
— vgl. auch Entwicklungssätze.
Resolvente einer Bilinearform 7.
— einer quadrat. Form 15, 16.
— einer linearen Integralgleichung 123, 127.
Resonanz 224—227.
reziproker Kern 123, 140.
Reziprozität bei Variationsproblemen mit Nebenbedingungen 143, 145.
Reziprozitätsformeln zwischen bestimmten Integralen 64, 85.
Riesz-Fischerscher Satz 97.
Ritzsches Verfahren zur Lösung von Variationsproblemen 157.
rotations-elliptische und -parabolische Koordinaten 198.

Saite, potentielle Energie 210.
— Variationsproblem und Differentialgleichung 209—210.
— homogene 232—237.
— unhomogene 237—243.
— Beispiele zur schwingenden S. 302 bis 304.
Sattelpunktmethode 435—441.
Schläflische Integraldarstellung der Legendreschen Kugelfunktionen 416.
Schwarzsche Ungleichung 2, 33.
Schwebungen 303, 304.
Seilschwingungen 304.
semidefinit siehe definit.
singuläre Integralgleichungen 134, 135.
Sinusschwingung 223.
spektrale Zerlegung 88.
Spektraldichte 89.
Spektrum 89, 318, 331.
Stab, potentielle Energie 147.
— natürliche Randbedingungen 206.
— Variationsproblem und Differentialgleichung 210.
— Eigenwertproblem 243—245.
stationäre Funktionen bzw. Kurven 167.
Steiner, ein Problem von St. 144.
—s Lösung des isoperimetrischen Problems 145, 156.
stetig, stückweise 32.
—e Abhängigkeit vom Kern 131—132.
Stetigkeitseigenschaften der Eigenfunktionen 337—342.
Stirlingsche Formel 431—433.
Streckenspektrum 318.
stückweise glatt 33.
— stetig 32.
Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem 238, 239, 257—262, 365—375.
summable Funktionen 95.
Summationsformel von Poisson 59.
Superpositionsprinzip 221.
Sylvester, algebraischer Satz 427, 429, 430.
— Maxwell-Sylvestersche Darstellung der Kugelfunktionen 423—430.
symmetrischer Kern 80, 107—122, 129, 130, 136.
symmetrisierbarer Kern 140.

Tensor 4.
— Greenscher 24, 316, 317.
Thetafunktionen, Anwendungen 307 bis 310, 314.
— Funktionalgleichung 58, 59.
Trägheitsgesetz der quadrat. Formen 26, 27.
Transformation der Differentialausdrücke auf Normalformen 203—205.
— Hauptachsentr. einer quadrat. Form 9—16.
— Laplacesche 381, 382, 399.
— lineare 3, 6—13.
— Mellinsche Integraltransformation 90—93.
— orthogonale 9—11.
— unendlich kleine lineare 27—30.
— von Δu 194—199.
—sformel der Thetafunktion 58, 59.
Transversalität 184—186, 219.

Tonhöhe 229, 329—330.
Tschebyscheffsche Polynome 73, 74, 145.

Umkehrformeln von Mellin 90—93.
Unabhängigkeitsmaß 21, 43.
unendlich kleine lineare Transformation 27—30.
— viele Variable 27, 138—139, 149, 159.
unhomogene Differentialgleichungen 219.
— Integralgleichungen 81, 102ff.
— Membran 255.
— Randbedingungen 222.
— Saite 237—243.

Variation, erste 167, 179—189, 216.
Variationsableitung 167.
vektorielle Randwertaufgaben 358.
Versteifung 231.
Vielfachheit eines Eigenwertes 100, 113.
vollständiges orthogonales System von Vektoren 19.
— von Funktionen 36, 97.
— von Funktionen in mehreren Variablen 89, 90.
Vollständigkeitsrelation 20, 36.
Vollständigkeit der Eigenfunktionen einer Differentialgleichung 278, 284, 291, 336, 337.
— der Laplaceschen Kugelfunktionen 421.
— der Legendreschen Polynome 69.
— der Sturm-Liouvilleschen Eigenfunktionen 239.
— der trigonometrischen Funktionen 47—50, 89.
Volterrasche Integralgleichung 137, 368.

Wallissches Produkt für $\frac{\pi}{2}$ 57.
Weierstraßsche Eckenbedingung 215.
—r Approximationssatz 69—72.
—r Satz über Extrema stetiger Funktionen 11, 142.
Wellenfront 186.
Wellennormale 186.

Zylinderfunktionen siehe Besselsche F. Hankelsche F., Matthieusche und Neumannsche F.

Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig.